

MODELAGEM MATEMÁTICA, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA MASSA-MOLA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE PARA ESTUDOS DE DINÂMICA

Lúcio Flávio Santos Patrício¹; Tobias Anderson Guimarães²; Aline de Faria Lemos³; Ana Cláudia de Oliveira Souza⁴

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Campus V, Coordenação de Eletromecânica
Rua Monte Santo, 319

35.502-036 – Divinópolis – Minas Gerais

¹luciopatricio@yahoo.com.br

²asptobias@yahoo.com.br

³alinedefl@yahoo.com.br

⁴naclaudia_oliveira@yahoo.com.br

Resumo: *É tendência mundial a utilização de técnicas preditivas para o monitoramento de falhas e também o controle da vibração de estruturas, tais como equipamentos, edifícios, pontes e veículos automotores, falhas estas que são responsáveis por altos prejuízos na indústria metal-mecânica e da construção civil. Portanto, é de suma importância o conhecimento dos mecanismos físicos que geram estas ocorrências, sendo um dos mais importantes os fenômenos físicos decorrentes da excitação de uma estrutura em uma de suas frequências naturais ou valores próximos a elas. Com este propósito pretende-se apresentar a modelagem matemática, computacional e validação experimental de um sistema massa-mola de dois graus de liberdade, construído na forma de bancada, para verificação de suas frequências naturais. Será apresentada a fundamentação teórica, bem como a metodologia de cálculo das frequências, o detalhamento da construção da bancada experimental, coleta, tratamento e análise dos dados para o referido projeto. Esta bancada será utilizada como ferramenta aplicada aos estudos de fenômenos referentes às Vibrações, Frequências Naturais, Rigidez e Amortecimento nos cursos do CEFET/MG – Campus V.*

Palavras-chave: *modelagem, vibrações mecânicas, frequência natural, ressonância.*

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho é fruto da intenção de expansão das atividades relacionadas à área de Dinâmica e Vibrações Mecânicas do CEFET/MG – Campus V, materializadas através do Projeto de Iniciação Científica-Júnior (BIC-Jr) “Construção de uma bancada para um sistema massa-mola de 2 graus de liberdade para validação experimental do cálculo de suas frequências naturais”.

Seu principal objetivo é a compreensão das principais grandezas envolvidas na obtenção das frequências naturais de um sistema de múltiplos graus de liberdade, passando pela obtenção de seu modelo matemático, sua implementação numérica e posterior verificação experimental.

2. OBJETO DE ESTUDO

Pensando em futuras aplicações, didáticas e acadêmicas, do Laboratório de Dinâmica do Campus V do CEFET/MG, chegou-se à conclusão que um sistema de dois graus de liberdade, similar a um edifício de dois pavimentos, permite a aplicação prática dos conceitos envolvidos em Dinâmica e Vibrações, tanto no Curso Técnico de Eletromecânica como na Engenharia Mecatrônica.

Inclusive, o conhecimento adquirido na aplicação do presente artigo servirá como base para um futuro trabalho sobre Absorvedores Dinâmicos de Vibração, ou seja, esta bancada é de grande valia didática e, por conseguinte, acadêmica.

Na Figura 1 é ilustrado, de forma esquemática, o sistema em questão, composto por duas massas inerciais, quatro lâminas de comprimentos conhecidos e escamoteáveis (duas para o primeiro pavimento e duas para o segundo) rigidamente fixas para não haver interferência nos movimentos das massas dos pavimentos.

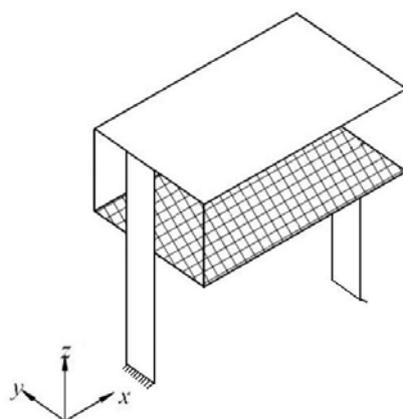


Figura 1 – Esquema do sistema de dois graus de liberdade

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Como fundamentação teórica, foram estudados os seguintes tópicos: (a) Conceitos iniciais de grau de liberdade, movimento harmônico, rigidez, amortecimento, frequência; (b) Vibrações Livres e Forçadas em sistemas de um grau de liberdade, sem e com amortecimento; (c) Vibrações Livres e Forçadas em sistemas de dois graus de liberdade, sem e com amortecimento – ênfase na obtenção das frequências naturais e modos de vibração; (d) Abordagem matricial dos sistemas de dois graus de liberdade: Método de Newton (Equilíbrio Dinâmico ou de D’Albembert) e Equações de Lagrange; (e) Acelerometria e aquisição de dados.

