

# CONCEITOS E TERMINOLOGIAS DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Walnório Graça Ferreira<sup>1</sup>; Ricardo Azoubel da Mota Silveira<sup>2</sup>; Augusto Badke Neto<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centro Tecnológico - UFES, Departamento de Engenharia Civil  
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras  
CEP 29075-910 – Vitória – ES  
walnorio@gmail.com, augbadke@gmail.com

<sup>2</sup> Escola de Minas - UFOP, Departamento de Engenharia Civil  
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro, s/n  
CEP 35400 000 ,Ouro Preto, MG  
ricardo@em.ufop.br

**Resumo:** *Este artigo pretende dar embasamento conceitual ao ensino da teoria da estabilidade no âmbito dos cursos das engenharias civil e mecânica. São abordados conceitos e terminologias que são importantes serem apresentados aos estudantes de engenharia antes que entrem em contato com as informações teóricas e práticas da estabilidade de elementos comprimidos no nível da disciplina Mecânica dos Sólidos Deformáveis, correntemente chamada no Brasil de Resistência dos Materiais, que é pré-requisito para as disciplinas profissionais de Concreto Armado e Estruturas de Aço. Esses conceitos são especialmente importantes nas estruturas de aço por estas serem suscetíveis também à flambagem local, em virtude dos perfis de aço serem constituídos de paredes esbeltas. Isso é mais relevante nos perfis formados por chapas dobradas a frio, cujas espessuras podem atingir a ordem de 2 mm. Para atingir o objetivo proposto utilizou-se de simples modelos mecânicos constituídos por barras rígidas com molas rotacionais e lineares cujo estudo de estabilidade traz- em seu bojo conceitos e terminologias suficientemente gerais. Termos usados no estudo da estabilidade de estruturas complexas, como bifurcação, carga crítica, pontos limites, salto dinâmico, caminhos pós-críticos são incorporados ao estudante de maneira simples e direta.*

**Palavras-chave:** *Análise não linear, Estabilidade estrutural, Flambagem*

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos principais objetivos da engenharia estrutural é tornar as estruturas mais econômicas com a redução de peso e racionalização do processo construtivo. A redução de peso tem sido conseguida nas estruturas de concreto, pois cada vez mais se usam concretos com elevadas resistências (correntemente acima de 20 MPa), especialmente os concretos de alta resistência (com resistências acima de 50 MPa) e nas estruturas de aço, cujas resistências estão acima de 250 MPa. Isso associado ao uso de análises refinadas e computadores cada vez mais baratos e potentes têm levado a projetos arrojados com elementos estruturais cada vez mais esbeltos, tornando os elementos comprimidos suscetíveis aos efeitos dessa esbeltez, que em linguagem de engenharia estrutural significa estarem sujeitos à perda da estabilidade, que somente podem ser analisados no âmbito da *análise não linear*, também referenciada como *análise de segunda ordem*. Esse fenômeno é analisado com adequada profundidade na *teoria*

da estabilidade elástica (FERREIRA, 2004, Apêndice A). O presente trabalho tem o objetivo de apresentar conceitos e terminologias pertinentes à perda da estabilidade de sistemas estruturais, muitas vezes não abordados com adequada profundidade nos livros de mecânica dos sólidos adotados nos cursos de graduação de engenharias civil e mecânica.

A literatura correntemente trata de dois tipos de análise estrutural não linear, a saber, *análise não linear física* e *análise não linear geométrica*. A análise não linear geométrica é aquela relatada no parágrafo anterior, em que a origem está no efeito da esbelteza nos elementos comprimidos. A análise não linear física ocorre quando a relação carga  $x$  deslocamento (ou tensão  $x$  deformação) não é mais linear. Este trabalho abordará apenas a não linearidade geométrica, utilizando modelos compostos de barra rígida e mola para focar os conceitos e terminologias associados à estabilidade estrutural, no âmbito do regime elástico linear.

## 2. CONCEITO DE ESTABILIDADE

A estabilidade do equilíbrio é um conceito básico da mecânica dos corpos rígidos, que pode ser facilmente visualizado e intuitivamente assimilado por meio do problema clássico da massa esférica repousando em superfícies curvas ou retas, como ilustrado na Figura 1.

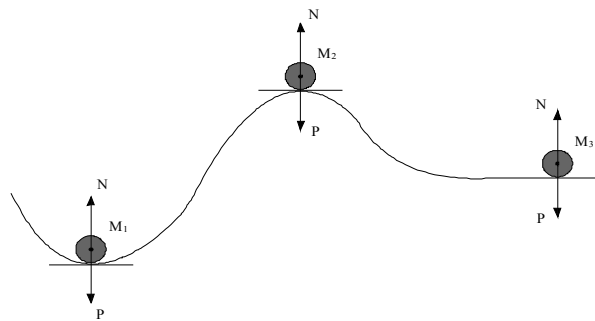


Figura 1 Massas esféricas em equilíbrio estático

Os pontos onde repousam as massas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  têm inclinação nula e representam pontos de equilíbrio estático; entretanto, o tipo de equilíbrio de cada um destes pontos é essencialmente diferente. Desse modo, se a massa  $M_1$  sofre uma *pequena perturbação* externa, quando retirada a causa da perturbação, ela volta à posição inicial de equilíbrio. Diz-se neste caso que esta posição de equilíbrio é *estável*. Na posição original ela estará em equilíbrio, já que o peso da massa  $M_1$  é equilibrado pela reação normal à superfície  $N$  ( $P = N$ ). Quando se perturba a esfera  $M_1$ , tem-se, como mostra a Figura 2(a), que a resultante das forças que agem sobre o corpo é diferente de zero e tende a trazer a esfera de volta ao fundo do vale (posição original de equilíbrio). Nota-se que neste caso há uma elevação do centro de gravidade, resultando em um aumento da energia potencial do sistema ( $\Delta\Pi > 0$ ). Com respeito à massa  $M_2$ , ao contrário do que ocorreu com a massa  $M_1$ , tem-se que o equilíbrio é *instável*, visto que, após uma pequena perturbação, a resultante das forças que agem sobre o sistema tende a fazer com que a esfera se afaste da posição original de equilíbrio, como mostra a Figura 2(b). Neste caso houve um rebaixamento do centro de gravidade e, conseqüentemente, uma diminuição da energia potencial do sistema ( $\Delta\Pi < 0$ ). No terceiro caso, quando a massa repousa sobre uma superfície plana, tem-se que o equilíbrio é *neutro* ou *indiferente*, ou seja, em qualquer posição a esfera permanece em equilíbrio. Aqui o centro de gravidade da esfera permanece no mesmo nível, não havendo, portanto, variação da energia potencial ( $\Delta\Pi = 0$ ).

