O USO DA NOTAÇÃO DE LEVI-CIVITA EM ELETROMAGNETISMO PARA ENGENHEIROS

Hamilton Viana da Silveira -silveira@df.ufscar.br,
Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Física
Via Washington Luis, km 235
13565-905 – São Carlos – SP

Resumo: *Neste trabalho é utilizada a notação de Levi-Civita que simplifica consideravelmente cálculos e equações na Teoria Eletromagnética. Muitas das simplificações decorrem de usar a convenção da soma de Einstein sobre índices repetidos no espaço tri-dimensional.*

Palavras-chave: *Teoria **e**letromagnética, Levi-Civita, Soma de Einstein*

1 O SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA

Na análise vetorial e tensorial o símbolo de Levi-Civita (ARFKEN & WEBER, 1995), denotado por ε_{ijk}, tem uma boa aplicação para simplificar cálculos e equações e tem sido desenvolvido em Eletromagnetismo para Físicos (REITZ & MILFORD, 1962) e Engenheiros (HAYT, 1978). A validade do método é universal em Eletromagnetismo, o que se aplica tanto na Física quanto na Engenharia não violando qualquer regra de análise vetorial e tensorial. Este símbolo é definido como uma função de dois valores dentre os três índices que aparecem como subscritos. Estes indicies são independentes e cada um deles podem ter os valores 1, 2, ou 3, resultando um total de 27 combinações, como segue na Tabela 1:

Tabela 1 – Combinações do Símbolo de Levi-Civita

ε_{111}	ε_{112}	ε_{113}
ε_{121}	ε_{122}	ε_{123}
ε_{131}	ε_{132}	ε_{133}

ε_{211}	ε_{212}	ε_{213}
ε_{221}	ε_{222}	ε_{223}
ε_{231}	ε_{232}	ε_{233}

ε_{311}	ε_{312}	ε_{313}
ε_{312}	ε_{322}	ε_{313}
ε_{331}	ε_{332}	ε_{333}

Por definição o símbolo de Levi-Civita é nulo se dois ou três incides são iguais. Deste modo as 27 possibilidades que remanescentes estão mostradas na Tabela 2:

Tabela 2- As combinações remanescentes do símbolo de Levi-Civita

0	0	0
0	0	ε_{123}
0	ε_{132}	0

0	0	ε_{213}
0	0	0
ε_{231}	0	0

0	ε_{312}	0
ε_{312}	0	0
0	0	0

Os seis símbolos remanescentes não-nulos na Tabela 2 são ± 1 dependendo dos índices 1,2 e 3 terem uma permutação par ou ímpar.

Para permutações pares, $123 = 231 = 312 = +1$, enquanto que para permutações ímpares, $132 = 213 = 321 = -1$. Desta forma os valores completos do símbolo de Levi-Civita são mostrados na Tabela 3:

Tabela 3- Os valores completos do símbolo de Levi-Civita

0	0	0
0	0	+1
0	-1	0

0	0	-1
0	0	0
+1	0	0

0	+1	0
-1	0	0
0	0	0

Observando as Tabela 1, 2 e 3, o símbolo de Levi-Civita é anti-simétrico em relação à permutação dos índices. No caso de permutação par (+1) ijk é do tipo (12312), enquanto que na permutação ímpar (-1) ijk é do tipo (21321). Os demais valores são nulos.

Podemos então resumir que: $\varepsilon_{ijk} = +1,$ para permutação par de ijk, $\varepsilon_{ijk} = -1,$ para permutação ímpar de ijk, e que $\varepsilon_{ijk} = 0,$ nos demais casos.

Em muitos cálculos o símbolo ε_{ijk} aparece combinado com ele mesmo. Para ilustração e por conveniência, trocaremos os índices mudos e formamos o produto abaixo com o objetivo de calculá-lo.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \tag{1}$$

Usaremos a convenção em que Einstein trabalhando com vetores e tensores notou que a soma era dada sobre um sobrescrito (ou subscrito), que o subscrito aparecia duas vezes na expressão da somada e vice-versa. De modo que poderia simplesmente omitir o sinal redundante da soma, interpretando uma expressão do tipo $x_i y_i$ como uma soma sobre o subscrito repetido 1 para, em nosso caso, 3. Se houver dois subscritos repetidos, as duas somas estão implícitas, e assim por diante. Em uma carta, Einstein refere com a língua na bochecha para esta observação como “uma grande descoberta na matemática,” mas se não acredita na mesma segue adiante sem ela!

Visto que a convenção da soma de Einstein (BYRON & FULLER, 1970) aplica-se ao índice k e lembrando que $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}$, podemos escrever

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \equiv \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \tag{2}$$

com os quatro índices *i,j,l,m* independentes cobrindo cada um 1,2 e 3. De modo que a soma dada pela Equação (2) representaria 81 termos separados. Felizmente a maioria dos símbolos de Levi-Civita é nula. Todos os símbolos são 0 ou ± 1.