A primeira abordagem do referido sistema foi a do Equilíbrio Dinâmico (Inman (1996), Meirovitch(1967)). Partindo da equação $[M](\ddot{x}) + [C]\dot{x} + [K](x) = 0$ foram feitas algumas considerações:

- ⇒ Todo tipo de amortecimento é desprezado (viscoso, estrutural, histerético), ou seja, a matriz $[C]$ é nula e, por conseguinte, o termo $[C]\dot{x}$ também o será;
- ⇒ O sistema dextrogiro é tomado de tal forma que a coordenada x é positiva para a direita, conforme ilustrado na Figura 1;
- ⇒ O vetor deslocamento, (x) , é definido como sendo: $(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;
- ⇒ O vetor aceleração, (\ddot{x}) , é definido como sendo: $(\ddot{x}) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$;

⇒ A carga a ser aplicada se dá na forma de um pequeno deslocamento inicial, sendo então considerada uma perturbação a uma das massas do sistema, de tal forma a manter o Equilíbrio Dinâmico válido.

Daí, a dinâmica do sistema será dada pela Equação 1.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

sendo m_1 a massa do primeiro sub-sistema de um grau de liberdade e k_1 a rigidez equivalente das molas planas deste sub-sistema. Para m_2 e k_2 toma-se o mesmo raciocínio.

3.1 Construção de protótipo para validação do modelo matemático

Como validação, fez-se opção pela construção de um protótipo deste sistema, contando com uma simplificação: no lugar de quatro molas planas por sub-sistema, colocou-se duas molas, fixadas por parafusos à seção média de cada massa, de tal forma a equilibrar estaticamente o sistema. Na Figura 2 é ilustrada esta configuração.



Figura 2 – Protótipo construído para validação experimental do modelo matemático

Para este sistema, foram tomadas as seguintes medidas:

- ⇒ Espessura das molas planas: $h = 1,50\text{mm}$;
- ⇒ Largura das molas planas: $b = 50,00\text{ mm}$;
- ⇒ Altura das molas do primeiro sub-sistema: $L_1 = 253,00\text{mm}$;
- ⇒ Altura das molas do segundo sub-sistema: $L_2 = 165,00\text{mm}$;
- ⇒ Massa $m_1 = 0,3839\text{Kg}$;
- ⇒ Massa $m_2 = 0,3768\text{Kg}$;

De posse destes dados, calcularam-se os momentos de inércia de área das molas planas, definidos, para este caso, na Equação 2.

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{(50)(1,5)^3}{12} = 14,06\text{mm}^4 \quad (2)$$

Calculou-se também a rigidez das molas, definida na Equação 3.

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (3)$$

Considerando $E = 210\text{GPa}$, para as molas do primeiro pavimento a rigidez é dada pela Equação 4

$$k = \frac{3(210 \times 10^9)(14,06 \times 10^{-12})}{(253,00 \times 10^{-3})^3} = 546,97 \text{N/m} \quad (4)$$

e para as do segundo pavimento, dadas pela Equação 5.

$$k = \frac{3(210 \times 10^9)(14,06 \times 10^{-12})}{(165,00 \times 10^{-3})^3} = 1971,85 \text{N/m} \quad (5)$$

Numericamente, a equação do sistema (Equação 6) fica:

$$\begin{bmatrix} 0,3839 & 0 \\ 0 & 0,3768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1093,94 & 0 \\ 0 & 3943,70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Lembra-se que, para k_1 e k_2 da matriz $[K]$, os valores a serem lançados são de rigidez equivalente para molas associadas em paralelo, ou seja, $k_1 = 2(546,97)\text{N/m}$ e $k_2 = 2(1971,85)\text{N/m}$.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Uma vez de posse das matrizes massa $[M]$ e rigidez $[K]$, partiu-se para a implementação numérica. Para tal usaram-se dois softwares: MATLAB[®] e LabView[®]. As rotinas implementadas tiveram como objetivos:

- ⇒ De posse dos dados do projeto do sistema, fornecer, para condições iniciais conhecidas, as respostas no domínio do tempo e frequência, das massas m_1 e m_2 ;
- ⇒ Possibilitar o ajuste das frequências naturais de acordo com a variação dos parâmetros de projeto, principalmente os relacionados à rigidez das molas;
- ⇒ Facilitar a interface entre o sistema físico e sua interpretação gráfica, com a menor manipulação de dados possível, a fim de se minimizar a propagação de erros.

