

## CAOS EM SISTEMAS NÃO-LINEARES: METODOLOGIA NUMA DISCIPLINA INTRODUTÓRIA PARA PÓS-GRADUAÇÃO

**Mário Sérgio Teixeira de Freitas** – msergio58@yahoo.com.br  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Departamento de Física  
Av. Sete de Setembro, 3165  
80230-901 – Curitiba - Paraná

***Resumo:** São expostos os passos da aplicação da metodologia que vem sendo adotada com sucesso desde 2003 no programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial (CPGEI) da UTFPR, referente à disciplina “Tópicos de Dinâmica Não-Linear e Caos”, com duração de 45 horas, que são ministradas ao longo de 12 semanas pelo autor deste trabalho, em uma das 3 fases trimestrais do programa mencionado. O conteúdo ministrado visa oferecer aos estudantes um primeiro contato com essa ciência, em termos preferencialmente qualitativos. Do total de 45 horas, 22 são aulas teóricas, envolvendo a apresentação dos conceitos fundamentais, sempre referenciados a exemplos familiares aos estudantes, e 23 são reservadas a atividades de aprendizagem efetivamente centrada no estudante, mas sempre com a assistência do professor, em um ambiente com acesso a recursos computacionais e conectado à Internet, incluindo entre estas 2 aulas de medições experimentais, realizadas com materiais de baixo custo, e 1 hora de seminário. A avaliação é realizada mediante 3 provas escritas, e também pelo acompanhamento das atividades centradas no estudante, que é focalizado na correção de 10 listas de exercícios, elaboradas especialmente para a mencionada disciplina, e propostas semanalmente aos matriculados. Também são discutidos os critérios que foram adotados para escolha de um livro-texto adequado aos objetivos do curso e à sua duração.*

***Palavras-chave:** Dinâmica não-linear, caos, pós-graduação.*

### 1 INTRODUÇÃO

A grande diversidade de comportamentos dinâmicos verificada em sistemas não-lineares tem sido objeto de extensos estudos nas últimas décadas, que se aplicam a diversas áreas da ciência e da tecnologia (STROGATZ, 1994).

Como alguns aspectos centrais dessa ciência, pode ser mencionado, por exemplo, o comportamento estatístico conhecido como “invariante de escala”, que conduz aos ditos sistemas complexos, onde interações não-lineares entre as partes proporcionam um comportamento coletivo que inclui, entre outras constatações surpreendentes, a chamada “auto-organização” (CIÊNCIA HOJE, 1992), (FLAKE, 1998). Por outro lado, modelos matemáticos de relativa simplicidade levam a comportamentos espaço-temporais com uma enorme riqueza de aspectos a serem tratados, como por exemplo as redes neurais, e autômatos celulares em geral (FLAKE, 1998), (KAPLAN & GLASS, 1995), (WOLFRAM, 2002).

Historicamente, a formulação de um conceito rigoroso para “caos” representou uma mudança de paradigma referente ao determinismo proposto por Laplace no século XIX, que

interpretava o universo inteiro como um mecanismo de relojoaria (FLAKE, 1998), (SCHUSTER, 1984). Nesse contexto, a propriedade caracterizada pela “dependência sensível às condições iniciais” levou aos diferentes métodos para controle de caos, aplicáveis a áreas tão diversas como a astronáutica, a eletrotécnica e a neurologia (SHINBROT et al., 1993), e posteriormente, ao controle de complexidade, exemplificável por um sistema mecânico (MACAU & GREBOGI, 1999).

No âmbito experimental, a confusão entre “caos” e “ruído” era, até poucas décadas atrás, justificada pelas limitações computacionais para uso de métodos numéricos que permitissem confrontar resultados obtidos em laboratório com simulações teóricas: sistemas de equações diferenciais nos quais estejam presentes termos não-lineares não admitem, em sua maioria, resolução analítica, devido à perda da integrabilidade (LICHTENBERG & LIEBERMAN, 1997). E resultados de medições que indicassem comportamento irregular eram via de regra descartados, sendo atribuídos erroneamente a imperfeições no processo de medida, que estariam introduzindo ruído externo no sistema (PEAK & FRAME, 1994).

