

O NÚMERO COMPLEXO E SEU USO NA ENGENHARIA ESTRUTURAL

Walnório G. Ferreira – walgraf@npd.ufes.br

Rodrigo S. Camargo – rodrigo_camargo2000@yahoo.com

Antonio M. Frasson – frasson@npd.ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil

Av. Fernando Ferrari, 514 – Goiabeiras

29075-910 – Vitória - ES

Webe J. Mansur – webe@coc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

Ilha do Fundão – Rio de Janeiro – RJ

***Resumo:** O presente artigo tem o objetivo de apresentar o uso do número complexo aos estudantes de engenharia civil. Inicia-se com a história do número complexo, a origem da equação de Euler, e resolve-se a equação de movimento de um sistema massa-mola com um grau de liberdade, dotado de amortecimento viscoso, utilizando-se números complexos, o que torna a equação diferencial em uma equação algébrica. É uma abordagem didática, que visa despertar o interesse dos alunos de engenharia civil pelos números complexos. Finalmente, aplica-se a presente formulação a um caso prático da engenharia estrutural.*

***Palavras-chave:** Números complexos, dinâmica estrutural, ensino na engenharia.*

1 INTRODUÇÃO

A referência mais antiga a raízes quadradas de números negativos talvez tenha ocorrido no trabalho do matemático grego e inventor Heron de Alexandria, no século 1 D.C., quando ele considerou volumes de troncos de pirâmide impossíveis (BHATTI, 2007).

Números complexos entraram em maior evidência no século 16, quando fórmulas fechadas para as raízes de polinômios de terceiro e quarto grau foram descobertas por matemáticos italianos, como Niccolo Tartaglia e Gerolamo Cardano (O'CONNOR & ROBERTSON, 2007). Rapidamente se percebeu que essas fórmulas, mesmo que se usadas para soluções reais, por vezes requeriam a manipulação de raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, a fórmula cúbica de Tartaglia dá a seguinte solução para a equação $x^3 - x = 0$: (O'CONNOR & ROBERTSON, 2007)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{-1}^{1/3} + \frac{1}{\sqrt{-1}^{1/3}} \right)$$

À primeira vista, isso parecia sem sentido, pois envolvia encontrar as raízes cúbicas de um número dado pela raiz quadrada de -1 . Entretanto, cálculos formais mostram que essas raízes (soluções da equação $z^3 = i$) são $-i$, $(i + \sqrt{3})/2$ e $(i - \sqrt{3})/2$, que, substituídas na solução de Tartaglia, resultam em 0 , 1 e -1 , que são as soluções de $x^3 - x = 0$.

Isso tudo não era completamente compreendido, uma vez que nem mesmo números negativos tinham sustentação sólida naquela época. O termo "imaginário" foi criado por René Descartes em 1637, e tinha a intenção de significar "derrogatório". Uma outra fonte de confusão era a equação $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, que na época, parecia inconsistente com a identidade algébrica $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que, como se sabe hoje, é válida para a e b reais positivos. O uso incorreto dessa equação é creditado até mesmo a Euler. Essa dificuldade levou à convenção de usar o símbolo especial i em lugar de $\sqrt{-1}$.

No século 18, Abraham de Moivre e Leonhard Euler desenvolveram seus trabalhos. A De Moivre (1730) é atribuída a fórmula que leva seu nome, a fórmula de De Moivre (O'CONNOR & ROBERTSON, 2007):

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

e a Euler (1748), a fórmula de Euler (WEISSTEIN, 2007), da análise complexa:

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta}$$

A existência de números complexos não foi completamente aceita até a interpretação geométrica ter sido descrita por Caspar Wessel (O'CONNOR & ROBERTSON, 2007), em 1799; ela foi redescoberta e popularizada muitos anos depois por Carl Friedrich Gauss, e graças a isso, a teoria dos números complexos recebeu uma notável expansão. Entre os que se aprofundaram na teoria moderna, estão Möbius, Dirichlet, Klein, Weierstrass, Schwarz, Richard Dedekind e Henri Poincaré.

