



CONSTRUÇÃO E PROPOSTA DE UM PÊNDULO DUPLO CAÓTICO PARA DEMONSTRAÇÃO DE COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR EM DISCIPLINAS DE ENGENHARIA

Everthon S. de Oliveira – everthonsol@yahoo.com.br

Universidade Federal de São João del-Rei, Departamento de Engenharia Elétrica Campus Santo Antônio - Praça Frei Orlando 170 – Centro 36307-352 - São João del-Rei, Minas Gerais

Suzanne E. Tavares – sutavaresbr@yahoo.com.br

Erivelton G. Nepomuceno – nepomuceno@ufsj.edu.br

Samuel M. Kurcbart – samuel@ufsj.edu.br

Universidade Federal de São João del-Rei, Departamento de Ciências Naturais, Campus Dom Bosco - Praça Dom Helvécio 74 - Dom Bosco 36301-160 - São João del-Rei, Minas Gerais

Resumo: *A dificuldade de se demonstrar caos em experimentações científicas e a existência de poucos experimentos didáticos de custo acessível inviabilizam muitas vezes o ensino prático nessa área. Este artigo apresenta uma proposta de construção de uma bancada didática para demonstração de comportamento dinâmico não-linear. O projeto objetiva baixo custo e fácil construção. Trata-se de um sistema mecânico pendular com excitação externa, construído a partir de materiais de uso comum. Neste trabalho são mostrados os passos principais para a reprodução do experimento e relevados suas principais vantagens e potencialidades para as aulas em cursos de engenharias e física com possibilidade de demonstração visual de comportamento caótico.*

Palavras-chave: *Pêndulo Duplo, Experimentações Metodológicas, Sistemas Dinâmicos Não-lineares.*

1 INTRODUÇÃO

A análise de sistemas dinâmicos e a verificação de propriedades inerentes são de extrema importância em cursos de engenharia devido sua grande ocorrência e necessidade de controlá-los ou simplesmente modelá-los. A observação de experimentos, portanto, faz-se relevante, pois facilita o processo de aprendizagem e compreensão da teoria.

No estudo de sistemas dinâmicos não-lineares ou comportamento caótico, algumas bancadas com evidências de comportamento caótico são os circuitos eletrônicos como em CHUA *et al*, 1993 e dispositivos mecânicos (SHINBROT *et al*, 1991).

Os circuitos eletrônicos são muito versáteis e largamente utilizados, cita-se o circuito de Chua. Entretanto, os sistemas mecânicos merecem atenção devido ao seu aspecto didático.



A literatura relata vários tipos de sistemas mecânicos que apresentam comportamento não-linear e até caótico (ABARBANEL, 1995; ANISHCHENKO, 1995; KAPITANIAK, 1991; BERGER, 1997). Para o caso de experimentos didáticos, é bem conveniente o uso de pêndulos, pela simplicidade e por apresentarem comportamento caótico sob certas condições.

Dentre os tipos de modelos e plataformas que utilizam pêndulos, pode-se citar as que são baseadas em pêndulos simples, como os trabalhos de SMITH (1989); ou em pêndulos duplos como apresentados em PETER (2007) e CHRISTINI (1996).

Pêndulos duplos apresentam uma dinâmica mais complexa do que pêndulos simples, e demonstram uma sensibilidade às condições iniciais. Além disso há poucos trabalhos que relatem a caracterização e construção de pêndulos duplos (Christini, 1996; PETER, 2007). Alguns destes trabalhos não consideram o atrito nem a presença de excitação externa (SHINBROT *et al*, 1991). Outros, para contornar o efeito do atrito utilizam uma excitação externa (FIRMO, 2007).

Modelos matemáticos de pêndulos são utilizados para estudos de diferentes sistemas físicos. Isso torna o estudo do comportamento pendular importante, pois os avanços obtidos na análise de seu modelo matemático podem ser aplicados a outros sistemas, cujos modelos matemáticos sejam isomórficos aos modelos utilizados para sistemas pendulares (HENG, 1992; SMITH, 1989).

Além da relevância dos pêndulos, devido a utilidade encontrada no estudo de seus modelos, também deve-se levar em consideração sua utilidade em aplicações didáticas.

Neste trabalho é proposta a construção de um pêndulo duplo caótico de baixo custo para demonstração de comportamento dinâmico não-linear para cursos de engenharia e física.