Um recurso poderoso adotado nessa ciência é o paralelo entre o comportamento dinâmico e a estrutura de entes geométricos no espaço de fase, como por exemplo os atratores caóticos (WIGGINS, 1997).

Além da construção de modelos, a Dinâmica Não-Linear também abrange o processamento de sinais: dispendo-se da série temporal de valores de uma única variável medida, é reconstruída a dinâmica que gerou essa série, ou seja, entre outros aspectos, levanta-se quantas variáveis estão envolvidas no sistema (KAPLAN & GLASS, 1995). Nesse sentido, muitos métodos estatísticos vêm sendo desenvolvidos. Essa ciência é aplicável a qualquer área de pesquisa que envolva a evolução de variáveis inter-relacionadas por equações não-lineares; além dos casos mais conhecidos, do âmbito da física e das ciências de engenharia, podem ser igualmente citadas como exemplos a meteorologia, a ecologia, a fisiologia, a bioquímica, a economia, a astronomia, etc (STROGATZ, 1994).

Tendo em vista os aspectos gerais mencionados acima, foi idealizado um conteúdo programático para uma disciplina introdutória a essa ciência, a princípio para estudantes de pós-graduação, e extensiva a estudantes de graduação interessados, que tenham como pré-requisitos noções básicas de cálculo diferencial e integral, álgebra linear, fundamentos de métodos numéricos, vivência com recursos de informática e compreensão de textos científicos em língua inglesa.

Na seqüência, é descrita a metodologia adotada na montagem da disciplina, incluindo a distribuição do conteúdo programático, os formatos distintos dos tipos de aula, os instrumentos para avaliação, e também os critérios para seleção de um livro-texto. Ao final, são tecidos comentários sobre o aproveitamento, assim como sobre os problemas enfrentados e algumas possibilidades para minimizá-los.

## **2 ESTRUTURA METODOLÓGICA DA DISCIPLINA**

### **2.1 Distribuição do conteúdo programático**

Tendo em vista estabelecer um conteúdo programático, tópicos de maior interesse foram selecionados, de forma que a teoria pudesse ser aplicada a múltiplas linhas de pesquisa. Também foi planejado que se adotasse um único livro-texto que incluísse os itens desejados, compatível com um curso de 12 semanas. Nesse período, são totalizadas 22 horas de aula teórica, mais 23 de aprendizagem centrada no estudante. No caso, as aulas foram ministradas uma vez por semana, sempre no período da manhã, consistindo em 2 horas de apresentação da teoria, mais 2 horas extras para que os estudantes exercitassem, na presença do professor e em ambiente apropriado, as simulações computacionais, que são fundamentais em sistemas não-lineares. As aulas teóricas foram enriquecidas com freqüentes exemplos de referência, nos