4.1 Resultados da simulação numérica

Para o sistema citado acima, a implementação computacional trouxe a seguinte resposta numérica, ilustrada nas Figuras 3 e 4:

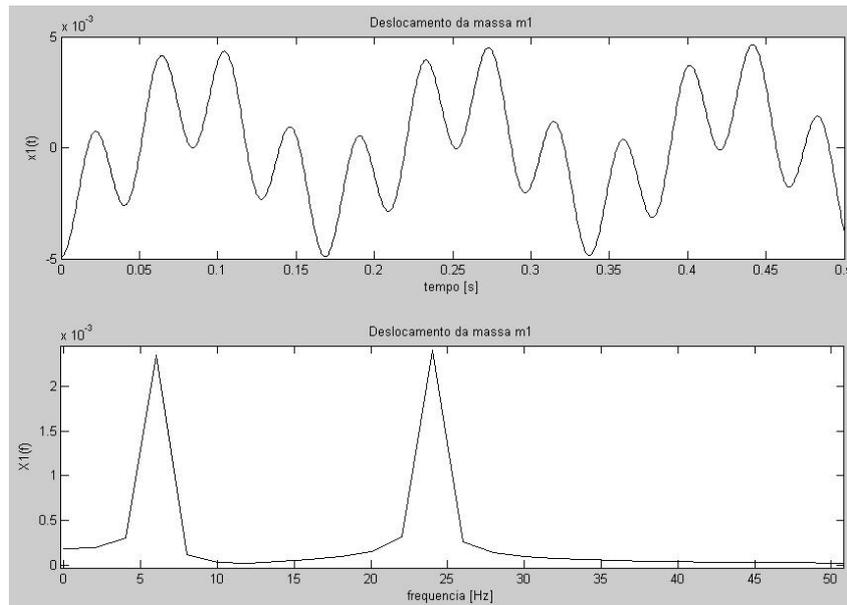


Figura 3 – Deslocamento e FFT da resposta numérica do modelo matemático para a massa m_1

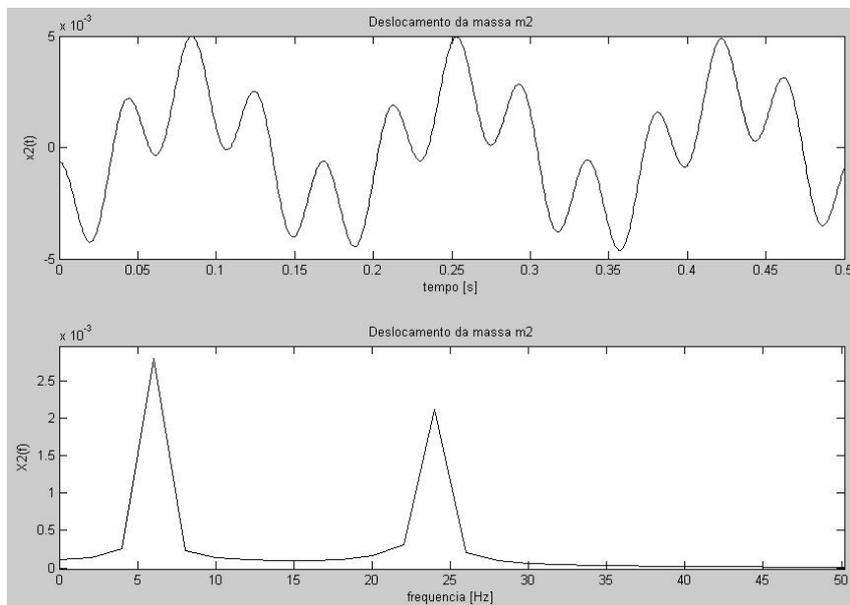


Figura 4 – Deslocamento e FFT da resposta numérica do modelo matemático para a massa m_2

As condições iniciais para esta simulação foram:

- ⇒ Deslocamento aplicado à massa $m_1 = 0$;
- ⇒ Deslocamento aplicado à massa $m_2 = 5,00\text{mm}$;
- ⇒ Velocidades iniciais das duas massas = 0;
- ⇒ Período de amostragem = 0,5s;
- ⇒ Número de pontos = 1000;

As frequências calculadas foram $f_1 = 5,83\text{Hz}$ e $f_2 = 23,74\text{Hz}$. Percebe-se, nos gráficos de deslocamento, que o modelo matemático, quando implementado numericamente, apresentou-se bem posto, uma vez que o deslocamento da massa 2, que recebeu o deslocamento inicial de 5,00mm, oscilou em torno de $\pm 5,00\text{mm}$ e a massa 1, pela rigidez do sistema, apresenta leve atenuação.

Percebe-se também que a rotina de cálculo da FFT (Shampine e Reichelt (1997)) também se mostra consistente, uma vez que, para diferentes sinais de deslocamento das duas massas, apresenta resultados, em frequência, idênticos. As amplitudes, referentes à energia relacionada à cada frequência, são, como deveriam ser em virtude da relação da dinâmica do sistema com suas condições iniciais, diferentes: para a massa 1 a energia se distribui uniformemente entre

$f_1 = 5,83\text{Hz}$ e $f_2 = 23,74\text{Hz}$ enquanto que para m_2 a amplitude para a frequência $f_1 = 5,83\text{Hz}$ prepondera.

5. VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

5.1 Aparato experimental

O aparato experimental utilizado neste experimento é descrito abaixo:

- ⇒ Micro-computador Dell GTX Flex, memória RAM: 2GB, Processador: Pentium Core Duo;
- ⇒ Placa de aquisição de dados acoplada à adaptador para conexão USB da National Instruments NI USB 9233, de quatro canais, taxa de amostragem: 50k X canal, resolução: 24bits, faixa de entrada de sinal: $\pm 5\text{V}$;
- ⇒ Acelerômetro modelo 4514, ganho $1,044 \text{ mV/ms}^{-2}$, da Bruel & Kjaer, com respectiva base magnética e cabo de conexão tipo BNC.

A disposição da montagem dos referidos equipamentos é mostrada na Figura 5 abaixo.

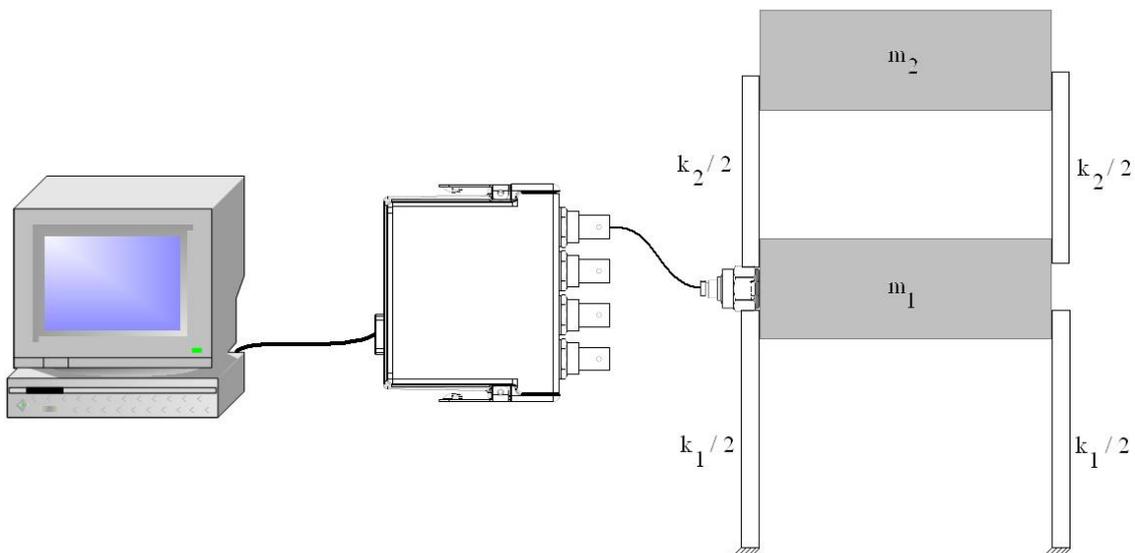


Figura 5 – Esquema do aparato experimental utilizado

5.2 Resultados da verificação experimental

Após montagem do sistema acima ilustrado, foram feitas simulações, tentando reproduzir as condições iniciais já descritas, e os resultados são os ilustrados nas Figuras 6 e 7.