2 SÉRIE DE TAYLOR

A série de Taylor é, de forma simplificada, um tipo de soma infinita capaz de aproximar uma dada função $f(x)$ na vizinhança de um ponto $x = a$, definida por:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por exemplo, o desenvolvimento da série de Taylor das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ na vizinhança de $a = 0$ são:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (1)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (2)$$

Na Figura 1 pode-se ver como a série de Taylor da função $f(x) = \text{sen } x$ se torna cada vez mais próxima da função exata, conforme o número de termos é aumentado, tanto para o desenvolvimento na vizinhança do ponto (a) $a=0$ e (b) $a=7\pi/2$. Escolhe-se convenientemente o valor de a conforme o desenvolvimento da série que se deseja encontrar.

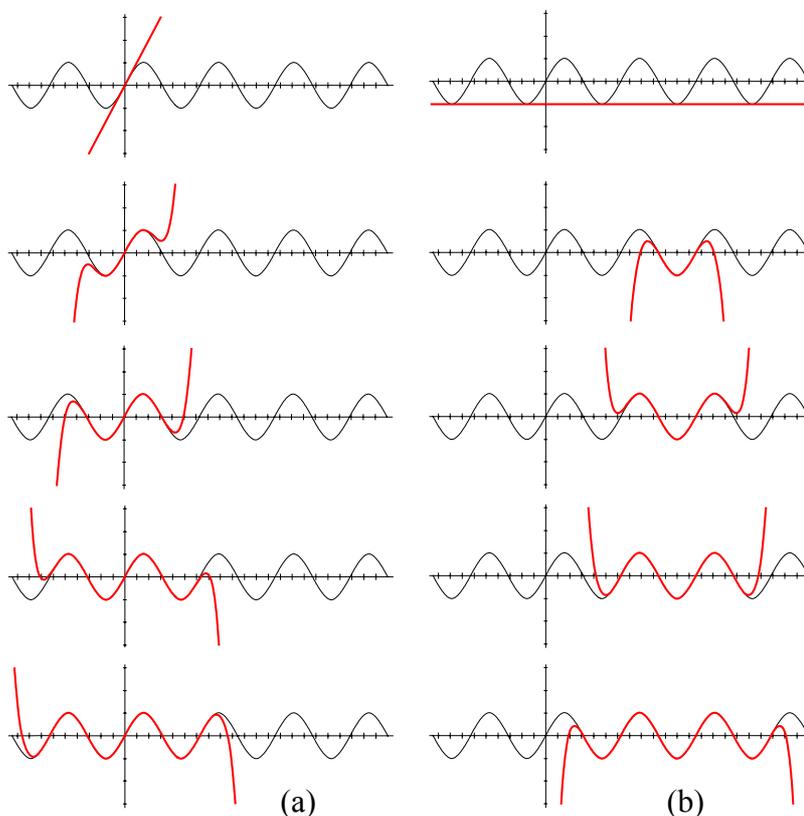


Figura 1. Séries de Taylor para a função $f(x) = \text{sen } x$ com, de cima para baixo, 2, 5, 10, 15 e 20 termos, na vizinhança de (a) $a=0$ e (b) $a=7\pi/2$.

3 EQUAÇÃO DE EULER

Pode-se usar séries de Taylor também para encontrar aproximações de funções que envolvem números complexos, lançando mão de suas propriedades. Uma vez que $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ e $i^{4n+3} = -i$, onde n é inteiro, temos que os desenvolvimentos da função $f(x) = e^{ix}$ é:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{10}}{10!} - i \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (3)$$

Analisando-se os termos com potências pares de x , vê-se que são os mesmos do desenvolvimento da Equação (2). Da mesma forma, os termos com potências ímpares de x são os mesmos da Equação (1), porém, multiplicados por i . Portanto, a partir daí, somando-se as Equações (1) e (2), e trocando a variável x pela mais comumente usada θ , chega-se a:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta \quad (4)$$

A Equação (4) é a chamada equação de Euler.

Rotação de vetores em torno da origem no plano complexo

Números complexos são análogos a vetores quando dispostos no plano complexo, em que o eixo das abscissas representa a parte real do número, e o eixo das ordenadas, a parte imaginária. Um dos usos da equação de Euler é o de que um número complexo $a + bi$, quando multiplicado por $e^{i\theta}$, tem como resultado um número complexo que é, no plano complexo, a rotação de um ângulo θ do vetor que representa $a + bi$.