quais a contextualização dos conceitos apresentados pelo professor puderam ser discutidos na seqüência pelos estudantes, ainda no espaço de aula. Com o recurso de um projetor multimídia, foram acessadas imagens gráficas de alta complexidade, assim como a demonstração de simulações computacionais durante a explanação teórica. Simultaneamente, um retroprojetor com cópias em transparência das figuras do livro-texto adotado ajudou a referenciar o texto das notas de aula. Das 23 horas de atividades de aprendizagem centrada no estudante, uma envolve um seminário ao qual os estudantes devem comparecer em horário extra-classe, e as demais são realizadas na sala especial B303, disponibilizada pelo Departamento de Eletrônica (DAELN) da UTFPR, Campus Curitiba, a qual conta com 12 microcomputadores distribuídos em bancadas compartilhadas por 2 usuários. São distribuídos instrumentos de aprendizagem impressos, elaborados especialmente para a disciplina, que desafiam o estudante a investigar um determinado sistema dinâmico, tirando conclusões sobre vários aspectos do seu comportamento, sempre remetendo a conceitos expostos em aula teórica. Não foi exigido dos estudantes o desenvolvimento de algoritmos de programação propriamente ditos, para integração numérica de equações diferenciais: optou-se por usufruir de programas já disponíveis gratuitamente na Internet, inclusive de aplicativos em Java que oferecem uma visualização direta do espaço de fase, focalizando o interesse na interpretação desses resultados em termos dinâmicos (SUN MICROSYSTEMS, 2005). Apenas exercícios modestos de programação foram propostos, como o método de Euler (FLAKE, 1998), executável numa planilha do Microsoft Excel. Uma aula destinou-se à medição experimental da dimensão fractal: foram fornecidos materiais reaproveitáveis, como papel vegetal milimetrado para levantar a dimensão do atrator de Ikeda pelo método de contagem de caixas (SCHUSTER, 1984), e também uma experiência com bolas de papel amarrado (PEAK & FRAME, 1994). Além disso, alguns materiais foram trazidos pelo professor para as exposições teóricas, com a finalidade de exemplificar fenômenos naturais que envolvem os processos matemáticos descritos, como uma espécie rara de couve-flor cujo padrão geométrico se assemelha ao espaço de parâmetros do conjunto de Mandelbrot (FLAKE, 1998), um conjunto de 4 esferas metalizadas no qual o espalhamento caótico de luz visível pode ser percebido por observação direta (SWEET et al., 1999), e uma demonstração ao vivo da formação de um padrão de fractalidade, usando gel dental vermelho e duas transparências de acetato (PEAK & FRAME, 1994).

## **2.2 Critérios para adoção de um livro-texto**

Para apoio bibliográfico de grande parte do conteúdo programático, a metodologia adota um único livro-texto, para viabilizar um ágil acompanhamento das aulas. No processo de seleção, conduzido de forma bastante sistemática, procurou-se uma publicação que atendesse aos seguintes critérios:

- a) conteúdo amplo, que abranja várias áreas de atuação dessa ciência, para que possa ser aproveitado por estudantes envolvidos em diferentes linhas de pesquisa;
- b) grau de aprofundamento compatível com a duração de um curso em 12 semanas;
- c) abordagem realmente introdutória, ou seja, que pressuponha que o leitor está tendo seu primeiro contato com a terminologia e os procedimentos adotados;
- d) descrição qualitativa dos conceitos introduzidos, que exija do estudante mais um exercício de abstração do que o domínio de um ferramental matemático avançado;
- e) fartura de ilustrações explicativas – a ciência em estudo é vinculada à topologia, o que requer um intenso exercício de visualização espacial por parte do estudante;
- f) reforço sobre sistemas espaço-temporais, como redes booleanas e autômatos celulares, por esse assunto envolver modelos adaptáveis a vários ramos da ciência;
- g) ênfase especial em análise de séries temporais, tendo em vista a necessidade de aplicação de seus diferentes métodos em uma grande diversidade de áreas de pesquisa;

h) uso abundante e diversificado de exemplos de referência.

Nesse contexto, foram analisadas cuidadosamente as seguintes alternativas:

- 1) Monteiro, L. Sistemas Dinâmicos. Livraria da Física, 2002.
- 2) Flake, G. The Computational Beauty of Nature. Bradford, 1998.
- 3) Mackey, M.; Glass, L. Dos Relógios ao Caos. Edusp 1997.
- 4) Alligood, K.; Sauer, T.; Yorke, J. Chaos – An Introduction to Dynamical Systems. Springer, 1996.
- 5) Kaplan, D.; Glass, L. Understanding Nonlinear Dynamics. Springer, 1995.
- 6) Strogatz, S.; Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Books, 1994.
- 7) Fiedler Ferrara, N. Caos – Uma Introdução. Blucher, 1994.
- 8) Peak, D.; Frame, M. Chaos under Control. Freeman, 1994.
- 9) Ott, E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge, 1993.
- 10) Schuster, H. Deterministic Chaos. Physik-Verlag, 1984.