$\Delta\Pi = P h > 0$	$\Delta\Pi = P h < 0$
(a)	(b)

Figura 2 Massas 1 e 2 quando sofrem pequena perturbação

Para o estudo da estabilidade estática dos sistemas estruturais, dois critérios podem ser utilizados, a saber, o *critério estático*, onde se estuda do *equilíbrio das forças* e o *critério energético*, onde se estuda a *variação da energia potencial total* quando se move o corpo da posição original de equilíbrio para uma posição em sua vizinhança.

Um interessante exemplo real de perda de estabilidade é visto quando se aplica uma carga em arco abatido, como ilustrado na Figura 3 a seguir, onde a magnitude da perturbação é importante.

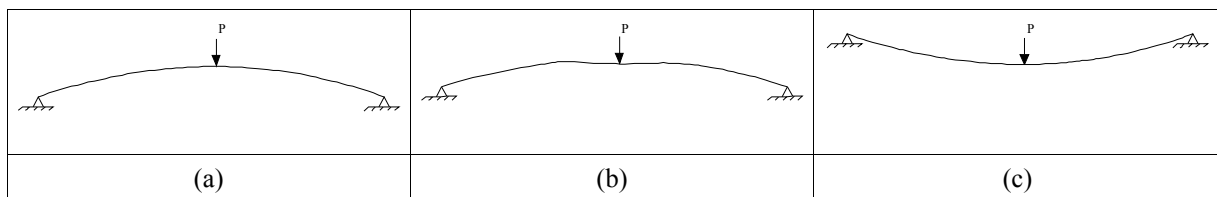


Figura 3 Exemplo de comportamento de arco abatido

Imaginando-se um comportamento elástico linear, se a magnitude das perturbações for pequena (Figura 3(b)), ao se retirar a carga  $P$ , o arco recupera sua forma inicial, porém, se a magnitude das perturbações for grande, a perda da estabilidade leva-o para a forma invertida ilustrada na Figura 3(c), não retornando para a sua configuração inicial, mesmo com a retirada da carga  $P$ . A imprensa tem registrado acidentes com arco abatidos de aço causados por esse fenômeno.

Portanto, ao se analisar um dado sistema estrutural, deve-se não só verificar se o mesmo está em equilíbrio, mas também deve-se estudar se o equilíbrio é *estável*, *instável* ou *indiferente*. Em engenharia civil, deve-se projetar as estruturas de tal modo que elas tenham equilíbrio estável. Com isso se garante que pequenas perturbações na configuração original de equilíbrio não modificarão o comportamento estrutural, isto é, após se retirar a causa da perturbação, a estrutura voltará a ter a forma e ocupar a posição especificada em projeto. Um dos problemas enfrentados pelo projetista é que, ao se modificar o sistema, incrementando-se, por exemplo, as forças externas, o equilíbrio pode mudar de *estável* para *instável*. Nesse caso diz-se que o sistema *perde a estabilidade*, sendo este processo usualmente denominado em língua portuguesa de *flambagem*. Ao valor do parâmetro que está sendo modificado,

correspondente ao ponto de mudança do equilíbrio de estável para instável, dá-se o nome de *valor crítico* (GONÇALVES, 1994).

Um ilustrativo exemplo de estabilidade é obtido pelo estudo do equilíbrio (*critério estático*) de uma barra rígida vertical, sem peso, como mostrado na Figura 4. A força vertical  $P$  aplicada em seu topo pode ser de tração (Figura 4(a)) ou de compressão (Figura 4(b)). Para se fazer o estudo da estabilidade é necessário avaliar o equilíbrio em uma *configuração ligeiramente perturbada* (Figuras 4(c) e (d)), em relação à configuração vertical original (Figuras 4(a) e (b)). Na *configuração perturbada* a força de tração  $P$  é restauradora, portanto o equilíbrio é *estável*. O momento  $P\delta$  tende a trazer a barra rígida para a configuração vertical original (Figuras 4(c)). De outra maneira, quando a força  $P$  de compressão atua na *configuração perturbada*, o momento  $P\delta$  faz com que a barra rígida se afaste cada vez mais da posição vertical original, portanto o equilíbrio é *instável* (Figuras 4(d)). Como a força  $P=0$  é a transição entre a situação *estável* e *instável*, diz-se que  $P=0$  é a *carga crítica*.

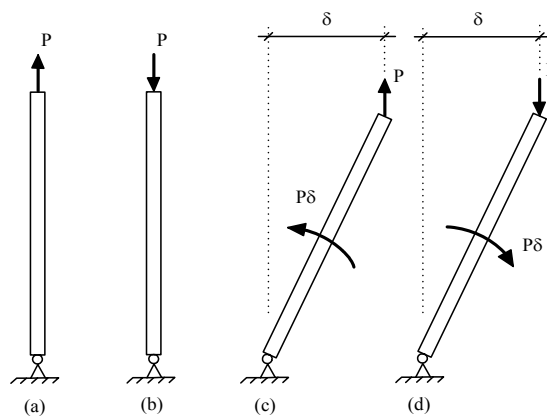


Figura 4 Equilíbrio de barra rígida vertical

Como pôde ser visto, para o estudo da estabilidade de um sistema estrutural é necessário aplicar no mesmo uma pequena perturbação com relação à configuração original e depois escolher um *critério de estabilidade*. Como enfoque didático a seguir voltam-se a falar dos critérios de estabilidade já vistos, acrescentando mais um, o *critério dinâmico*.

### 3. CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

#### 3.1 Critério estático

Estabelecem-se as equações de equilíbrio estático para o sistema sujeita a pequena perturbação em relação ao estado inicial de equilíbrio e verifica-se se as forças resultantes tendem a restaurar ou não o sistema ao seu estado inicial de equilíbrio. Se a tendência é para restituir o sistema perturbado ao seu estado inicial, diz-se que o equilíbrio é *estável*.

#### 3.2 Critério energético

Admitindo-se que o sistema é conservativo e que a *energia potencial total* é uma função contínua das coordenadas generalizadas, o sistema será *estável* se o incremento na energia potencial total devido a um campo de deslocamento adicional suficientemente pequeno e cinematicamente admissível for *positivo definido*, ou seja, a *energia potencial total* é *mínima*. O sistema será *instável* se esse incremento for negativo.

