

O USO DO SOFTWARE WINPLOT NAS AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA A DISCUSSÃO DO CONCEITO DE COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE

Gisela Hernandes Gomes – giselah@mackenzie.com.br
Universidade Presbiteriana Mackenzie, Escola de Engenharia
Rua da Consolação, 930 – prédio 06
CEP 01302 – 907 – São Paulo – SP
Silmara Alexandra Silva Vicente – silmara@mackenzie.com.br

***Resumo:** Pesquisas têm sido realizadas na área de Educação Matemática apontando as dificuldades encontradas pelos alunos em compreender conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, para compor os recursos didáticos, essas pesquisas têm sido desenvolvidas com intuito de integrar novas tecnologias na área da Educação, como exemplo, softwares gráficos. De encontro com essa concepção, esse trabalho tem como objetivo descrever uma atividade realizada com alunos ingressantes do curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Esse trabalho faz uma avaliação do uso do software Winplot na disciplina citada e analisa alguns exemplos desenvolvidos por alunos com relação à importância da tecnologia como ferramenta didática no ensino de Cálculo.*

***Palavras-chave:** Cálculo, Derivada, Coeficiente Angular, Software Winplot*

1 INTRODUÇÃO

Os alunos dos cursos na área de exatas e em especial os de Engenharia apresentam dificuldades em relação aos conceitos explorados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Essas dificuldades vão desde a falta de conhecimentos elementares de matemática, como por exemplo, os apontados por Gomes, Lopes e Nieto (2005) até os de natureza epistemológica.

Essa problemática tem sido discutida em diversos congressos tanto da área de Educação Matemática como nos Congressos de Ensino de Engenharia trazendo uma reflexão da prática pedagógica na busca de elementos que permitam a compreensão dos conceitos estudados em aula e sua aplicação nas diversas modalidades. As novas tecnologias são apontadas como ferramentas complementares e exploratórias que podem contribuir para a melhora da qualidade de ensino, propiciando o aprimoramento e esclarecimento de conceitos já conhecidos, além da criação de outros.

Na perspectiva de debater o uso de novas tecnologias, em especial o *software* Winplot nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, esse trabalho tem como principal objetivo apresentar uma atividade que explora o conceito de coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função de uma variável em um ponto $P(x_0, y_0)$. Essa experiência foi realizada a fim de analisar o aprendizado dos alunos frente uma nova ferramenta de apoio, *software* Winplot, nesse artigo também será relatado como esse trabalho foi desenvolvido apresentando e discutindo alguns resultados obtidos.

2 AS NOVAS TECNOLOGIAS COMO FERRAMENTAS PEDAGÓGICAS

O avanço da tecnologia proporciona tanto aos alunos como aos professores uma maneira diferente de explorar conceitos matemáticos. No entanto é necessária uma reflexão sobre a prática pedagógica dos professores, na utilização dos ambientes de aprendizagem, para estudar e avaliar como essa tecnologia pode ser aplicada de forma construtiva para explorar o potencial do aluno e conseqüentemente agregar conhecimento.

De acordo com Dall’Anese (2006) estudos relacionados ao uso da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática, mostram que o computador é uma ferramenta que facilita a visualização de conteúdos abstratos trabalhados em sala de aula. Nesse contexto, a tecnologia é apontada como uma ferramenta promissora para a discussão e aprofundamento desses conceitos.

Importante ressaltar nessa discussão, o trabalho de Bonomi, Boscaino e Nieto (2004) que apresenta a utilização de ferramentas tecnológicas possibilitando estabelecer situações que exploram não apenas a criatividade, mas, sobretudo o senso crítico, nas quais o conhecimento construído pelos estudantes é testado, valorizado, adquirindo uma dimensão mais significativa. O uso de um *software* gráfico como o Winplot propicia ao aluno a elaboração de conjecturas a partir da observação e reflexão.