A Tabela 1 mostra a avaliação de cada um dos itens acima, referindo-se estritamente ao atendimento das necessidades do conteúdo previsto.

Tabela 1 - Avaliação para escolha de um livro-texto adequado à metodologia prevista

item	conteúdo	aprofundamento	abordagem introdutória	abordagem qualitativa	ilustrações	redes	séries	exemplos
1	muito amplo	maior que o previsto	apropriado	mais matemática	rico	rico	razoável	rico
2	muito amplo	apropriado	apropriado	equilibrada	rico	rico	insuficiente	razoável
3	apropriado	apropriado	apropriado	menos matemática	rico	insuficiente	razoável	restrito à biologia
4	muito amplo	maior que o previsto	apropriado	mais matemática	rico	insuficiente	insuficiente	rico
5	apropriado	apropriado	apropriado	equilibrada	rico	razoável	rico	rico
6	apropriado	maior que o previsto	apropriado	mais matemática	razoável	insuficiente	insuficiente	rico
7	insuficiente	apropriado	apropriado	mais matemática	razoável	insuficiente	insuficiente	insuficiente
8	apropriado	apropriado	apropriado	menos matemática	rico	razoável	insuficiente	razoável
9	muito amplo	apropriado	apropriado	mais matemática	rico	ausente	razoável	insuficiente
10	insuficiente	apropriado	apropriado	equilibrada	razoável	ausente	rico	insuficiente

Tomando como critério a conciliação mais equilibrada entre todos os quesitos da tabela, o livro escolhido foi o de autoria de Kaplan & Glass. Com base na seqüência apresentada pelos autores, o conteúdo programático fica organizado nos seguintes capítulos:

#### 1. Equações a Diferenças Finitas (“Mapas”)

Tipos de crescimento e decaimento em mapas lineares e não-lineares; métodos de iteração; estabilidade de estados estacionários; noção de comportamento caótico; quase-periodicidade.

#### 2. Redes Booleanas e Autômatos Celulares

Elementos, funções e redes booleanas; padrões criados por autômatos celulares; meios excitáveis; algoritmos genéticos.

#### 3. Auto-Similaridade e Geometria Fractal

Fatores de escala e algoritmos recursivos; exemplos de fractais; dimensão fracionária; passeio aleatório e movimento browniano; escape; fronteiras de bacia; agregação fractal.

#### 4. Equações Diferenciais Unidimensionais

Crescimento e decaimento exponencial; análise de pontos fixos; resposta dinâmica a impulsos isolados e periódicos.

#### 5. Equações Diferenciais Bidimensionais

Soluções, trajetórias e fluxos; determinantes e autovalores; plano de fase; análise de estabilidade local; ciclos-limite; exemplos de dinâmica em três ou mais dimensões.

#### 6. Análise de Séries Temporais

Medição e tipos de ruído; função de auto-correlação; análise por espectros de potência; reconstrução de mapas e do plano de fase a partir de análise de dados; caracterização de caos.

A escolha mostrou-se acertada, tendo sido o conteúdo explorado quase integralmente.

### 2.3 Resumo da metodologia adotada

Com o propósito de explicitar melhor a metodologia descrita, neste item é apresentado um resumo dos principais aspectos que a caracterizam.

Numa etapa preliminar à primeira vez em que a disciplina foi ofertada, foi selecionado o conteúdo de interesse e foi escolhido o livro-texto. Para tanto, foram levantadas as áreas de pesquisa envolvidas no CPGEI-UTFPR, que devido à sua diversidade, exigiram uma abordagem preferencialmente conceitual, ampla, e rica em exemplos. Com base nesta abordagem, foram estabelecidos oito aspectos a serem seguidos para analisar cada um dos dez livros selecionados, conforme discriminado na Tabela 1.