### 3.3 Critério dinâmico

O equilíbrio será considerado *estável* se as frequências naturais de vibração da estrutura sob um dado carregamento estático forem reais. Se pelo menos uma frequência natural for imaginária, o sistema será *instável*. Se uma das frequências naturais for nula, sendo todas as outras reais positivas, tem-se um *estado crítico*.

## 4. TRAJETÓRIAS OU CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

A *perda de estabilidade* é um fenômeno não linear, portanto, para se capturar, com rigor, o comportamento do sistema sob esse efeito deve-se levar a cabo uma análise não linear, embora em muitos casos, seja possível uma linearização das equações que regem o sistema em torno de uma configuração perturbada, para facilitar a análise.

Uma importante característica dos sistemas que perdem estabilidade, em relação à configuração inicial de equilíbrio, são os *grandes deslocamentos*, motivo pelo qual as premissas das análises elásticas não são mais válidas, pois baseiam-se na hipótese de *pequenos deslocamentos*, na qual a configuração de equilíbrio adotada é aquela correspondente à configuração indeformada do sistema estrutural. Com grandes deslocamentos essas premissas caem por terra.

Ao se analisar a estabilidade de um sistema estrutural tem-se um conjunto de parâmetros de controle (por exemplo, o carregamento externo) e, para se conhecer o comportamento global do sistema e identificar os possíveis fenômenos de instabilidade, deve-se estudar como as configurações de equilíbrio variam à medida que se varia cada parâmetro de controle. Obtém-se assim os chamados *caminhos* ou *trajetórias de equilíbrio*. Ao longo destes caminhos as configurações de equilíbrio podem sofrer mudanças de caráter qualitativo no que se refere à sua estabilidade. Os pontos de fronteira são denominados *pontos críticos*, que podem ser de dois tipos: *pontos de bifurcação* e *pontos limites* (GONÇALVES, 1994) (Figura 5). Pontos de bifurcação são pontos de mudança brusca na trajetória de equilíbrio. Os pontos limites podem ser de carga ou de deslocamento, correspondendo, respectivamente, a valores de máximos ou mínimos relativos de carga em torno de um ponto (valores máximos ou mínimos locais) na trajetória de equilíbrio e valores máximos ou mínimos relativos de deslocamentos em torno de um ponto (valores máximos ou mínimos locais) na trajetória de equilíbrio. Os caminhos ilustrados na Figura 5 são trajetórias não lineares de equilíbrio e estão associados a *grandes deslocamentos* dos sistemas estruturais. .

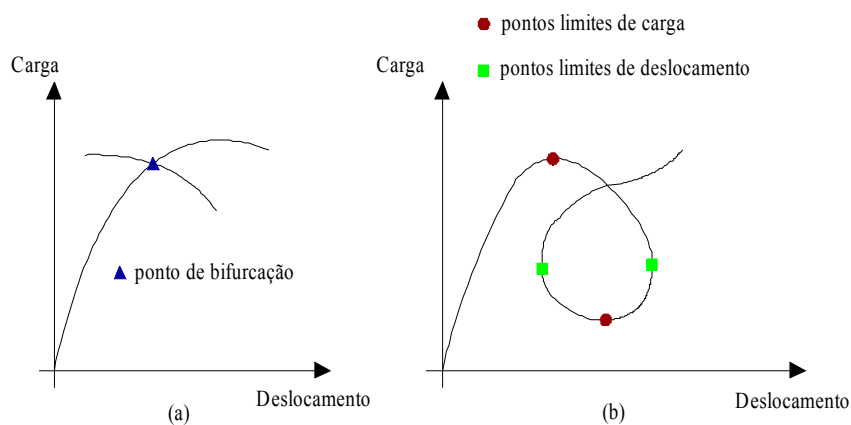


Figura 5 Pontos limites de bifurcação e de carga (SILVEIRA, 2008)

## 5. COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE SISTEMAS MECÂNICOS

Nesta seção serão apresentados sistemas mecânicos com apenas um grau de liberdade com o intuito de continuar mostrando conceitos básicos da estabilidade elástica (comportamento não linear). Todos sistemas abordados neste trabalho são compostos de barra rígida associada com molas rotacionais ou lineares, ambos com comportamento linear, ou seja, relação linear entre esforço (momento ou força) e deslocamento (rotação ou deslocamento linear).

## 5.1 Sistema com bifurcação simétrica estável

### *Análise não linear sem aproximações*

Seja o sistema composto de uma barra vertical, sem peso, com uma carga vertical  $P$  aplicada em sua extremidade superior livre e com extremidade inferior rotulada, porém com uma mola circular acoplada de rigidez torsional  $K$ , como ilustrado na Figura 6.

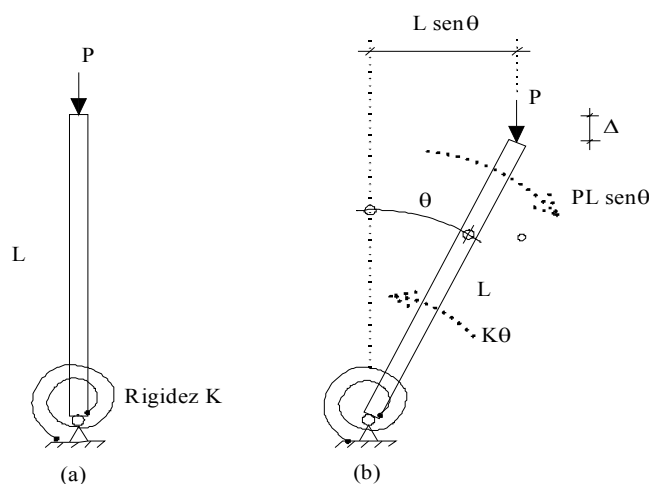


Figura 6 Barra rígida com mola circular

Se a barra estiver na vertical, o sistema estará em equilíbrio, independente do valor da carga  $P$ , sendo equilibrada pela reação  $R$  ( $R = P$ ). Entretanto, nessa situação, a mola estará livre de tensões. Para se estudar a estabilidade é necessário analisar esse sistema submetido a uma *pequena perturbação* e utilizar um dos critérios de estabilidades vistos. Percebe-se que a aplicação de *pequena perturbação* é um procedimento que sempre irá acompanhar uma análise de estabilidade. Somente com a aplicação de uma pequena perturbação consegue-se estabelecer as equações que regem o problema e obter informações mais precisas da análise, pois trata-se de comportamento não linear. A Tabela 1 apresenta resumidamente as equações pertinentes ao sistema perturbado em estudo.