Pesquisas como a de Vicente (2005) foram realizadas tanto na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral como Álgebra Linear utilizando-se outro software, como exemplo, o MATLAB. Com essa experiência foi observado que os alunos tiveram resistência em utilizar esse software pelo fato dessas disciplinas serem lecionadas no primeiro ano da Universidade e os alunos ainda não terem tido contato com essa ferramenta. Os alunos alegaram que o software exigia um pouco mais de conhecimento a respeito para que se pudesse desenvolver algo com facilidade e rapidez. Apesar das aulas terem sido preparadas para facilitar a visualização geométrica de determinados conceitos percebeu-se que essa experiência foi válida mas que seria necessário nas disciplinas básicas inicialmente trabalhar com um software mais simples.

A escolha do *software* Winplot se deu principalmente pelo fato de já ter tido outra experiência com um *software* proprietário e da necessidade de uma ferramenta mais simples, onde o foco principal fosse de fato a aprendizagem do conteúdo trabalhado. Que o aluno não tivesse dificuldades para utilizar essa nova tecnologia e se mostrasse aberto para aprimorar seus conhecimentos e conceitos apresentados.

Segundo Jesus (2007) através do Winplot é possível trabalhar atividades que proporcionem a melhor compreensão dos conceitos básicos de Cálculo, assim como o desenvolvimento de atividades de Geometria Analítica, Integral, Limites e Derivadas.

Diversos *softwares* gráficos estão disponibilizados no mercado, tais como Matlab, Maple, Cabri-Geomètre e Logo. Entretanto muitos deles além de serem *softwares* proprietários, requerem do usuário certa habilidade em seu manuseio. Para tanto nesse trabalho foi escolhido esse *software* primeiramente por ser um *software free*, assim sendo facilita o acesso do aluno, que pode ser tanto na Universidade como, se possuir meios, em sua própria residência. Na Universidade, em um laboratório exclusivo da Escola de Engenharia, o *software* Winplot está instalado para uso dos alunos e sendo assim facilitando o acesso daqueles que não possuem computador em sua residência. Além dessa pesquisa, outras disciplinas do Curso de Engenharia realizam trabalhos com os alunos usando esse *software*.

O *software* Winplot, criado por Richard Parris da Phillips Exeter Academy por volta de 1985, é um programa de domínio público (freeware) e está disponível em sete idiomas. A versão em português foi resultado da iniciativa e empenho de Adelmo Ribeiro de Jesus. Algumas vantagens podem ser destacadas, tais como a interatividade, a fácil utilização dos menus e também o tamanho do *software* que permite ser instalado em ambiente *Windows*.

Esse *software* também foi escolhido porque possui opções de representar os gráficos bidimensionais de uma forma simples e atrativa. Os recursos que o *software* apresenta em relação aos seus parâmetros de visualização, por exemplo, traçar duas ou mais funções no mesmo gráfico com cores variadas auxilia na comparação entre situações diferentes e permite ao usuário poder verificar se a figura está condizente com os cálculos realizados teoricamente.

3 A ATIVIDADE

A atividade foi aplicada aos alunos de 1º semestre do curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie, sendo 50 alunos da turma A e 61 alunos da turma B. O objetivo da atividade foi utilizar uma ferramenta computacional no qual os alunos pudessem visualizar o gráfico de uma função e os gráficos da reta tangente e da reta normal a um determinado ponto dessa função.

Os alunos foram levados ao laboratório de informática para que pudessem conhecer o *software* Winplot e suas ferramentas antes do início da atividade. Essa aula foi dada na aula de exercícios, pois essas aulas são dadas com as turmas divididas, o que facilita a discussão de algumas questões.

Na página *web* da professora Gisela (<http://meusite.mackenzie.com.br/gielahgomes>) foi disponibilizado o *software* para que os alunos pudessem instalá-lo em sua casa e explorá-lo posteriormente.

Durante as aulas de derivadas foram solicitadas duas atividades que consistiam em encontrar a equação da reta tangente e normal a uma função em um determinado ponto. A primeira atividade estava relacionada a uma função dada na forma explícita e a segunda a uma função dada na forma implícita. Nesse trabalho são discutidos apenas os resultados obtidos nas funções dadas da forma explícita.

A atividade consistiu em cada aluno criar uma função que fosse composta por uma multiplicação ou divisão de outras duas funções, como por exemplo, $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ e também foi pedido a eles que escolhessem o ponto ao qual seria calculada a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da função dada. A escolha da função foi feita em sala, na qual a professora foi anotando uma a uma e os alunos não podiam repetir as funções uns dos

outros. A atividade deveria ser entregue uma semana após a escolha das funções e o gráfico tanto da função como das retas deveriam ser feitas no Winplot.