Isso pode ser verificado observando o efeito individual da multiplicação de cada “componente” do vetor $a + bi$ por $e^{i\theta}$, ou seja:

$$a e^{i\theta} = a \cos \theta + ai \sin \theta \quad (5)$$

$$bi e^{i\theta} = bi \cos \theta - b \sin \theta \quad (6)$$

As Figuras 2 (a) e 2 (b) ilustram as Equações (5) e (6), mostrando os vetores originais e os vetores resultantes das multiplicações destes por $e^{i\theta}$. Assim, fica claro ver que o número complexo $a + bi$, também será rotacionado de um ângulo θ em relação à origem, quando multiplicado por $e^{i\theta}$. Isso é mostrado na Figura 2 (c).

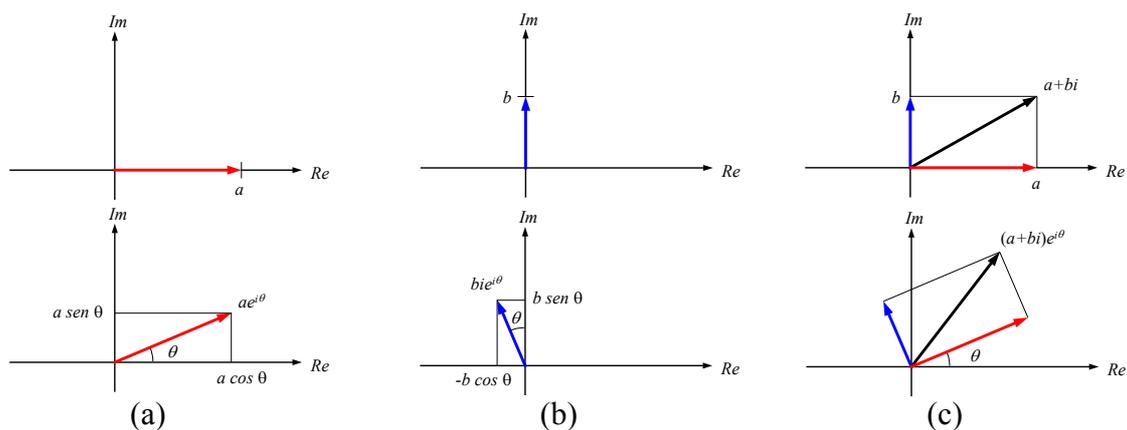


Figura 2. Rotações de vetores em torno da origem no plano complexo causadas pela multiplicação destes por $e^{i\theta}$.

4 RESPOSTA DE UM SISTEMA ESTRUTURAL A CARGA HARMÔNICA

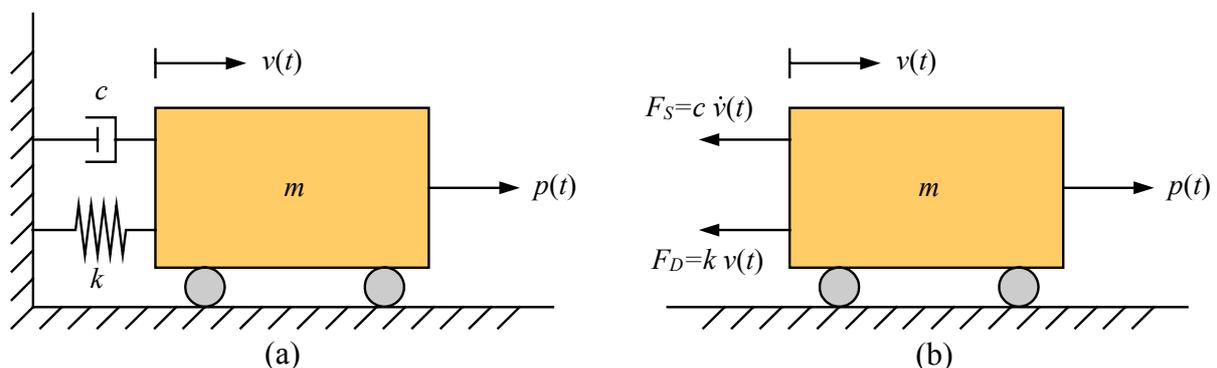


Figura 3. Representação de um sistema massa-mola com amortecimento.