Tabela 1 Energia potencial total

Energia potencial elástica da mola	Potencial da carga P	Energia potencial total
$U = 1/2 K\theta^2$	$V = -P\Delta = -PL(1 - \cos \theta)$	$\Pi = 1/2 K\theta^2 - PL(1 - \cos \theta)$

Como pode-se ver, a energia potencial total depende de  $\theta$ . Pelo critério energético de estabilidade o sistema será *estável* se a energia potencial do sistema perturbado for mínima. Nesse caso, como  $\Pi = \Pi(\theta)$ , essa condição será atendida se:

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \quad (1)$$

Essa condição também seria atendida se a energia potencial do sistema perturbado tivesse um valor máximo, porém, nesse caso, o equilíbrio resultaria *instável*. Isso será verificado adiante. Da equação (1), encontra-se:

$$K\theta - PL \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (2)$$

que fornece duas soluções:

$$\theta = 0 \quad (3)$$

barra vertical (posição original de equilíbrio). Essa solução é chamada de *solução fundamental de equilíbrio*, sendo seu gráfico nas coordenadas  $PL/K \times \theta$  chamado de *caminho fundamental* ou *primário* (Figura 7).

ou

$$P = \frac{K\theta}{L \operatorname{sen} \theta} \quad (4)$$

barra inclinada, que corresponde à condição de equilíbrio na posição de equilíbrio perturbada. Essa solução é chamada de *solução pós-crítica*, sendo seu gráfico nas coordenadas  $PL/K \times \theta$  chamado de *caminho secundário de equilíbrio* ou *caminho pós-crítico* (Figura 8). Observa-se que a equação (4) é uma função não linear de  $\theta$ , oriundo do fato do problema ser inerentemente não linear devido à geometria, em virtude disso diz-se que ocorreu *não linearidade geométrica*.

A equação (4) pode ser facilmente deduzida usando-se o critério estático de estabilidade, visto que o momento de  $P$  vale  $PL \operatorname{sen} \theta$ , o esforço na mola vale  $K\theta$ , conseqüentemente a equação de equilíbrio será  $K\theta = PL \operatorname{sen} \theta$  (equação (4)).

Percebe-se na Figura 7 que o *caminho fundamental* e o *caminho pós-crítico* se cruzam em  $PL/K = 1$  (ou  $P = K/L$ ). Esse ponto é chamado de *ponto de bifurcação* e a carga neste ponto é chamada de carga de bifurcação ou *carga crítica* ( $P = K/L$ ).

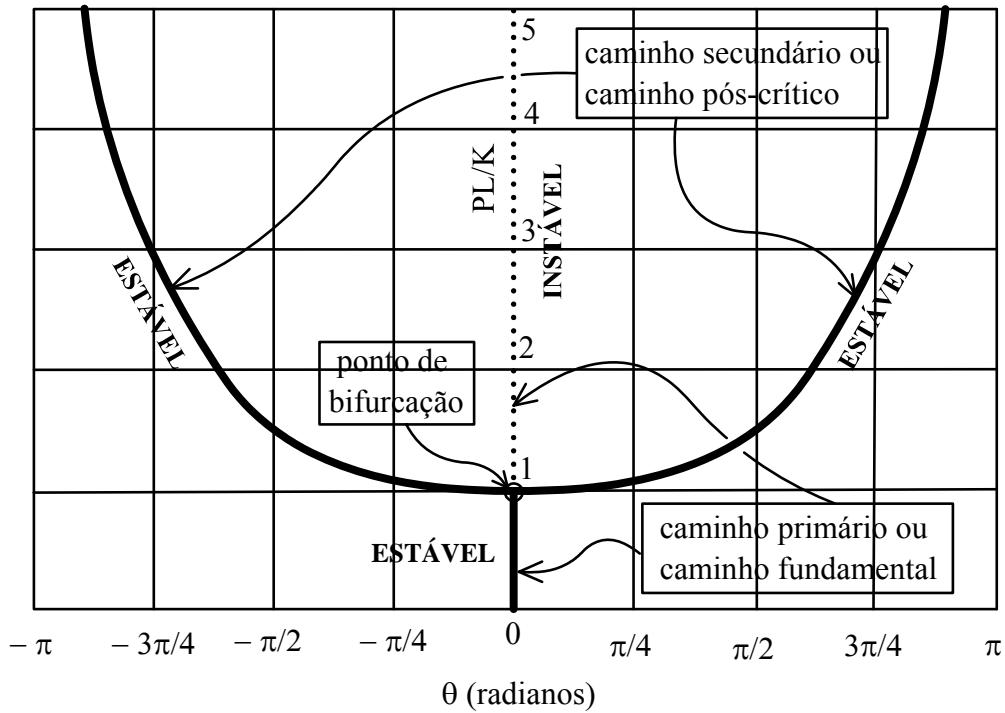


Figura 7 Trajetórias de equilíbrio do sistema da Figura 1

Para saber se as duas soluções da equação (1) representam sistema estável ou instável, será necessário verificar o sinal da segunda derivada da função  $\Pi = \Pi(\theta)$ . Essa segunda derivada vale:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = K - PL \cos \theta \quad (5)$$

Tabela 2 Estudo da estabilidade

Solução $\theta = 0$		Solução $P = K\theta/L \text{sen } \theta$
$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \right _{\theta=0} = K - PL$		$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = K(1 - \theta \cotan \theta)$
$K - PL > 0$ ou $P < K/L$	$K - PL < 0$ ou $P > K/L$	Para $\theta <  \pi $ , $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = > 0$
<i>Equilíbrio estável</i>	<i>Equilíbrio instável</i>	<i>Equilíbrio estável</i>
<i>Caminho fundamental</i> (linha vertical cheia, na Figura 7)	<i>Caminho fundamental</i> (linha vertical tracejada, na Figura 7)	<i>Caminho pós-crítico</i> (curva mostrada na Figura 7)

Do estudo da estabilidade desse sistema mecânico conclui-se que se a carga é menor do que a carga crítica ( $P < P_{cr}$ , onde  $P_{cr} = K/L$ ), o sistema é *estável* (barra na posição vertical, ou  $\theta = 0$ , *caminho fundamental*, linha vertical cheia na Figura 7), caso contrário o caminho fundamental será *instável* (barra na vertical, ou  $\theta = 0$ , linha vertical tracejada na Figura 7). Nesse caso  $P > K/L$ , a energia potencial total não é mínima e qualquer perturbação na barra vertical a levará à posição inclinada à procura de situação estável, situando-se no *caminho pós-crítico*, que é



*estável* para  $\theta < |\pi|$ . Estruturas laminares, como placas em condições específicas, podem apresentar caminhos pós-críticos estáveis com grande curvatura e cargas de colapso maiores do que a carga crítica. Esse fenômeno ocorre nos perfis formados de chapas esbeltas dobradas a frio, sendo essa reserva de resistência adicional incorporada no código brasileiro desses componentes estruturais intitulado NBR 14762 **Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio – Procedimento**.