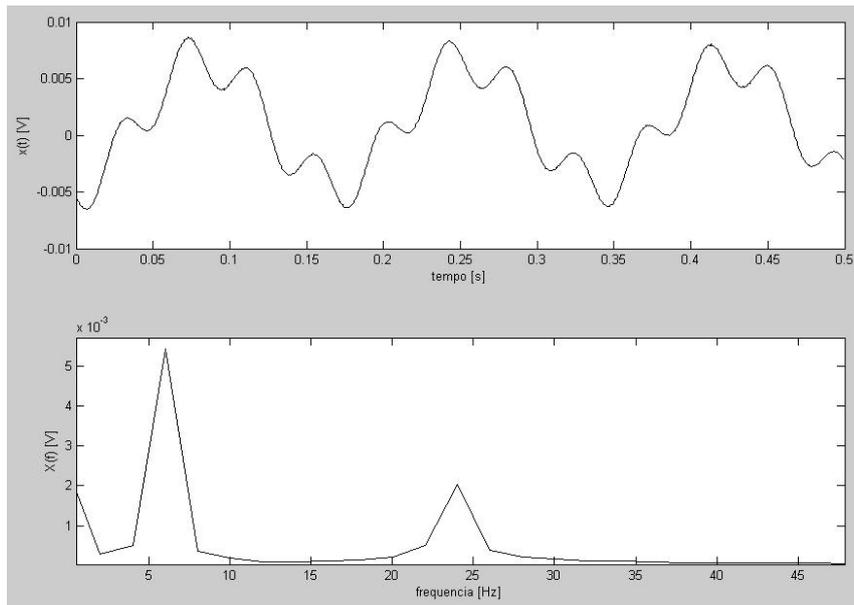


Figura 6 – Deslocamento e FFT da resposta experimental do sistema para a massa m_1

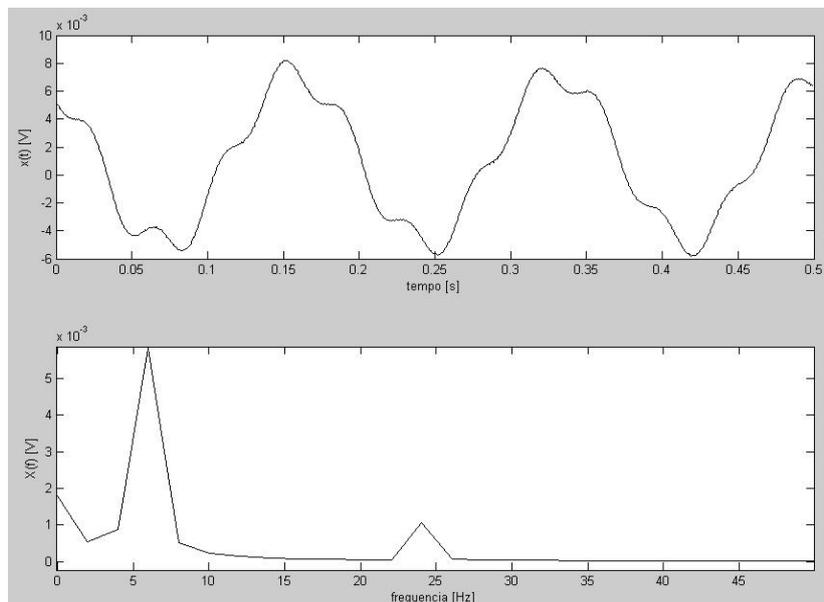


Figura 7 – Deslocamento e FFT da resposta experimental do sistema para a massa m_2

Comparando-se os deslocamentos, pode-se perceber, pela Figura 8, que:

- ⇒ Há a presença de atenuação do sinal experimental, virtude do amortecimento estrutural (Ewins(1984)), desconsiderado no modelo matemático;
- ⇒ Como a perturbação ocorre na massa m_2 , os valores para o deslocamento x_1 teórico e x_1 experimental apresentam pequena diferença, mas encontram-se na mesma ordem de grandeza;
- ⇒ Há uma pequena defasagem temporal entre o sinal da simulação numérica e o experimental, virtude de o sistema de captura de dados ser acionado manualmente, não via *trigger*, o que acarreta pequeno atraso no sinal experimental.