3.1 As dúvidas dos alunos antes da entrega da atividade

Alguns alunos ao longo da semana apresentaram certas dificuldades que foram discutidas em aula. Entre elas destacam-se:

- Dificuldade em encontrar um ponto da curva;
- Dificuldade em calcular corretamente o ponto quando a função escolhida apresentava alguma função trigonométrica;
- Dificuldade em digitar corretamente a função, principalmente se esta apresentava divisão de duas funções, exemplo $f(x) = \text{sen}(x)/(x^2 + 1)$.

Na primeira dificuldade encontrada por alguns dos alunos, não era claro que ao se escolher um valor de x pertencente ao domínio da função, eles deveriam substituir na própria função escolhida para obter sua respectiva imagem.

Para aqueles que, no entanto não tinham esse complicador, apresentavam outro problema que era o de encontrar, por exemplo, $\cos(1)$. A dúvida estava relacionada ao significado desse número 1, pois não era explícito que esse valor de ângulo estava em radianos. A discussão em aula foi interessante, pois se fez necessária uma revisão de ângulos no círculo trigonométrico e como essa alteração de graus para radianos era feita na calculadora.

Outra dúvida dos alunos estava relacionada à forma de digitar a função no *software*, pois a forma que se escreve ou fala não é a que o programa entende. Esse foi um ponto muito valioso para a discussão da lógica computacional o que auxiliou também para a disciplina de Computação.

Além dessas dificuldades apresentadas, alguns alunos também mostraram em seus questionamentos que as regras de derivação não estavam ainda tão claras.

3.2 Os resultados da atividade

Após uma semana, as atividades foram entregues pelos alunos e deveriam conter além dos gráficos, os cálculos que os levaram a digitar tais equações.

A avaliação dessa atividade feita pela professora foi tanto quantitativa como qualitativa. A tabela 1 e o gráfico 1 mostram a porcentagem de acerto, acerto parcial e erros de cada turma:

Tabela 1: Porcentagem de acertos e erros das Turmas A e B

	Correto	Parcialmente Correto	Incorreto	Não entregaram
Turma A	60%	14%	14%	12%
Turma B	52,4%	16,4%	23%	8,2%

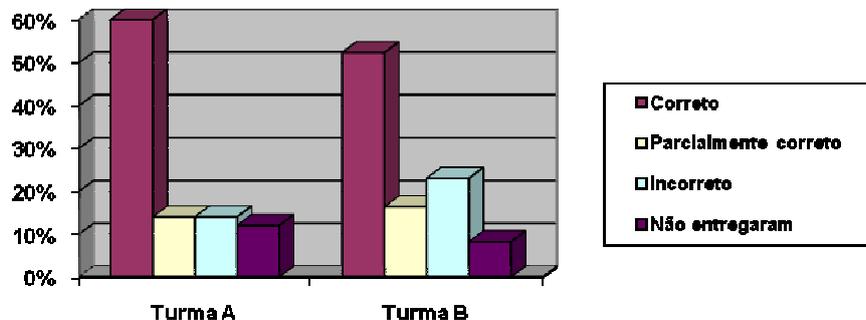


Gráfico 1: Porcentagem de acertos e erros das Turmas A e B

Observa-se que o percentual de acertos em ambas as turmas foi superior ao de erros, no entanto algumas atividades entregues foram selecionadas para reflexão por apresentarem as dificuldades encontradas pelos alunos.

As atividades que foram consideradas como parcialmente corretas, os alunos apresentaram algum erro relacionado à atividade, tais como erro no cálculo das coordenadas do ponto; da derivada; na obtenção das equações das retas ou até mesmo em relação ao gráfico.

Ao retornar as dificuldades levantadas pelos alunos antes da entrega da atividade, e comparando-as com as atividades entregues, pode se observar que algumas dúvidas de certa maneira não foram esclarecidas. A atividade entregue pelo aluno 01¹, por exemplo, mostra que ele não apresentou um ponto pertencente à função, uma vez que escolheu $x = 0$, a imagem seria $y = 0$, e não $y = 3$, como ilustrado na figura 1. A figura 1 é a atividade exatamente como o aluno entregou a professora.