Resta estudar a estabilidade no ponto de bifurcação quando  $P = K/L$ . Nesse caso  $\theta = 0$  e equação (5) resulta igual a zero. Avaliando-se as derivadas superiores descobre-se que a derivada terceira de  $\Pi$  é zero, em  $\theta = 0$ , e a derivada quarta vale  $PL$ , em  $\theta = 0$ . Logo, no ponto de bifurcação o sistema será *estável*. A Figura 8 mostra a representação qualitativa da energia potencial total, no gráfico  $P \times \theta$ , fazendo analogia com o conceito de estabilidade da massa esférica repousando em superfícies esféricas.

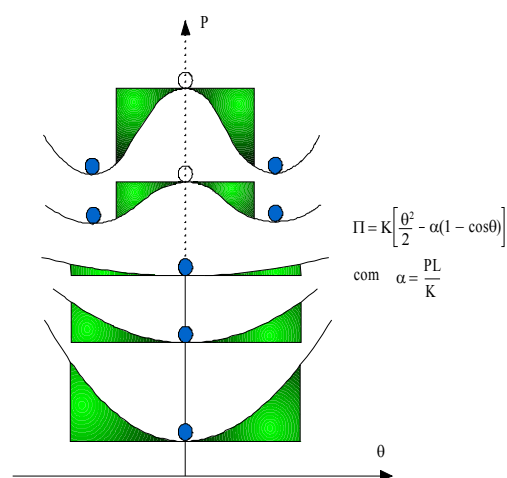


Figura 8 Variação da energia potencial total e analogia com a massa esférica

### **Análise não linear com aproximações**

A análise na seção anterior foi feita de maneira exata, sem aproximações. Agora se mostrarão os efeitos na solução quando se utiliza aproximações. Para isso faz-se a expansão em série de Taylor do cosseno, nas proximidades de  $\theta = 0$ , como a seguir:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (6)$$

Adotando-se somente os dois primeiros termos e substituindo-se na equação da energia potencial total (Tabela 1), encontra-se

$$\Pi = \frac{1}{2} K \theta^2 - \frac{1}{2} PL \theta^2 \quad (7)$$

Usando-se o critério energético da estabilidade (equação (1)), obtém-se

$$(K - PL) \theta = 0 \quad (8)$$

Essa equação fornece duas soluções,  $\theta = 0$  (caminho fundamental) e  $P = K/L$  (caminho pós-crítico), que é a carga crítica. A primeira é a mesma obtida na análise anterior, porém a segunda é bem diferente, pois representa um caminho pós-crítico independente de  $\theta$  ( $P = K/L$  para qualquer  $\theta$ ). A equação homogênea representada pela equação (8), com uma solução trivial e outra não trivial correspondente à carga crítica é matematicamente conhecida como *problema de autovalor*. A segunda derivada do potencial total vale  $K - PL$ , que para solução fundamental, fornece as mesmas informações da análise não linear anterior. Entretanto para a segunda solução da equação (8), verifica-se que a segunda derivada é nula, ou seja o *equilíbrio é neutro*. Isso sempre acontece na teoria da estabilidade, quando se usa uma solução linearizada, determina-se apenas a carga crítica, e se perdem informações sobre os caminhos pós-críticos.

### Efeito das imperfeições geométricas iniciais

Nos casos reais, as estruturas sempre vêm acompanhadas de imperfeições e não há barras perfeitamente retas, assim, uma maneira de levar em conta essas imperfeições é admitir, para o caso do modelo da Figura 6, que a barra está inicialmente com uma inclinação  $\theta_0$ , em relação à sua posição vertical, como ilustrado na Figura 9.

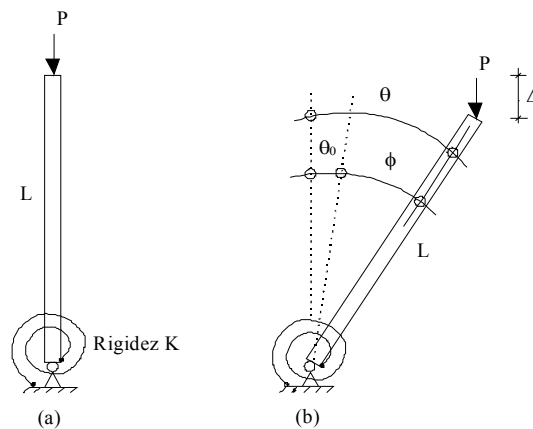


Figura 9 Sistema barra rígida sem peso com imperfeição e mola circular

Tabela 3 Energia potencial total do sistema com imperfeições

Energia potencial elástica da mola	Potencial da carga P	Energia potencial total
$U = 1/2 K\phi^2 = 1/2 K(\theta - \theta_0)^2$	$V = -P \Delta = -PL (\cos \theta_0 - \cos \theta)$	$\Pi = 1/2 K(\theta - \theta_0)^2 - PL (\cos \theta_0 - \cos \theta)$

Pelo critério energético de estabilidade o sistema estará em equilíbrio (estável, instável ou indiferente) quando a equação (1) for atendida, ou seja:

$$K(\theta - \theta_0) - PL \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (9)$$

Esta equação mostra que  $\theta = 0$ , não é mais solução do problema.