2 METODOLOGIA

2.1 Premissas de construção da plataforma

A importância do pêndulo tanto visual quanto construtiva, foi um dos fatores que contribuíram para a escolha da plataforma construída, tendo como premissa os seguintes pré-requisitos:

- Ser um sistema didático;
- Ser um sistema mecânico pendular;
- Simplicidade construtiva e visual;
- Possuir baixo custo de implementação.

A necessidade de que a plataforma atenda a cada um desses requisitos está associada, além do aspecto didático, ao objetivo de que esse trabalho possa ser reproduzido, de maneira rápida e não onerosa, sendo utilizado como uma ferramenta de auxílio no ensino de dinâmica caótica, dado a relevância do tema.

2.2 Descrição da plataforma

O Pêndulo Duplo

A haste superior do pêndulo é formada pela barra 1, que por sua vez é composta por duas barras chatas com medidas 0,27m x 0,032m x 0,006m, e a segunda haste é formada por uma única barra chata, barra 2, com medidas 0,216m x 0,032m x 0,013m. As barras são feitas em

alumínio. As duas hastes, barra 1 e barra 2, são interligadas por meio de um eixo de 7mm. O ponto médio do eixo é fixo na barra 2, e as extremidades do eixo são fixadas em rolamentos, localizados nas peças que formam a barra 1. As hastes podem girar livremente sobre seus eixos, e a primeira haste depende ainda do sistema de acionamento para girar. O esquema do pêndulo é mostrado na Figura 1.

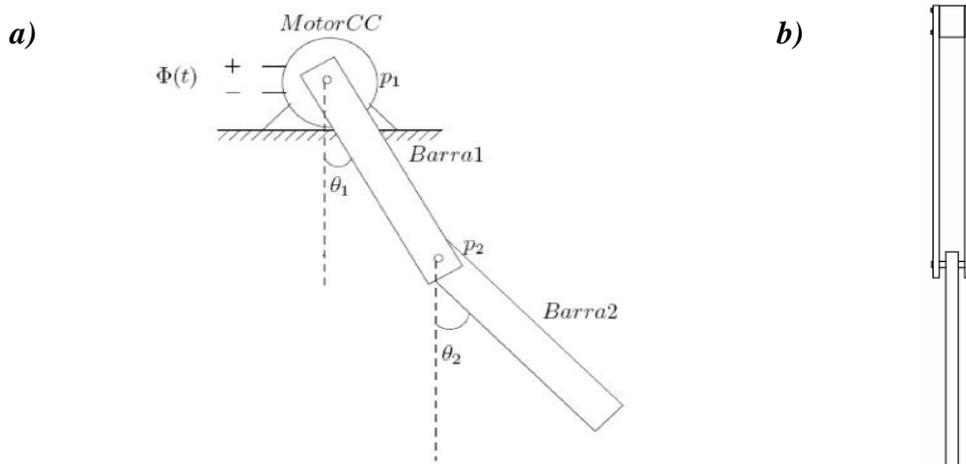


Figura 1 – Pêndulo Duplo. (a) Barras ligadas ao motor cc, em que θ_1 é o ângulo da barra 1 e θ_2 o ângulo da barra 2 com o eixo vertical. (b) Visão lateral das barras.

Algumas simulações computacionais evidenciaram que pequenas alterações nesses parâmetros não comprometem o surgimento de uma dinâmica caótica.

O Motor

Este motor faz o acionamento do sistema. Foi utilizado um motor de corrente contínua. Ele possui torque suficiente para acionar o pêndulo, anulando o efeito do atrito. Foi utilizado um motor de 100W de 7000rpm do tipo universal usado em máquinas de costura. Algumas alterações foram feitas com o intuito de que o motor funcionasse como um motor de excitação independente (corrente contínua). Isso foi necessário pelo fato de o motor ser originalmente do tipo universal (funciona em tensão alternada ou contínua) e tem como desvantagem a não inversão do sentido de rotação necessária no projeto, apenas por meio da alimentação. A alteração é feita desligando as bobinas ligadas em série e religando-as separadamente em fontes de alimentação distintas. Isso permite que o sistema de controle possa inverter a rotação segundo o algoritmo de controle.

Eixo

O eixo para conexão entre o motor e as barras foi retirado de uma antiga impressora e adaptado para o projeto. É constituída de aço-carbono, oferecendo muita resistência, com 6mm de espessura e 170mm de comprimento. Na ponta do eixo foi feita uma rosca para fixação das barras com o uso de porcas e arruelas. O conjunto eixo-motor é mostrado na Figura 2.