Considera-se um sistema estrutural qualquer (tal como uma ponte, uma caixa d'água, ou um edifício) submetido a um carregamento dinâmico, ou seja, variável no tempo. O sistema pode ser representado por uma massa m , e a rigidez e o amortecimento da estrutura podem ser representados pela constante elástica k e pela constante de amortecimento viscoso c . Esse modelo está representado na Figura 3, onde se pode verificar, no diagrama de corpo livre do sistema, as forças que nele atuam. A partir da soma das forças que atuam no sistema, chega-se a:

$$mv(t) + c\dot{v}(t) + k\ddot{v}(t) = p(t)$$

Onde $v(t)$ é a *resposta dinâmica* do sistema ao carregamento $p(t)$, ou seja, é a função que representa o deslocamento do sistema massa-mola que representa a estrutura, em função do tempo. Supondo-se que o carregamento $p(t)$ é *harmônico*, ou seja, tem variação cossenoidal, temos:

$$p(t) = P_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

P_0 é a amplitude máxima da carga, ω é a frequência angular da carga e φ é a fase da carga, que permite que a mesma inicie sua atuação com um valor diferente do seu valor máximo. Com o uso da identidade de Euler, temos:

$$e^{i(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad e^{-i(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) - i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Equações estas, que, depois de multiplicadas por P_0 , somadas e rearrumadas, levam a:

$$p(t) = \frac{1}{2} \{ P_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} + P_0 e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \}$$

Definindo $P = P_0 e^{i\varphi}$ e seu conjugado complexo $P^* = P_0 e^{-i\varphi}$, teremos, portanto:

$$p(t) = \frac{1}{2} \{ P e^{i\omega t} + P^* e^{-i\omega t} \} \quad (8)$$

Para uma carga variando de forma cossenoidal, e sendo o sistema linear, a resposta $v(t)$ será também cossenoidal. Entretanto, a resposta não estará necessariamente em fase com o carregamento, devido à atuação do amortecimento sobre o sistema. Isso significa que, enquanto a carga atua na estrutura, seu deslocamento máximo não ocorre sincronizadamente com o valor máximo do carregamento, e sim, um pouco atrasado. Pode-se assumir, portanto, que a resposta tem a forma:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (9)$$

Onde V_0 é a amplitude máxima do deslocamento sofrido pelo sistema e θ é a fase da resposta, que é diferente da fase do carregamento, que é φ . O objetivo é determinar a resposta do sistema, ou seja, determinar os valores de V_0 e θ .

Aplicando transformações análogas às aplicadas à carga, pode-se reescrever a resposta:

$$v(t) = \frac{1}{2} \{ V_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} + V_0 e^{-i\theta} e^{-i\omega t} \} = \frac{1}{2} \{ V e^{i\omega t} + V^* e^{-i\omega t} \} \quad (10)$$

Onde define-se $V = V_0 e^{i\theta}$ e seu conjugado complexo $V^* = V_0 e^{-i\theta}$.

Seja agora a tarefa de encontrar o valor de $v(t)$. Para isso, imagina-se, inicialmente, a primeira parcela da Equação (8) atuando como uma “carga complexa” no sistema, ou seja, $p_1(t) = P e^{i\omega t}$. Como o sistema é linear, fica claro que a resposta a essa carga será dada pela primeira parcela da Equação (10), e será da forma $v_1(t) = V e^{i\omega t}$. Sabendo-se que:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \frac{d}{dt} (V e^{i\omega t}) = i\omega V e^{i\omega t} \\ \ddot{v}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} (V e^{i\omega t}) = -\omega^2 V e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Então a substituição na Equação (7) resulta em:

$$-\omega^2 m V e^{i\omega t} + i\omega c V e^{i\omega t} + k V e^{i\omega t} = P e^{i\omega t}$$

Ou:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)V = P$$

Que é uma equação algébrica, e assim:

$$V = \frac{P}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (11)$$

Agora deve-se lançar mão de um artifício que envolve a rotação de um vetor no plano complexo, com o uso da equação de Euler, para simplificar o denominador $-\omega^2 m + i\omega c + k$. A Figura 4 (a) mostra o vetor correspondente a esse número complexo, no plano complexo. Pode-se afirmar que seu módulo é igual a:

$$\rho = \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$$

E que o ângulo que este faz com o eixo real é igual a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)$$