Explicitando-se  $P$  na equação (9), obtém-se

$$P = \frac{K(\theta - \theta_0)}{L \operatorname{sen}\theta} \quad (10)$$

Para se avaliar a estabilidade do sistema, entretanto, deve-se encontrar a segunda derivada de  $\Pi$ , que vale:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K - PL \cos\theta \quad (11)$$

Substituindo-se  $P$  da equação (10), na equação (11), encontra-se:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K[1 - (\theta - \theta_0) \operatorname{cotan}\theta] \quad (12)$$

Esta equação permite estudar a estabilidade dos diversos trechos dos caminhos de equilíbrio. A figura a seguir apresenta os caminhos críticos para o sistema da Figura 9.

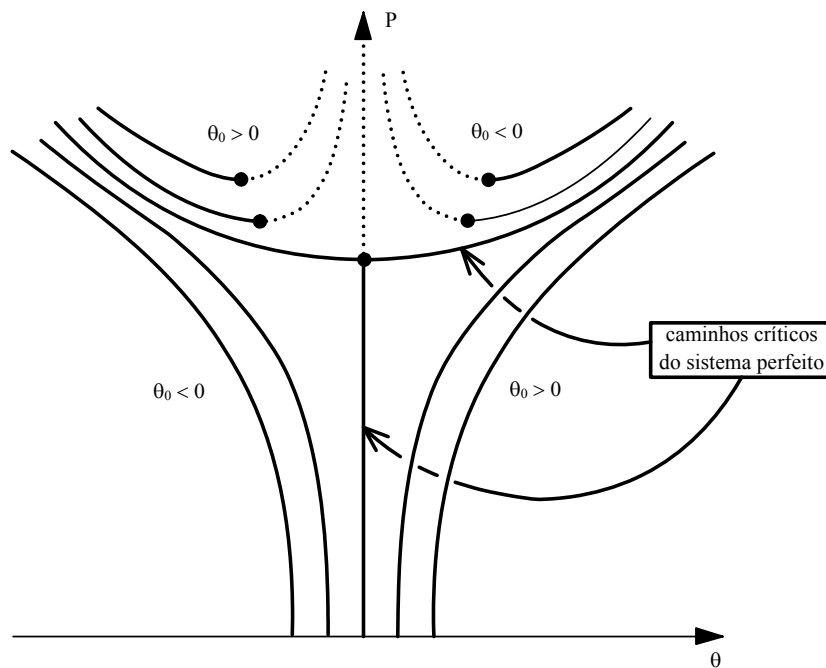


Figura 10 Solução não linear do sistema da Figura 9

A Figura 10 mostra os caminhos críticos do sistema imperfeito ilustrado na Figura 9, juntamente com aqueles do sistema perfeito ilustrado na Figura 7. Observa-se que não há mais bifurcação, as soluções não lineares do sistema imperfeito margeiam as soluções do sistema perfeito (há uma aproximação assintótica). Os caminhos acima da curva do sistema perfeito são chamados de caminhos complementares de equilíbrio e só podem ser alcançados em problemas dinâmicos (GONÇALVES, 1994). Por fim, deve-se destacar que, na engenharia civil, os pilares e as placas apresentam correntemente os caminhos de equilíbrio apresentados na Figura 10.

Nos dois exemplos anteriores apresentaram-se as equações pertinentes á energia potencial total e as equações resultantes da aplicação do critério energético de estabilidade. A seguir se apresentam outros exemplos ilustrativos de estabilidade de sistemas mecânicos, porém sem a dedução das equações, pois os procedimentos dessas deduções são análogos, não trazendo nenhuma novidade, sob o ponto de vista conceitual. Tratar-se-á nos exemplos seguintes de apresentar informações quanto a conceitos e terminologias, verdadeiro objetivo deste trabalho.

## 5.2 Sistema com bifurcação simétrica instável

A Figura 11 apresenta um sistema composto de barra vertical com carga  $P$  de compressão associado na extremidade superior a uma mola linear de rigidez  $K$ . A Figura 11(a) apresenta o sistema em seu estado inicial, e a Figura 11(b), o apresenta em estado perturbado.

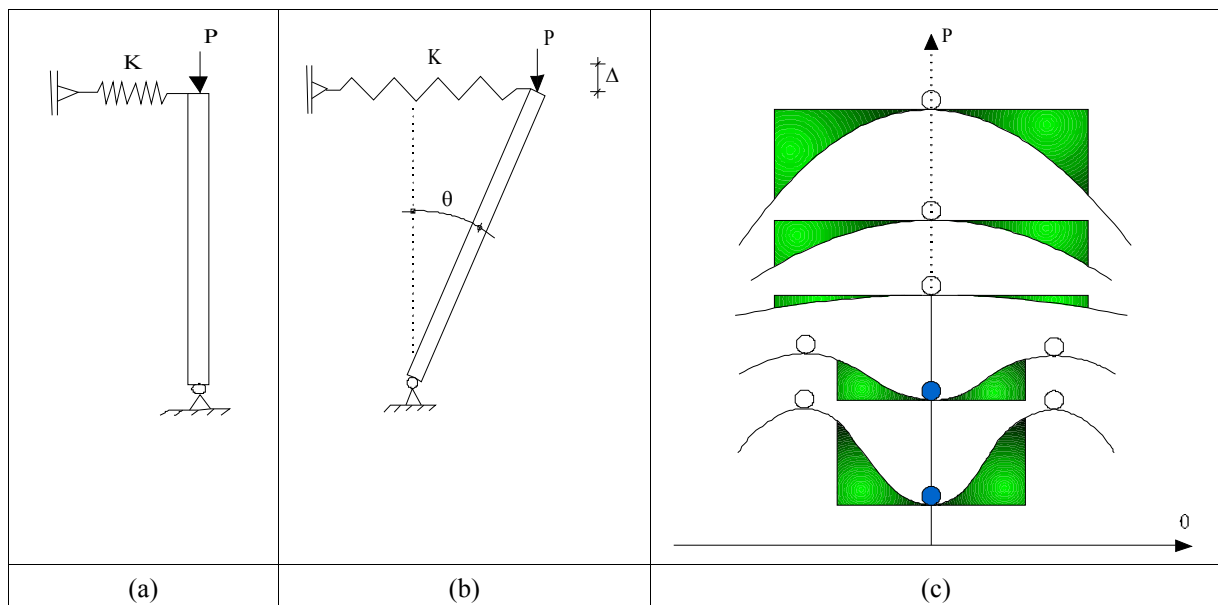


Figura 11 Barra rígida com mola linear, variação de energia potencial total e analogia com massa esférica

A análise desse sistema mostra que para  $P < KL$ , o equilíbrio é estável, porém quando  $P > KL$ , o caminho é o pós-crítico e é instável sempre (Figura 11(c)), apresentando bifurcação simétrica. Diz-se, nesse caso, que a *bifurcação é simétrica instável*.