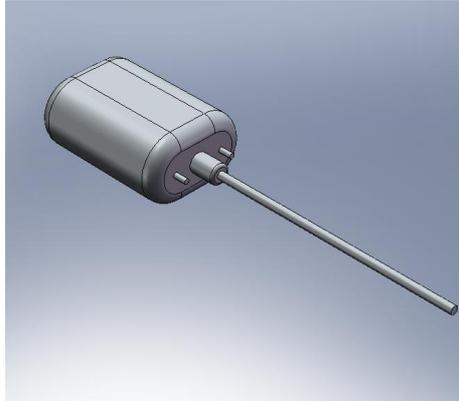


Figura 2 – Motor e eixo.

Cantoneiras

As cantoneiras e mancais foram projetados para sustentar o eixo que liga o motor e as barras do pêndulo. Essas cantoneiras de aço, mostradas na Figura 3, são acopladas a um mancal de madeira para diminuir as vibrações do eixo, inerentes a dinâmica do experimento e que podem prejudicar os resultados. Os mancais suportam rolamentos internos por onde passa o eixo principal.

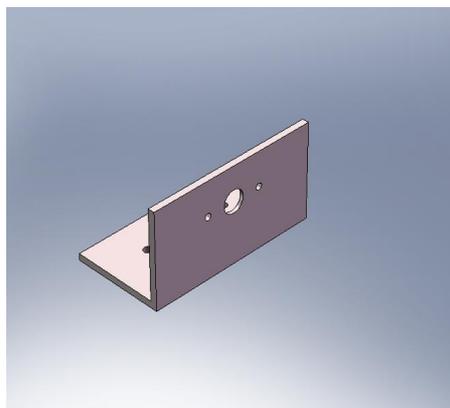


Figura 3 – Cantoneira.

Os Sensores

Foram utilizados dois sensores. O primeiro sensor (S1) é um gerador cc, Figura 4, que fornece uma medição em tensão elétrica proporcional a velocidade angular da barra 1. Esse sensor, adquirido em sucatas, é formado por um pequeno motor CC de ímãs permanentes, funcionando como gerador. O eixo do gerador é acoplado diretamente ao eixo do motor CC do sistema de acionamento, fazendo com que o gerador gire à mesma velocidade da barra 1 do pêndulo duplo representada por ϕ_1 . Os níveis de tensão e, conseqüentemente, a velocidade angular foram analisados com o auxílio de um osciloscópio.

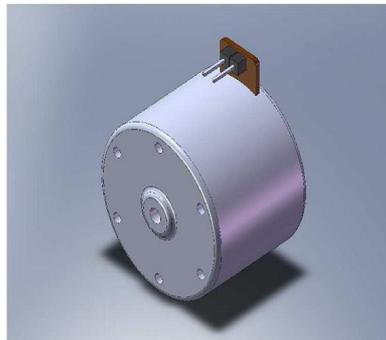


Figura 4: Sensor 1: gerador cc.

O segundo sensor (S2) é composto por duas peças. Um disco semi-aberto e um fotosensor. O disco semi-aberto foi feito de acrílico e fixado no eixo de sustentação do sistema. O fotosensor é composto por um diodo emissor de luz LED, e um fototransistor. Dependendo da posição do disco o sensor irá apresentar nível lógico alto (1) ou baixo (0). O fotosensor foi feito adaptando peças de um mouse sucateado. O esquema deste sensor pode ser visto na Figura 5.

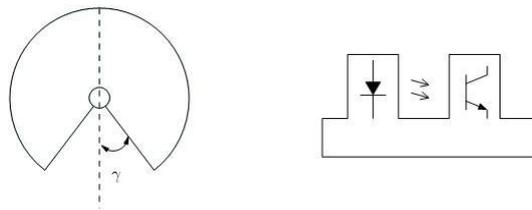


Figura 5 - Sensor 2: Disco semi-aberto e acoplamento ótico.

Suporte de Madeira

Toda a bancada está fixada num suporte de madeira de 490x400 mm².
O projeto final é mostrado na Figura 6.