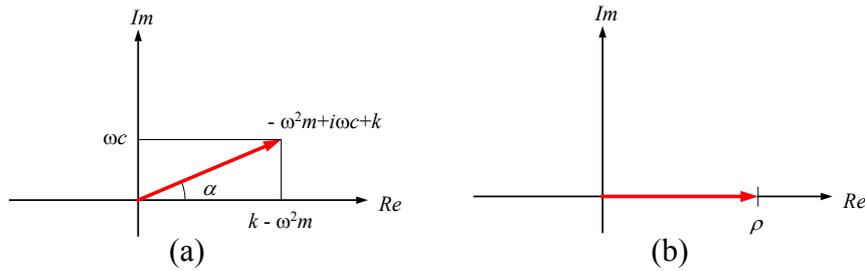


Figura 4. O denominador da Equação (11) pode ser entendido como um número real multiplicado por $e^{i\alpha}$, ou seja, rotacionado de um ângulo α .

Portanto, pode-se imaginar que o denominador da equação (11) é um vetor no plano complexo, originalmente horizontal, com módulo ρ (ou seja, um número real puro, sem parte complexa), que foi rotacionado de um ângulo α . Esse vetor “original” é mostrado na Figura 4 (b). Essa construção se torna útil para reescrever o denominador com a ajuda da equação de Euler, da seguinte forma:

$$-\omega^2 m + i\omega c + k = \rho e^{i\alpha} = \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} e^{i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)}$$

Que, de volta à Equação (11), juntamente com o já definido $P = P_0 e^{i\varphi}$, leva a:

$$V = \frac{P_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} e^{i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)}} = \frac{P_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} e^{i\varphi - i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)}$$

Finalmente, lembrando a definição $V = V_0 e^{i\theta}$, encontra-se:

$$V_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (12)$$

e

$$\theta = \varphi - \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \quad (13)$$

Que definem completamente a resposta do sistema à “carga complexa” $p_1(t) = P e^{i\omega t}$. Como o sistema é linear, a resposta do sistema à “carga complexa” definida pela segunda parcela da Equação (8), $p_2(t) = P^* e^{-i\omega t}$, que é o complexo conjugado de $p_1(t)$, será $V^* e^{-i\omega t}$, que também é o complexo conjugado da resposta obtida para a carga $p_1(t)$.

Portanto, ao fazer a soma das duas parcelas conjugadas da resposta, como indica a Equação (10), haverá um cancelamento imediato das partes complexas da resposta, restando apenas o dobro da parte real, que multiplicada por $1/2$, resultará apenas na parte real da resposta, como indicada na Equação (9), onde V_0 e θ são realmente dados pelas Equações (12) e (13).

Como V_0 é a amplitude máxima do deslocamento, uma informação muito importante que pode ser extraída da Equação (12) é que o seu valor máximo ocorre quando o denominador $\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$ é mínimo, o que pode ser encontrado igualando sua derivada em relação a ω a zero, e encontrando:

$$\omega = \sqrt{\frac{2km - c^2}{2m^2}}$$

Como exemplo, seja um sistema composto por uma massa de 20 t suportada por quatro pilares verticais com perfis em aço W 200x53,0 Açominas (semelhante ao sistema estrutural mostrado na Figura 6), com um amortecimento de 1,2 kNs/m, sujeito a uma carga lateral cossenoidal. A rigidez é $k = 425,12$ kN/m. A Figura 5 mostra o gráfico de V_0 / P_0 em função de ω :