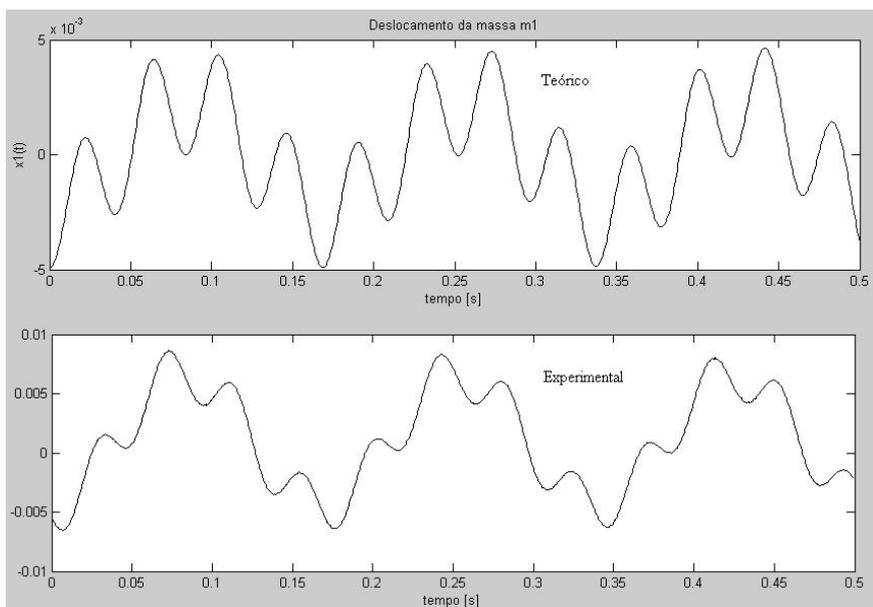


Figura 8 – Comparação entre a resposta numérica e experimental para a massa m_1

Tomando raciocínio análogo com a massa m_2 , pela Figura 9 vê-se:

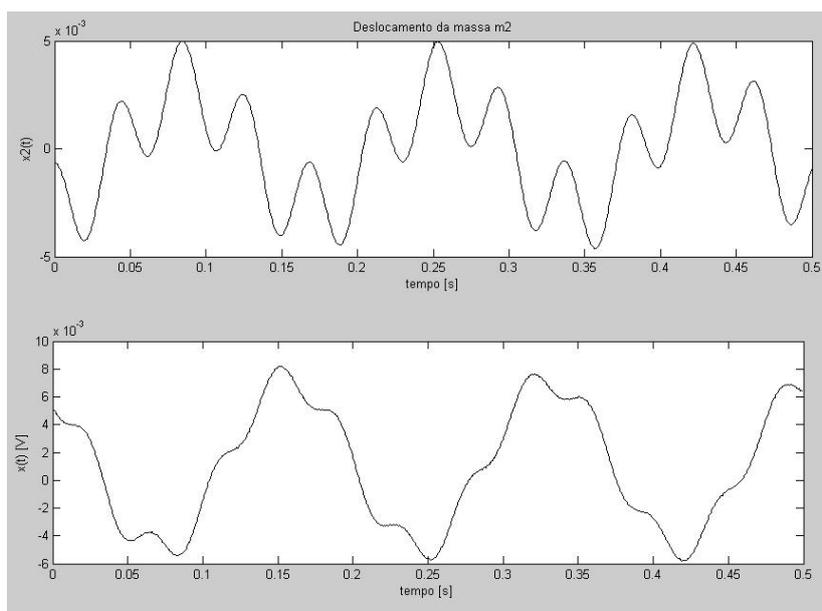


Figura 9 – Comparação entre a resposta numérica e experimental para a massa m_2

- ⇒ O sinal experimental apresenta valor maior que 5,00mm, o que é justificado pela impossibilidade de se controlar o valor exato do deslocamento imposto à massa m_2 .
- ⇒ A forma de onda apresentada experimentalmente reproduz, de maneira relativamente eficaz, o resultado numérico, descontando-se os efeitos de amortecimento presentes no sistema real e não considerados no modelo;
- ⇒ A defasagem temporal entre o sinal da simulação numérica e o experimental é evidente e já justificada no parágrafo acima.