### *Efeito das imperfeições geométricas iniciais*

As imperfeições nesse sistema são levadas em consideração de maneira análoga ao caso da barra rígida com mola circular (Figura 9). A Figura 12 abaixo mostra o seu comportamento.

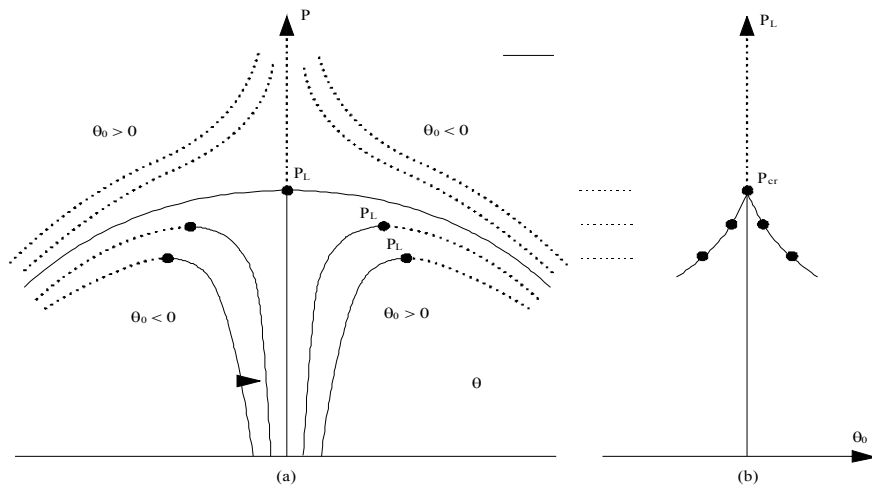


Figura 12 Solução não linear do sistema da Figura 11 com imperfeições e variação da carga limite com as imperfeições

Verifica-se, nesse sistema que, partindo-se de  $P = 0$  (quando  $\theta_0 > 0$ ), o caminho crítico se mantém estável até atingir um valor máximo, representado por  $P_L$ , a partir do qual ele se torna instável. Essa carga é chamada de *carga de flambagem* ou carga limite da estrutura imperfeita e o ponto correspondente a ela é chamado de *ponto limite* (ponto limite de carga). A partir do ponto limite há instabilidade com as deformações crescendo de forma ilimitada (Figura 12(a)). Esse processo de perda de estabilidade é chamado de *salto dinâmico*. À medida que se aumenta a imperfeição  $\theta_0$  do sistema a carga limite se torna cada vez menor (Figura 12(b)).

### 5.3 Sistema com bifurcação assimétrica

Trata-se do sistema ilustrado na Figura 13(a), composto de uma barra rígida sem peso, inicialmente vertical, com mola linear inclinada a  $45^\circ$  quando descarregada.

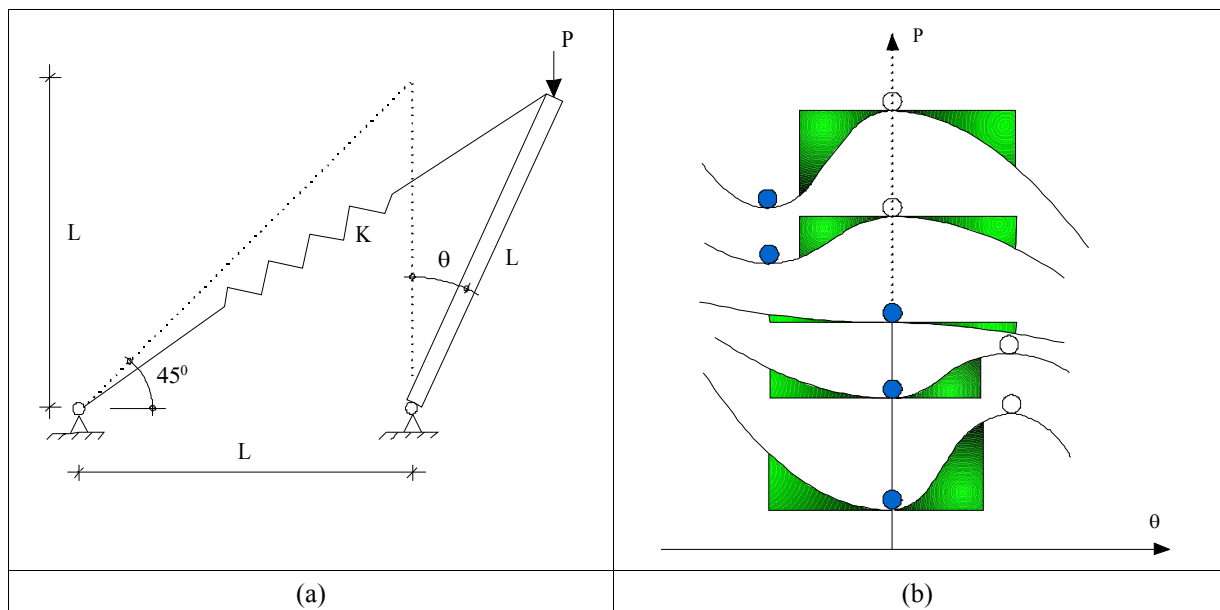


Figura 13 Sistema com bifurcação assimétrica

A Figura 13(b) apresenta o comportamento desse sistema. Perturbações negativas ( $\theta < 0$ ) levam o sistema a equilíbrio *estável*. Perturbações positivas ( $\theta > 0$ ) levam a um caminho crítico com *ponto limite*, sendo a carga limite a maior carga que o sistema pode suportar. Em engenharia civil, os pórticos planos não simétricos podem apresentar esse tipo de comportamento.

#### 5.4 Sistema sem bifurcação

Seja agora a estrutura mostrada na Figura 14(a), constituída por duas barras rígidas rotuladas entre si, com dois apoios, sendo o apoio C acoplado a uma mola linear de rigidez  $K$ . Ambas as barras quando descarregadas possuem inclinação  $\theta_0$ .