$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x+2}$ (reta verde) $P(0;3)$
 $(0,0)$

Equação da reta tangente:
 $y = 1/5x - 3/2$ (reta vermelha)

Equação da reta normal:
 $y = 5x + 3$ (reta azul)

Cálculos: $y - y_0 = m(x - x_0)$ **Cálculos:** $m = 5$
 $m = f'(3)$ $y - 3 = 5(x - 0)$
 $f'(x) = \frac{x \cos x + 2 \cos x + \text{sen } x}{(x+2)^2}$ $y - 3 = 5x$
 $m = f'(3) = -1/5$ $y = 5x + 3$

Equação da reta : $y - 3 = -1/5(x - 0)$
 $y = 1/5x + 3$

¹ Os nomes dos alunos foram preservados e as atividades foram escaneadas.

Figura 1: Atividade apresentada pelo aluno 01

Ao se analisar o gráfico da função digitada pelo aluno 01, observa-se que ele provavelmente escolheu o ponto olhando o gráfico, no entanto a sua função foi digitada incorretamente, como ilustrado na figura 2, sem a utilização dos parênteses no denominador. A figura 3 ilustra o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)/(x + 2)$ digitada corretamente.

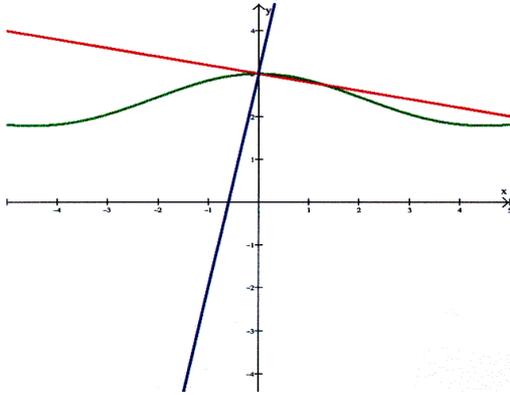


Figura 2: Gráfico feito pelo aluno 01

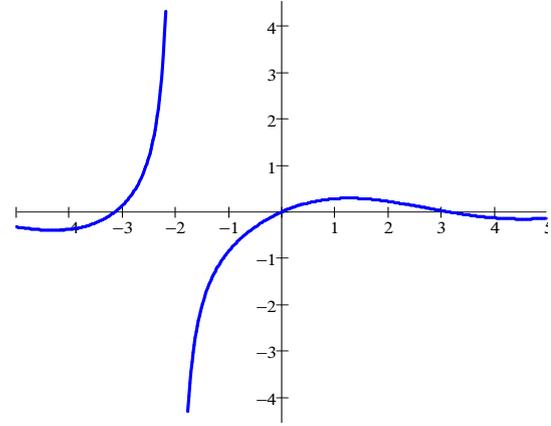


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x + 2}$

Outro exemplo interessante de ser mencionado é o do aluno 02, que errou os cálculos, mas o erro cometido foi camuflado no gráfico, como ilustrado na figura 4. A função que ele escolheu foi $f(x) = 2x.e^x$.