Em termos operacionais, a administração do conteúdo foi adaptada ao cronograma previsto pelo CPGEI-UTFPR, sendo o curso ministrado em 12 semanas, na forma de aulas expositivas interativas de 2 horas de duração, seguidas por mais 2 horas de atividades de aprendizagem centrada no estudante. Tais atividades são conduzidas por meio de instrumentos impressos elaborados especialmente para este fim, e com assistência plena do professor. O espaço de aula dispõe de 12 bancadas com computadores e de um projetor multimídia. Simultaneamente, são referenciadas ilustrações em transparências, com o uso de um retroprojetor. Uma das atividades previstas envolve o processamento de resultados de medições experimentais. Além disso, oportunamente são levados ao ambiente de aula objetos que apresentam formações de interesse, para servirem como estímulo à aplicação e discussão dos conceitos teóricos desenvolvidos no livro-texto. Uma grande profusão de exemplos é mencionada ao longo das atividades, tomados de diversas áreas do conhecimento.

Tendo em vista caráter compacto do curso, não é cobrado do estudante o desenvolvimento de algoritmos computacionais, sendo dada preferência à utilização direta de programas interativos, disponíveis gratuitamente na Internet.

A avaliação continuada se baseia nos próprios trabalhos realizados pelos estudantes em tempo de aula, e em três provas que envolvem questões teóricas e problemas.

Todo o desenvolvimento da metodologia descrita foi idealizado a partir dos interesses da Coordenação do CPGEI-UTFPR, não tendo sido baseado em modelos pré-existentes.

### 2.4 Resultados da aplicação da metodologia

“Tópicos de Dinâmica Não-Linear e Caos” foi oferecida pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial (CPGEI) da UTFPR nos anos de 2003 (terceira fase), 2005 (terceira fase) e 2006 (segunda fase), estando, no momento da submissão deste trabalho, ofertada também para a segunda fase de 2007. A frequência média dos participantes nas aulas e atividades tem sido, em média, de 90%, e o índice de aprovação

é elevado, a grande maioria atingindo os graus A ou B nas avaliações. As aulas também costumam ser freqüentadas por profissionais não submetidos à avaliação, que já possuem título de doutor, o que faz enriquecer as discussões entre os estudantes. A implementação tem sido bem-sucedida, inclusive conduziu a uma monografia de projeto final da Engenharia Eletrotécnica, sobre caos em um circuito com diodo não-linear, (PARANÁ, 2004), e uma tese de doutoramento do próprio programa de pós-graduação, sobre modelos de tráfego em servidores web (PEDROSO, 2006), contando, respectivamente, com a orientação e a co-orientação do autor deste trabalho.

Um aspecto deve ser ressaltados quanto ao capítulo 6 (Análise de Séries Temporais). No primeiro ano em que a disciplina foi ofertada (2003), o tempo previsto para a exposição teórica foi muito restrito para que se explorasse devidamente o potencial de aplicação dos métodos descritos. Nos anos seguintes, o programa foi alterado de forma a não incluir este capítulo, tendo sido melhor distribuído o conteúdo dos capítulos restantes. Uma alternativa para sanar esse problema seria incluir este capítulo em uma disciplina de tópicos complementares a ser ofertada oportunamente, e talvez juntamente com o conteúdo do capítulo 2 (Redes Booleanas e Autômatos Celulares), que de forma alguma é pré-requisito para a compreensão dos capítulos subseqüentes, de maneira a seguir um ritmo de desenvolvimento mais didático e efetivo.

### 3 CONCLUSÃO

Desde a primeira vez em que foi aplicada no CPGEI-UTFPR, a metodologia desenvolvida para “Tópicos de Dinâmica Não-Linear e Caos” foi alvo de discussões abertas no próprio espaço de aula, nas quais os estudantes matriculados manifestaram, de maneira informal, sua aprovação quanto à eficiência em termos de aproveitamento do conteúdo. Outro indicador do êxito alcançado é o fato da disciplina receber uma procura significativa nas fases do programa em que é ofertada. O conteúdo tem sido aproveitado em projetos de pesquisa que envolvem sistemas não-lineares. Espera-se que haja continuidade desse processo, permitindo um crescente aperfeiçoamento.