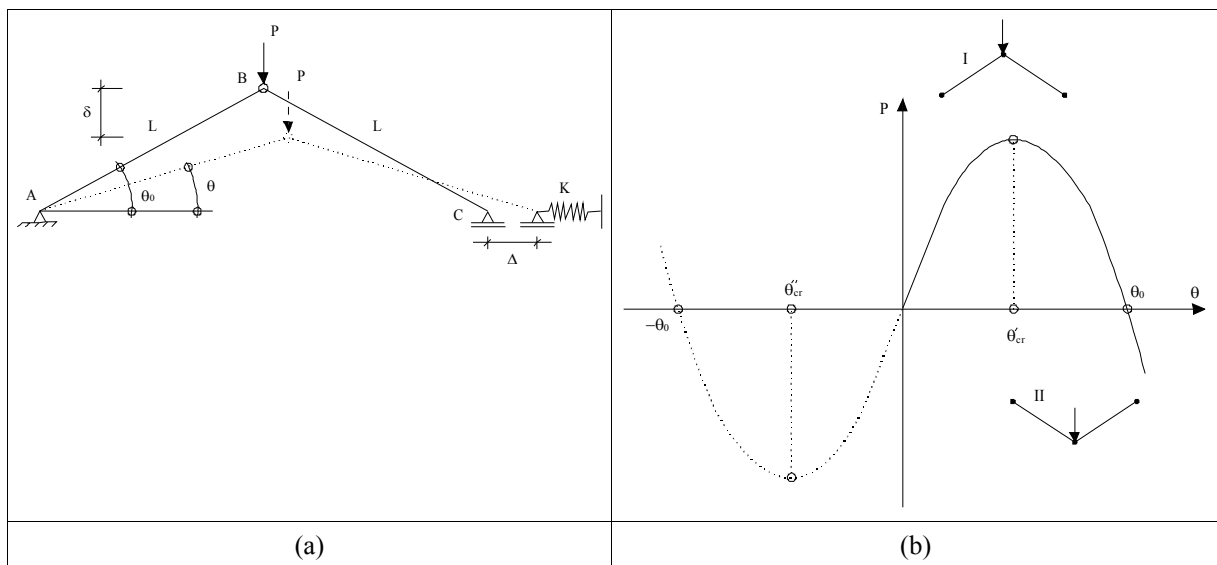


Figura 14 Sistema sem bifurcação

Serão tecidos comentários somente para  $\theta > 0$ . Ao se incrementar a carga  $P$ , a partir de zero, o ângulo  $\theta$ , que para o sistema descarregado tem valor  $\theta_0$ , vai decrescendo até que atinge o ponto crítico em  $\theta_{cr}$ . Um infinitésimo de incremento além desse valor ocorrerá uma mudança brusca na configuração do sistema, passando da configuração I, para a configuração II (Figura 14b). Essa mudança brusca de configuração é chamada de *salto dinâmico*. Na engenharia civil, arcos e cascas abatidas estão sujeitas à perda de estabilidade por saltos dinâmicos, com inversão de concavidade, similar à inversão ilustrada em I e II na Figura 14(b).

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo teve como objetivo apresentar conceitos e terminologias pertinentes à teoria da estabilidade estrutural. Para alcançá-lo utilizou-se de modelos mecânicos compostos de barras rígidas sem peso associadas a molas circulares ou lineares. Por meio do estudo da estabilidade desses modelos simples, foram abordados todos os conceitos e comportamentos de uso corrente no estudo da estabilidade de estruturas reais, como pilares, placas, pórticos planos, arcos e cascas abatidas. Esse texto é uma importante contribuição didática, nesse tema, para os estudantes, servindo também como suporte pedagógico aos professores das disciplinas básicas e profissionais dos cursos das engenharias civil e mecânica, não

familiarizados com a análise não linear geométrica. Todos os conceitos e terminologias devem ser apresentados aos alunos como introdução ao estudo da estabilidade de pilares, antes da apresentação da fórmula de Euler, na disciplina Mecânica dos Sólidos Deformáveis, que tradicionalmente no Brasil, só aborda a estabilidade global de pilares e vigas. Esses conceitos e terminologias devem ser reforçados na disciplina Estruturas de Aço, como introdução ao estudo dos elementos submetidos à compressão e flexão, especialmente quando forem abordados os perfis formados por chapas esbeltas dobradas a frio, cujas paredes apresentam acentuado comportamento pós-crítico. Sugere-se que essa abordagem seja acompanhada de animações computacionais provenientes de análises não lineares de estruturas reais e de modelos reduzidos, a serem implementados no futuro, quando então se pretende avaliar a sua eficácia.

### ***Agradecimentos***

Os autores agradecem o auxílio recebido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para a realização desse artigo. Agradecimentos também ao Prof. Paulo Batista Gonçalves da PUC-Rio pelo seu excelente texto didático sobre estabilidade estrutural.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio - Procedimento: NBR 14762**. Brasil, 2001

FERREIRA, W.G., **Dimensionamento de Elementos de Perfis de Aço Laminados e Soldados. Com Exemplos Numéricos**, Vitória: Grafer, 2004

GONÇALVES, P.B., **Notas de Aula do Curso “Introdução à Instabilidade das Estruturas”**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DEC/PUC-Rio, 1994.

SILVEIRA, R.A.M., **Notas de aula do Curso “Tópicos Avançados em Estruturas Metálicas I”**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), Deciv/EM/UFOP, 2008.

### **CONCEPTS AND TERMINOLOGIES OF THE STRUCTURAL STABILITY**

**Abstract:** *This article intends to give educational basic concepts and terminologies of the theory of structural stability in the scope of the courses of civil and mechanics engineering. These concepts and terminologies are important to be presented to the students before their first contact with the theoretical and practical information of the stability of structural elements in the Mechanics of Deformable Solids course, usually named Strength of Materials course in Brazil, which is a prerequisite for them in the professional disciplines as Reinforced Concrete and Steel Structures. These concepts are especially important in the steel structures, once these structures are susceptible to the local buckling whether the steel profiles are made of slender walls. This is more relevant in the profiles made by cold-formed steel plates, whose thicknesses can be in order of 2 mm. It was used simple mechanical models made of stiff bars and rotational or linear springs to reach the main goal of this article. The study of the equilibrium and stability of these models supplies general important concepts and terminologies. Terms used in the stability study of complex structures, as bifurcation, critical*

*load, limit point, snap-through, snap-back and dynamic jump are given to the students in a simple and straight way.*

***Key-words:*** *Nonlinear analysis, Structural stability, Buckling*