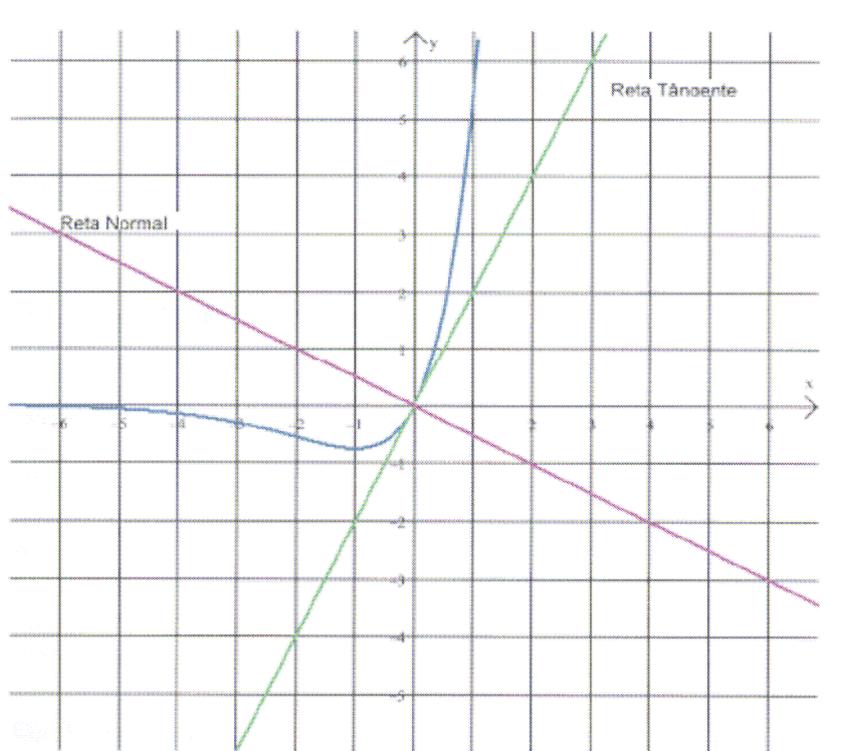


Figura 4: Gráfico da atividade do aluno 02

Em seus cálculos apresentados na figura 5, observa-se que ele não utilizou a derivada da multiplicação corretamente, pois fez o produto das derivadas. No entanto, verificou-se que nesse caso, a substituição de $x = 0$ tanto em $g(x) = 2e^x + 2xe^x$ (derivada correta de $f(x)$) como em $h(x) = 2e^x$ (derivada incorreta de $f(x)$ feita pelo aluno) levam ao mesmo coeficiente

angular da reta tangente ao ponto (0, 0). A figura 5 é a atividade exatamente como o aluno a desenvolveu e entregou a professora.

$f(x) = 2xe^x$	$P(0, 0)$	Cálculos:	Eq. Da Reta Normal:
$f(0) = 0$		$f'(x) = 2e^x$	$y = -1/2x$
Eq. Da Reta Tangente:		$m = f'(0) = 2e^0$	Cálculos:
$y = 2x$		$m = 2$	$m = -1/2$
		$y - y_0 = m(x - x_0)$	$y - y_0 = m(x - x_0)$
		$y - 0 = 2(x - 0)$	$y - 0 = -1/2(x - 0)$
		$y = 2x$	$y = -1/2x$

Figura 5: Cálculos do aluno 02

No intuito de melhor entender as dificuldades que os alunos apresentaram, após a correção da atividade pelo professor, foi entregue a eles um questionário para exporem suas dificuldades ou em que aspectos a utilização do *software* auxiliou a realização da atividade. Foram feitas as seguintes questões:

1. A atividade consistia em escolher uma função, um ponto dessa função e encontrar a equação da reta tangente e da reta normal a esse gráfico no ponto escolhido. Qual foi seu critério para escolher o ponto da função?
2. Você encontrou alguma dificuldade para realizar a atividade 01 do Winplot? Quais?
3. Você acha que o gráfico ajudou, atrapalhou ou foi indiferente para a resolução do exercício?
4. Quais as vantagens ou desvantagens que você levantaria para a resolução desse exercício com o uso do software Winplot?
5. Qual recurso do Winplot foi útil para a resolução ou visualização do exercício?

Dos alunos que entregaram a atividade e responderam ao questionário, 41 pertenciam à turma A e 50 alunos à turma B. Algumas considerações foram feitas a partir das respostas obtidas e foram classificadas da seguinte maneira:

1. Quanto à escolha do ponto
 - a. Escolha de um valor de x para a obtenção de coordenadas inteiras ou coordenadas que facilitassem os cálculos;
 - b. Escolha do ponto a partir do gráfico;
 - c. Escolha do ponto a partir da tabela do Winplot (esse recurso não foi explorado na sala de aula);
 - d. Escolha de um valor de x e substituição na função para encontrar a imagem.