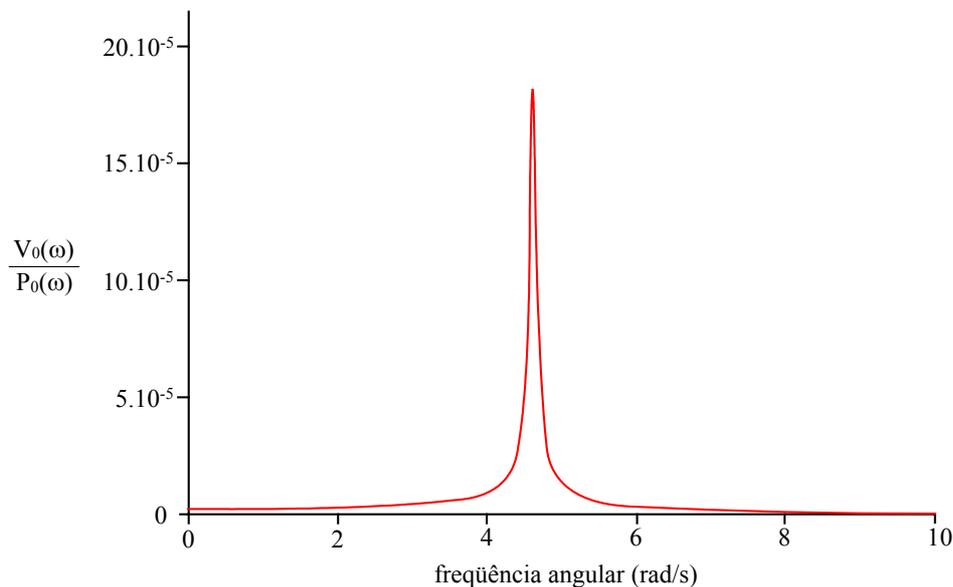


Figura 5. Variação da amplitude da resposta em função da frequência angular ω da carga

Na figura, pode-se ver que, à medida que a frequência angular de excitação da carga se aproxima de 4,5 rad/s, a amplitude da resposta final aumenta rapidamente, podendo comprometer a estrutura.

A grande vantagem em utilizar o domínio da frequência é que a equação diferencial passa a ser uma equação diferencial algébrica. Assim, para análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade, o sistema de equações diferenciais se transforma em um sistema de equações algébricas lineares.

Qualquer tipo de carga $p(t)$ pode ser escrito em função do seu espectro, assim, para cada frequência da carga $p(t)$, o deslocamento pode ser conhecido.

5 A TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada direta de Fourier de uma função qualquer $f(t)$ é definida pela função:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (14)$$

Da mesma maneira, a função original $f(t)$ é recuperada pela transformada inversa de Fourier, definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (15)$$

Se duas funções $f(t)$ e $F(\omega)$ satisfazem as Equações (14) e (15), então diz-se que elas formam um par de transformadas de Fourier.

O cálculo numérico dessas transformadas é feito através da transformada discreta de Fourier, definida por:

$$F(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} F(\omega_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Onde os tempos discretos são dados por:

$$t_n = n\Delta t \quad (16)$$

E as frequências discretas são dadas por:

$$\omega_m = \mu_m \Delta\omega \quad (17)$$

Os valores de μ_m são dados pela Tabela 1.

Tabela 1. Frequências discretas.

m	μ_m	ω_m
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
...
$N/2 - 1$	$N/2 - 1$	$(N/2 - 1)\Delta\omega$
$N/2$	$N/2$	$(N/2)\Delta\omega$
$N/2 + 1$	$-(N/2 + 1)$	$-(N/2 - 1)\Delta\omega$
...
N-2	-2	$-2\Delta\omega$
N-1	-1	$-\Delta\omega$

Uso da transformada de Fourier para encontrar a solução da equação do movimento

Foi exposto o procedimento a ser seguido para encontrar a resposta de um sistema a carregamento cossenoidal. Entretanto, quando a carga for arbitrária, a transformada de Fourier pode ser utilizada para encontrar a resposta, da seguinte forma:

Aplicando a transformada de Fourier à já definida equação do movimento:

$$mv(t) + c\dot{v}(t) + k\ddot{v}(t) = p(t)$$

Obtém-se, para condições iniciais nulas, ou seja, $v(0) = 0$ e $\dot{v}(0) = 0$:

$$V(\bar{\omega}) = P(\bar{\omega})H(\bar{\omega})$$

Onde as transformadas de $v(t)$ e de $p(t)$ são

$$V(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt$$
$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt$$

E a função complexa de resposta na frequência é

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + k + i\bar{\omega}c}$$

Portanto, a resposta no domínio do tempo será a transformada inversa de $V(\bar{\omega})$:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega})H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}$$

As equações equivalentes às duas anteriores, porém, em sua forma discretizada, são:

$$P(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$
$$v(t_n) = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(\bar{\omega}_m) H(\bar{\omega}_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Onde T_p é o comprimento do intervalo de truncamento, ou tempo estendido, N é o número de pontos discretos em que o tempo estendido é dividido, $\Delta t = T_p / N$ é o intervalo de separação entre os pontos no tempo e $\Delta \bar{\omega} = 2\pi / T$ é o intervalo de separação entre os pontos discretos na frequência. Os tempos discretos e as frequências discretas são definidos como nas Equações (16) e (17).