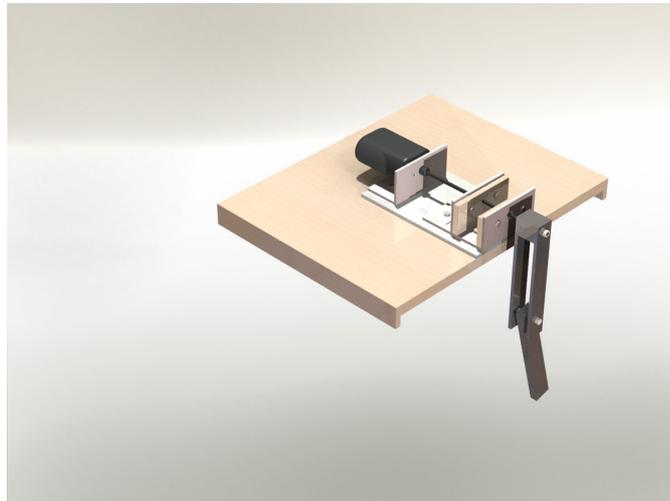


Figura 6 - Esboço final da bancada sugerida.

Sistema de Comando

O sistema de comando do projeto serve para controlar o sentido do motor e acioná-lo quando necessário. Para contornar o atrito do sistema o motor é acionado na direção de movimentação do pêndulo. Para isso o sistema de comando coleta os sinais dos dois sensores e processa essas informações em um circuito eletrônico. Este circuito, então, envia sinais de comando para uma ponte H que então aciona o motor cc. A ponte H é um circuito que faz a inversão do sentido de corrente, muito utilizado na inversão do sentido de rotação de motores cc. A lógica do comando é descrito na Tabela 1.

Tabela 1 – Lógica de comando.

S1	S2	saída
>0	0	-
<0	0	-
>0	1	sentido horário
<0	1	sentido anti-horário

2.3 Alimentação do sistema e aquisição dos dados

O circuito de comando, bem como o motor de 100W, foram alimentados por meio de duas fontes cc controladas. O circuito foi alimentado com uma fonte simétrica de 5V. A armadura do motor de 100W, com uma tensão entre 15V e 24V. O campo deste motor foi ligado numa tensão de 12V. Como o motor trabalharia em condições de partida (alta corrente) foi necessário um sistema de ventilação forçada, feita com um cooler retirado de uma fonte de alimentação antiga e alimentado com 12V, podem também serem usadas outras formas de ventilação dependendo do motor adotado.

O sinal de saída do sistema é a tensão do gerador cc (sensor 1). Esse sinal pode ser coletado por um osciloscópio ou por meio de uma placa de aquisição de dados e armazenados em um computador para posterior análise.

3 RESULTADOS

Todas as peças foram adquiridas e a parte mecânica montada. Logo depois foi montado o sistema de comando. O resultado final é mostrado na Figura 7. O circuito de comando do motor que realiza a função de acionamento mostrada anteriormente é mostrado na Figura 8. O sinal coletado do gerador cc, pelo osciloscópio é mostrado no gráfico da Figura 9.



Figura 7 - Pêndulo Duplo montado.

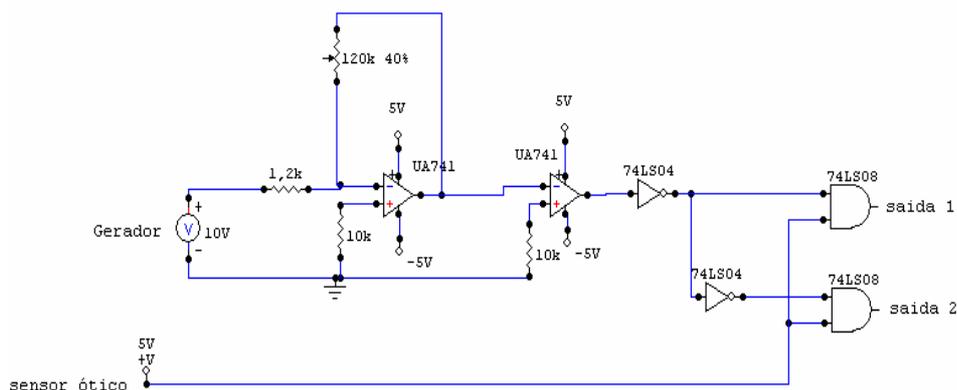


Figura 8 - Circuito de comando.