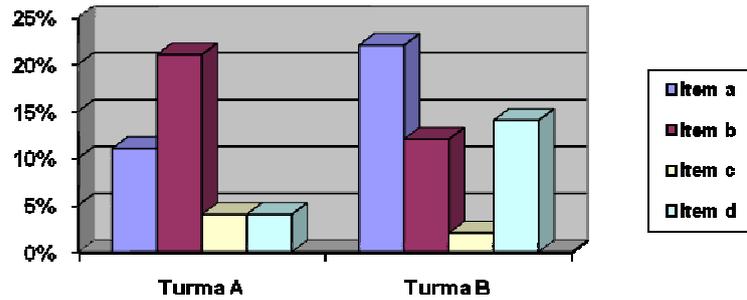


Gráfico 2: Critérios da escolha do ponto pelos alunos

O gráfico 2 ilustra os critérios adotados pelos alunos na escolha dos pontos para resolução da atividade, pode-se observar que cada turma teve um perfil diferente, embora o docente seja o mesmo. As turmas abordaram o problema de formas distintas, sendo que na turma A a maioria dos alunos escolheu os pontos através do gráfico e na turma B a maioria escolheu coordenadas que facilitassem os cálculos.

2. Quanto às dificuldades encontradas
 - a. Cálculo em radianos ao invés de graus;
 - b. Em relação ao cálculo da derivada;
 - c. Encontrar o ponto pertencente à função;
 - d. Encontrar a equação da reta normal quando o coeficiente angular da reta tangente foi igual a zero;
 - e. Em relação ao *software*;
 - f. Não encontraram dificuldades.

Nessa classificação alguns alunos colocaram mais de uma dificuldade encontrada, como ilustrado no gráfico 3.

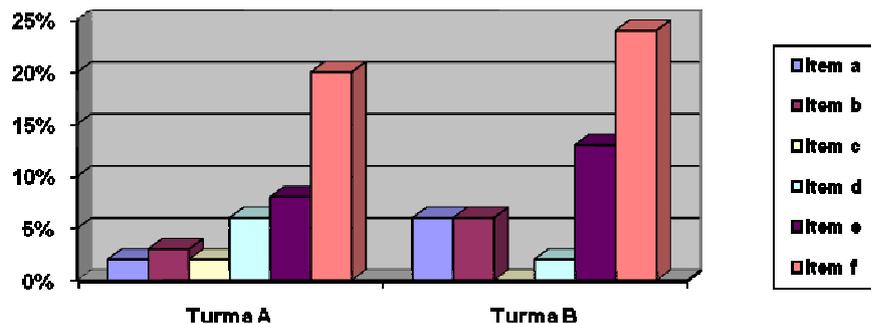


Gráfico 3: Dificuldades encontradas pelos alunos

Com relação às dificuldades encontradas pelos alunos no desenvolvimento dessa atividade é possível observar através do gráfico 3 que em ambas as turmas o percentual de alunos que não apresentaram problemas foi superior as demais respostas dadas. Esses dados apontam o quanto os alunos estão preparados para novos desafios. No entanto a turma B apresentou uma porcentagem um pouco maior em relação a turma A com respeito às dificuldades com o *software*, isso é um indicador de que ainda há necessidade de se desenvolver mais atividades usando novas tecnologias.

3. Quanto às vantagens e desvantagens do *software* para a resolução do exercício
 - a. Vantagem na visualização para comprovação dos cálculos;
 - b. Vantagem em achar o ponto para traçar a reta tangente e normal;
 - c. Menor esforço e maior rapidez para esboço do gráfico;
 - d. Indiferente.

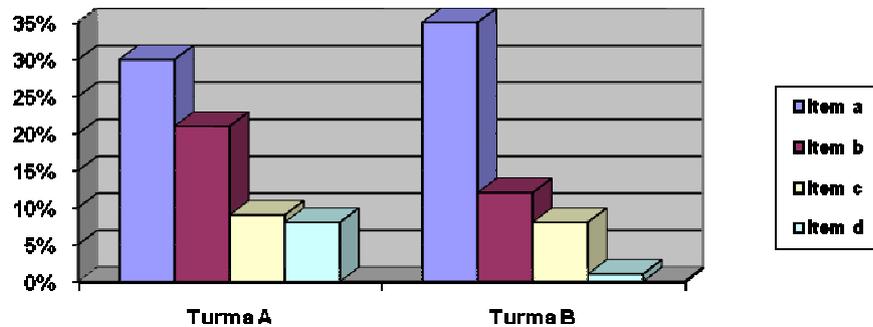


Gráfico 4: Vantagens e Desvantagens encontradas pelos alunos

Nesse quesito, a grande maioria dos alunos concluiu que o uso de uma ferramenta computacional de certa maneira auxilia ou facilita a visualização gráfica e conseqüentemente a verificação de seus cálculos.