6 EXEMPLO NUMÉRICO

A Figura 6 mostra uma caixa d'água elevada e a carga dinâmica transiente à qual está submetida. Essa carga simula a ação de uma rajada de vento. A massa da caixa d'água é $m = 10 \text{ t}$, a constante elástica dos pilares de sustentação é $k = 40000 \text{ kN/m}$, o coeficiente de amortecimento viscoso é $c = 120 \text{ kNs/m}$.

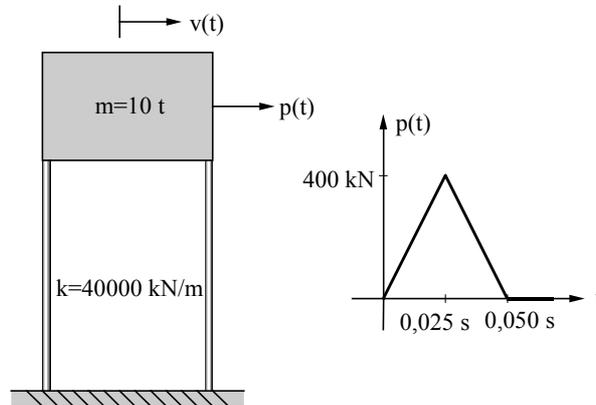


Figura 6. Representação da caixa d'água e carregamento que nela atua.

A resposta será avaliada pelo procedimento da transformada discreta de Fourier. O intervalo de tempo usado foi de $0,0025$ segundo. O tempo estendido foi de $1,28$ segundo, e, portanto, o número de pontos é 512 . Embora se tenha calculado a resposta para todo o tempo estendido, a resposta da Figura 7 está mostrando apenas o primeiro $0,4$ segundo.

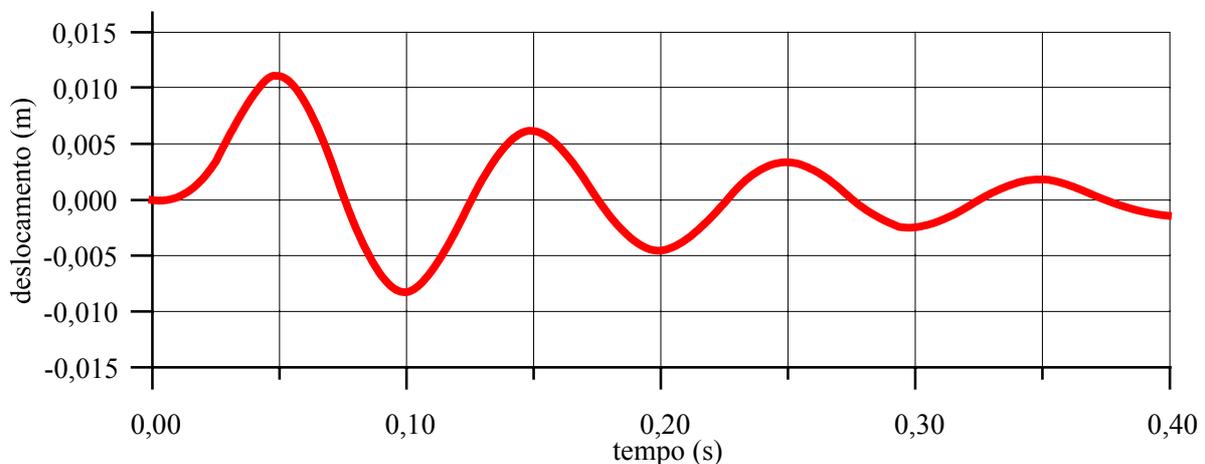


Figura 7. Resposta obtida para o sistema da Figura 6.

7 CONCLUSÃO

Em engenharia, números complexos são de extrema importância em disciplinas de circuitos e instalações elétricas, e, particularmente para a engenharia civil, em vibrações mecânicas, quando se pretende fazer a análise no domínio da frequência. Há casos na engenharia em que as propriedades mecânicas dependem da frequência de excitação do carregamento dinâmico, como em certos casos de interação solo-estrutura. Nesses casos, a análise no domínio da frequência é a mais adequada. Além disso, em todos os casos, a opção de análise dinâmica no domínio da frequência é sempre possível. Uma importante vantagem é

o fato de que a obtenção das frequências naturais da estrutura é inerente ao procedimento. Como as frequências do carregamento dinâmico são conhecidas, o conhecimento das frequências naturais da estrutura permite ao engenheiro projetista antever possíveis ocorrências de ressonância, e assim, tomar decisões para evitar isso, modificando as propriedades da estrutura, de modo que as frequências naturais e de excitação sejam suficientemente diferentes.