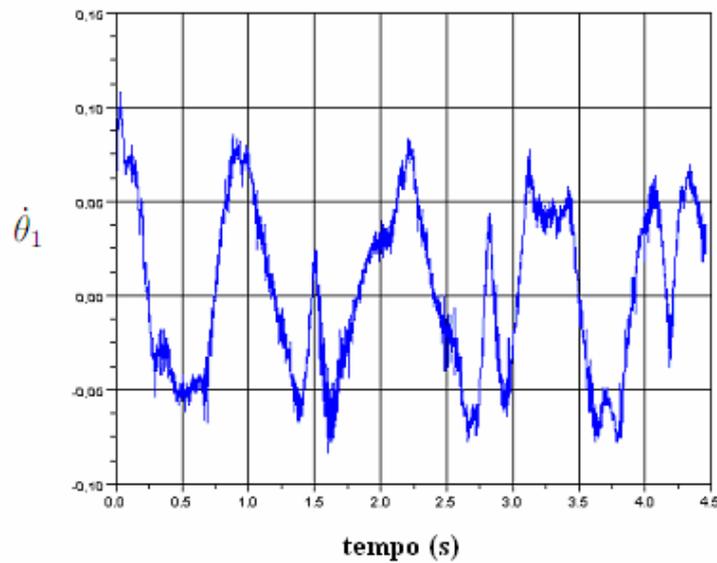


Figura 9 – Sinal de saída do sistema real coletado de um osciloscópio.

4 CONCLUSÃO

Foi construída e proposta uma plataforma didática para demonstração de comportamento dinâmico não linear com possibilidade de surgimento de comportamento caótico. Procurou-se primar pela eficiência e baixo custo do projeto. Grande parte do material utilizado pode ser obtido em sucata, o que reduz significativamente o custo da plataforma.

O projeto montado pode ser usado como uma bancada didática para o estudo, análise e demonstração de uma dinâmica caótica, contribuindo de maneira significativa para o ensino na instituição. Variando a tensão aplicada no motor é possível demonstrar comportamento periódico, semi-periódico e até caótico.

É também um incentivo a construção desta e de outras bancadas relevando o quanto trabalhos construtivos, como o aqui descrito, contribuem para a integração e aplicação dos conhecimentos adquiridos na academia.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABARBANEL, H. D. I. Analysis of observed chaotic data. **Springer-Verlag**, New York, 1995.

ANISHCHENKO, V. S. Dynamical Chaos - Models and Experiments. **World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd**, 1995.

BERGER, J. E. e Nunes, G. Mechanical duffing oscillator for the undergraduate laboratory. **American Journal of Physics**, 65(9):841–846, 1997.

CHRISTINI, D. J., C. J. J. e. I. P. S. Experimental control of high-dimensional chaos: The driven double pendulum. **Physical Review E**, 54(5):4824–4827, 1996.

CHUA, L. O., Wu, C. W., Huang, A. S., e Zhong, G. Q. A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos. 1 Routes to Chaos. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 40(10):732–744, 1993.

FIRMO, D. L. **Construção e Caracterização Dinâmica De Um Pêndulo Duplo Caótico**. Dissertação (Mestrado), 2007. PPGEE - Universidade Federal de Minas Gerais.

HENG, H. e Martienssen, W. Analysing the chaotic motion of a driven pendulum. **Chaos, Solitons Fractals**, 2:323–334, 1992.

HENRY, R. J., M. Z. N. N. A. H. e. M. D. T. Cargo pendulation reduction on ship-mouted crans via boom-luff angle actuation. **Jornal of Vibration and Control**, 7(8):1253–1264, 2001.

KAPITANIAK, T. Chaotic Oscillations in Mechanical Systems. **Manchester University Press**, 1991.

PETER, V. Investuigation of a chaotic double pendulum in the basic level physics teaching laboratory. **European Journal of Physics**, 28(1):61–69, 2007.

SHINBROT, T., Grebogi, C., Wisdom, J., e Yorke, J. A. Chaos in a double pendulum. **American Journal of Physics**, 60(6):491–499, 1991.

SMITH, H. J. T. e Blackburn, J. A. Chaos in a parametrically damped pendulum. **Physical Review A**, 40(8):4708–4715, 1989.



CONSTRUCTION OF A DOUBLE PENDULUM CHAOTIC FOR SHOWING NON-LINEAR BEHAVIOR IN ENGINEERING COURSES

***Abstract:** The difficulty to demonstrate chaos in scientific experiments and the few number didactical experiments with affordable cost often impede practical teaching in this area. This paper presents a proposal to build a bench for didactic demonstration of non-linear dynamic behavior. The project aims have low cost and easy construction. This is a mechanical pendulum system with external excitation, constructed from materials in common use. In this work are shown the main steps to reproduce the experiment and highlighted its main advantages and potential for teaching courses in engineering and physics with the possibility of visual demonstration of chaotic behavior.*

***Key-words:** Double Pendulum, Methodological experiments, Non-linear Dynamical Systems.*