Os resultados apresentados nesse artigo são em relação à atividade desenvolvida nesse semestre com duas turmas específicas. A avaliação realizada dos resultados obtidos enfatiza a abordagem do conceito trabalhado em sala de aula e o comportamento do aluno frente uma nova tecnologia para auxiliar no entendimento e compreensão desse conceito; ainda que esse trabalho retrate o início de uma pesquisa de novas tecnologias nas disciplinas básicas dentro do curso de Engenharia nesta Universidade. O grande motivador dessa pesquisa é desenvolver um trabalho contínuo não somente nas disciplinas básicas, mas em todas as outras disciplinas de cálculo do curso além de, estudar a possibilidade de utilizar outros *softwares* para desenvolver novas atividades.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do desenvolvimento desse trabalho pode-se avaliar a importância do uso de novas tecnologias no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Os resultados discutidos mostram o quanto foi relevante para os alunos a visualização do gráfico da função e das retas tangente e normal em comparação com os cálculos realizados.

No entanto, cabe salientar que o aluno precisa ter senso crítico ao usar as tecnologias disponíveis, pois elas não resolvem o problema, mas sim reproduzem, no caso do Winplot, o gráfico da função digitada. Nesse contexto, não se pode afirmar que o gráfico obtido corresponde à função escolhida na atividade, pois qualquer alteração nas regras de digitação impostas pela lógica de programação pode implicar em um resultado inadequado.

Ainda diante das análises dessa atividade, é necessário ressaltar que o professor deve estar atento às peculiaridades de cada tecnologia e propiciar atividades que levem o aluno a perceber que é necessário conhecer os conceitos desenvolvidos em aula, pois a tecnologia por si só não é capaz de resolver problemas.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONOMI (Barufi), M.C.; BOSCAINO, E. G.; NIETO, S. S. **A tecnologia no ensino da Matemática no Curso de Engenharia: não apenas como ferramenta de execução, mas de investigação.** In: XXXII COBENGE, Brasília. Anais do XXXII COBENGE 2004. Brasília: Universidade de Brasília, 2004.

DALL'ANESE, C. **Visual e Analítico: Argumentos e Metáforas para a Taxa de Variação.** In: III HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, São Paulo. Anais do III HTEM. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

GOMES, G. H. ; NIETO, S. S.; LOPES, C. M. C. **Um projeto de experiência pedagógica com calouros nos cursos de Engenharia.** In: III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2005.

JESUS, A. R. de; SANTOS, M. M. G., MASCARENHAS, M.F. **Visualizando Funções com o Winplot.** Disponível em: <<http://www.sbm.org.br/bienal/>> Acesso em: 23/05/2007.

VICENTE, S. A. S. ; GOMES, G. H. . **O Uso do Software Matlab nas Disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear.** In: III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005, Canoas - Rio Grande do Sul. III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005.

THE USE OF WINPLOT SOFTWARE IN CALCULUS DIFFERENTIAL FOR THE DISCUSSION OF THE CONCEPT OF THE SLOPE OF TANGENT LINE

Abstract: *Researches have been done in the Mathematical Education Area and they point the difficulties of the students in understanding concepts of Calculus Differential and Integral. The main subject of these researches is to integrate new technologies in Education Area, as example, graphical software. In agreement with this conception, this paper has as objective to describe an activity with students of first semester of Civil Engineering Course of the University Presbyterian Mackenzie in the discipline of Calculus Differential and Integral I. It makes an evaluation of the use of Winplot software in discipline cited and analyzes some examples developed for the students to prove the importance of the technology as didactic tool in the education of Calculus.*

Key-words: *Calculus, Derivative, Slope, Winplot Software*