O presente artigo cumpriu o objetivo de facilitar o entendimento por um aluno de engenharia civil de soluções de vibrações estruturais no domínio da frequência. Inicia-se com um histórico sobre números complexos, a dedução da equação de Euler e seu uso na solução, no domínio da frequência, da equação dinâmica de um sistema massa-mola submetido a uma carga temporal harmônica. Em seguida, apresenta-se a transformada de Fourier em suas formas contínua e discreta, e sua aplicação na solução da equação dinâmica de um sistema submetido a uma carga temporal genérica. Além disso, foram resolvidos dois exemplos, um mostrando a relação deslocamento-carga, em função da frequência angular, e o outro mostrando a resposta temporal de uma estrutura típica a uma carga que simula uma rajada de vento.

8 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao NEXEM – Núcleo de Excelência em Estruturas Metálicas e Mistas, Convênio Ufes/ArcelorMittal Tubarão o apoio concedido ao desenvolvimento deste trabalho.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BHATTI, A., Complex Numbers. Disponível em <<http://people.bath.ac.uk/aab20/complexnumbers.html>> Acesso em 03 jul. 2007.

O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Girolamo Cardano. Disponível em <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html>> Acesso em 03 jul. 2007.

O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Nicolo Fontana Tartaglia. Disponível em <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html>> Acesso em 03 jul. 2007.

O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Abraham de Moivre. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html> Acesso em 03 jul. 2007.

O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Caspar Wessel. Disponível em <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel.html>> Acesso em 03 jul. 2007.

WEISSTEIN, E. W., Euler, Leonhard (1707-1783). Disponível em <<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Euler.html>> Acesso em 03 jul. 2007.

10 BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

BRIGHAM, E.O., **The Fast Fourier Transform**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

CALENZANI, A.F.G., **Análise Dinâmica no Domínio da Frequência de Sistemas com Amortecimento Não Clássico**, Vitória, 2002 (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, CT/Ufes.

CAMARGO, R. S.; FERREIRA, W. G. Análise Dinâmica no Domínio da Freqüência. Formulações Clássica e Matricial. **Revista Engenharia Ciência Tecnologia**, Vitória - ES, v. 05, n. 04, p. 33-42, 2002.

CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, 2nd. Edition, McGraw-Hill, New York, 1993.

COOLEY, J.W., TUKEY, J. W. An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series, **Mathematics of Computation**, v. 19, pp. 297-301, 1965.

FERREIRA, W.G., **Análise Dinâmica Não-Linear no Domínio da Freqüência de Sistemas Estruturais com Amortecimento Não-Proporcional.**, Rio de Janeiro, 1998 (Tese de Doutorado), COPPE/UFRJ.

FERREIRA, W.G., CLARET, A.M. and VENANCIO-FILHO, F., Dynamic Response Due to Initial Conditions by Frequency Domain Method, **Applied Mechanics in the Americas**, AAM and ABCM, Rio de Janeiro, 1999.

FERREIRA, W. G., SECHIM, C., FREITAS, M. S., Análise Dinâmica no Domínio do Tempo de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade. Aplicação em Pórticos Metálicos. **Revista Engenharia Ciência Tecnologia**, Vitória - ES, ano 3, ed. 17, p. 93-100, 2000.

WYLIE, C.R. and BARRETT, L.C., **Advanced Engineering Mathematics**, 6th. Edition, McGraw-Hill, New York, 1995.

THE COMPLEX NUMBER AND ITS USAGE IN STRUCTURAL ENGINEERING

Abstract: *The objective of the present paper is to illustrate to civil engineering students, the usage of complex numbers. The paper text begins describing the history of complex numbers including Euler's equation origin. Subsequently complex algebra is used to transform the differential equation of motion of a mass-spring-dashpot single degree of freedom system, with viscous damping, into an algebraic equation whose solution can be easily found using basic arithmetic. It is a didactic approach, aiming to stimulate the interest of civil engineering students on the subject. Finally, the formulation presented is applied to a practical case of structural engineering.*

Key-words: *Complex numbers, structural dynamics, teaching in engineering*