Comparando-se as frequências obtidas numericamente e experimentalmente, percebe-se uma pequena diferença entre os valores de f_1 e f_2 numéricos em relação aos experimentais, a saber:

$$\Rightarrow f_1 \text{ numérico} = 5,83\text{Hz}; f_1 \text{ experimental} = 6,01\text{Hz};$$

$$\Rightarrow f_2 \text{ numérico} = 23,74\text{Hz}; f_2 \text{ experimental} = 24,02\text{Hz};$$

Tomando-se o valor numérico como referência, a variação percentual para f_1 é de 3,09% e para f_2 de 1,18%.

6. CONCLUSÕES

Lembrando que o presente projeto se desenvolveu sob uma peça protótipo, considera-se que os resultados acima apresentados validam o objetivo do trabalho, e, por conseguinte, do Projeto de Iniciação Científica Jr, uma vez que a verificação experimental de um modelo teórico, através da comparação com uma solução numérica, foi atingida. Já se encontra em fase final de montagem uma variação do atual sistema, composto de oito molas de deflexão em substituição às atuais quatro, que servirá como base para um projeto que envolve Absorvedores Dinâmicos de Vibração. Esta aplicação já está sendo utilizada como experiência prática na disciplina de Manutenção, donde se estuda o fenômeno de ressonância, com sensível melhora na compreensão por parte dos discentes, pois estes podem, usando os conceitos de manutenção preditiva e análise de vibrações, modelarem o sistema matematicamente e, posteriormente, verificarem experimentalmente os resultados anteriormente obtidos. Esta prática proporcional, além de novos conhecimentos, a solidificação de outros, estudados em disciplinas correlatas, principalmente as que envolvem Mecânica dos Sólidos e Elementos de Máquinas.

Em relação ao aproveitamento das bolsistas de Iniciação Científica, foi notório seu desenvolvimento, tanto acadêmico, quanto como discente. Elas foram expostas a conteúdos normalmente lecionados em cursos de graduação, e responderam positivamente a isto, mostrando-se interessadas, inclusive, em seguir a carreira de Engenharia após o curso técnico.

A avaliação do projeto consistiu na geração de dois relatórios, um parcial aos seis meses, e um final, aos doze meses de trabalho, bem como a confecção de um caderno de bordo, no qual consta as notas de aula, as configurações das montagens, valores experimentais e rotinas computacionais a serem implementadas.

Para os docentes, esta experiência foi um grande desafio, pois foi necessário fazer a tradução matemática de conteúdos de cunho intrincado para alunos que nunca haviam tido nenhuma experiência com pesquisa. Os resultados foram, ao ver dos docentes, muito satisfatórios, pois esta pesquisa terá seu prosseguimento, sendo estas alunas sérias candidatas à sua continuação.

Agradecimentos

Os autores do presente artigo agradecem ao CEFET/MG - Campus Divinópolis, pela disponibilização de material, equipamentos e laboratórios necessários à confecção deste trabalho.

REFERÊNCIAS

EWINS, D. J. **Modal testing : theory and practice**. Somerset: Research Studies, 1984. 269p. ISBN 0863800173

INMAN, Daniel J. **Engineering vibration**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, c1996. 560 ISBN 0135185319

MEIROVITCH, Leonard. **Analytical methods in vibrations**. New York: Macmillan; London: Collier Macmillan, c1967. 555p. ISBN 0023801409 : (broch.)

SHAMPINE, L. F. and M. W. REICHEL, 1997, "The MATLAB ODE Suite", SIAM Journal on Scientific Computing, v.18, pág 1–22.

MATHEMATICAL MODELLING, COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION AND BUILDING OF A TWO DEGREE OF FREEDOM MASS-SPRING SYSTEM FOR DYNAMICS STUDIES

***Abstract:** Is a global trend the use of predictive techniques for tracking faults and also control the vibration of structures such as equipment, buildings, bridges and motor vehicles, failures that are responsible for high losses in manufacturing metal-mechanical and civil construction. Therefore, it is critical knowledge of the physical mechanisms that generate these events, one of the most important physical phenomena arising from the excitement of a structure in one of its natural frequencies or values close to them. With this purpose it is intended to present the mathematical modelling, computational and experimental validation of a mass-spring system of two degrees of freedom, built in the form of bench, for verification of their natural frequencies. It will present a theoretical foundation and the methodology for calculating rates, the detailing of building bench trial, collection, processing and analysis of data for that project. This bench will be used as a applied tool to studies of phenomena relating to Vibrations, Natural Frequencies, Stiffness and Damping in the CEFET/MG – Campus V courses.*

***Key-words:** modelling, mechanical vibrations, natural frequencies, resonance.*