#### *Agradecimentos*

O apoio do professor Heitor Silvério Lopes, do CPGEI-UTFPR, foi de fundamental importância por ocasião da implementação da disciplina na primeira vez em que foi ofertada, em 2003.

### 4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CIÊNCIA HOJE, número especial sobre CAOS, março e abril de 1992.

FLAKE, G. **The Computational Beauty of Nature**. Cambridge, Massachusetts: Bradford, 1998.

KAPLAN, D.; GLASS, L. **Understanding Nonlinear Dynamics**. New York: Springer, 1995.

LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. **Regular and Chaotic Dynamics**. New York: Springer, 1997.

MACAU, E. E. N.; GREBOGI, C. Driving trajectories in complex systems. **Physics Review E**, 59, 9, p. 4062-4070, 1999.

PARANÁ, R. F. **Dinâmica não-linear e caos em retificadores monofásicos meia-onda carga RL**. Curitiba, 88p., 2004. Monografia (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

PEAK, D.; FRAME, M. **Chaos under Control**. New York: Freeman, 1994.

PEDROSO, C. M. **Desenvolvimento de modelo de tráfego e método para melhoria de desempenho de servidores web**. Curitiba, 82 p., 2006. Tese (Doutorado) – CPGEI, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

SCHUSTER, H. **Deterministic Chaos**. Weinheim: Physik-Verlag, 1984.

SHINBROT, T.; OTT, E.; GREBOGI, C; YORKE, J. A. Using small perturbations to control chaos. **Nature**, 363, p. 411-417, 1993.

SUN MICROSYSTEMS, Software Java para Windows, 2005. Disponível para download em <[http://www.java.com/pt\\_BR/](http://www.java.com/pt_BR/)>, acesso em 22/5/2007.

STROGATZ, S. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Reading, Massachusetts: Perseus Books, 1994.

SWEET, D.; OTT, E.; YORKE, J. A. Topology in chaotic scattering. **Nature** 399, p 315-316, 1999.

WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamics and Chaos**. New York: Springer, 1997.

WOLFRAM, S. **A New Kind of Science**. Wolfram Media, Inc, 2002. Disponível na íntegra em <<http://www.wolframscience.com/nksonline/toc.html>>, acesso em 22/5/2007.

## **CHAOS IN NONLINEAR SYSTEMS: METHODOLOGY FOR AN INTRODUCTORY DISCIPLINE FOR POST-GRADUATION COURSES**

**Abstract:** *We present the steps of application of a methodology that has been successfully adopted since 2003 at the Post-Graduation Program in Electric Engineering and Industrial Informatics (CPGEI) of UTFPR, concerning the discipline “Topics on Nonlinear Dynamics and Chaos”, with duration of 45 hours, presented during 12 weeks by the author of this document, in one of the 3 trimestrial phases of the mentioned program. The presented contents aims to offer the students a first contact with this science, preferentially in qualitative terms. From the total of 45 hours, 22 are theoretical classes, involving presentation of fundamental concepts, referring always to examples that are familiar to the students, and 23 are reserved for student-centered learning activities, but always with assistance of the professor, in an environment with access to computational resources and*

*connected to the Internet, including 2 classes with experimental measurements, done with low-cost materials, and a one hour lecture. Evaluation is done by 3 written tests, and by accompanying of student-centered learning activities, focused on the marking of 10 lists of exercises, specially prepared for the mentioned discipline, and proposed once in a week to the registered students. We also discuss the adopted criteria in choosing a textbook appropriated to the course objectives and duration.*

***Key-words:*** *Nonlinear dynamics, chaos, post-graduation*