Dos quatro índices no interior da soma dada pela Equação (2) no mínimo dois são iguais. Por exemplo, seja i=1, j=2 e m=3, então l também duplica se for igual a 1, 2 e 3. Então a soma na Equação (2) torna-se:

$$\varepsilon_{121}\varepsilon_{113} + \varepsilon_{122}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{313} = 0 \tag{3}$$

Isto é análogo a dizer que quatro vetores tridimensionais quaisquer i,j,l,m são linearmente dependentes, pois três destes podem ser escolhidos independentemente, mas não o quarto.

Consideremos novamente a combinação dada pela Equação (1)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=0, \quad \text{para } i=j, \tag{4}$$

também,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=0, \text{ para } l=m \tag{5}$$

Se $i = l$ e $j = m$,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = +1 \tag{6}$$

Em adição a isso, se $i=m$ e $j=l$,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = -1. \tag{7}$$

Os dois últimos casos podem ser combinados para conduzir a uma condição final, a qual é ilustrada pela Equação (3) e com i=1, j=2 e m=3:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=0, \text{ para } i \neq l \text{ ou } m, \text{ ou } j \neq l \text{ ou } m \tag{8}$$

Como podemos observar a Equação (6) é verdadeira se $i = l$ e $j = m$. Daí podemos trocar o produto $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ por um produto de deltas de Kronecker, na forma:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\mathrm{klm}}=\delta_{il}\delta_{jm}=1, \text{ para } i=l \text{ e } j=m \tag{9}$$

Já a Equação (7) é verdadeira se $i=m$ e $j=l$. Neste caso teremos

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\varepsilon_{\mathrm{klm}} = -\delta_{im}\delta_{jl} = -1, \text{ para } i=m \text{ e } j=l \tag{10}$$

Podemos tomar as Equações (6) e (7) como uma combinação das Equações (9) e (10), lembrando que a soma de duas soluções também é uma solução. Daí podemos escrever:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \begin{cases} +1, i=l, j=m \\ -1, i=m, j=l \end{cases} \tag{11}$$

Notemos agora que se l = m, como acontece na Equação (05), teremos

$$\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} = 0, \text{ para } l=m. \tag{12}$$

Deste modo as Equações (05), (06) e (07) estão satisfeitas. Como as Equações (11) e (12) são reafirmações das Equações (06) e (07), elas também são satisfeitas e conduzem à seguinte identidade:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{13}$$

O Símbolo de Levi-Civita em conjunto com outras quantidades como componentes de um vetor produz uma notação compacta para o produto vetorial. Consideremos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ denotados pelas suas respectivas componentes cartesianas:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv (A_1, A_2, A_3) \equiv (A_j)\,. \tag{14}$$

e

$$\vec{B} = (B_x, B_y B_z) \equiv (B_1, B_2, B_3) \equiv (B_k) \tag{15}$$

Para o produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$ podemos escrever

$$\vec{C} = (C_x, C_y, C_z) \equiv (C_1, C_2, C_3) \equiv (C_i). \tag{16}$$

Usando o símbolo de Levi-Civita, teremos

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{17}$$

e aí determinamos esse produto usando a convenção da soma de Einstein sobre índices repetidos. Nesta notação os índices *i, j* e *k* são mudos no sentido que podem tomar todos os valores permitidos 1, 2 e 3. Podemos incluir ou omitir o símbolo da somatória Σ, escrevendo,

$$C_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{ijk} A_j B_k\,.. \tag{18}$$

Como exemplo, considere a operações $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ e $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$. Para a primeira operação, temos

$$\vec{A}.\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) \equiv A_i(\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \varepsilon_{ijk} B_j C_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k\,.. \tag{19}$$

Para a segunda operação,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv \left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})\right]_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} A_j B_l C_m\,. \tag{20}$$

Substituindo a Equação (13) na expressão acima, obtemos

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv A_j B_i C_j - A_j B_j C_i \equiv (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}\,. \tag{21}$$

o que mostra uma simplificação considerável nos cálculos, caso tivéssemos que efetuar a operação por componentes cartesianas dos vetores.

O operador vetorial diferencial $\vec{\nabla}$ é denotado por $(\partial)_i$, ou seja por derivadas parciais onde *i* tem os valores 1, 2 e 3. Onde 1, 2 e 3 referem às coordenadas *x,y* e *z*.

O que precisamos ter em mente ao usar a notação de Levi-Civita é a Equação (20) para o produto vetorial, a Equação (13) que envolve produto de deltas de Kronecker, que os índices são mudos e que $\varepsilon_{ijk} = 0$ sempre que somarmos sobre índices repetidos.

2 APLICAÇÃO AO ELETROMAGNETISMO

O campo elétrico $\vec{E}$ está relacionado ao potencial elétrico φ, escrito na forma:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \tag{22}$$

Vamos tomar o rotacional do campo elétrico, usando a notação de Levi-Civita

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi \equiv -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi\,. \tag{23}$$

Na expressão acima temos a soma de produtos de termos simétricos $(\partial_i\partial_j)$ nos índices e anti-simétrico ε_{ijk}, em qualquer par de índice, que se anula (BYRON & FULLER, 1970). Portanto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0\,. \tag{24}$$

O campo elétrico expresso na forma da Equação (22) vem a reforçar o fato que todo gradiente é irrotacional.

A indução magnética $\vec{B}$ é o rotacional do potencial vetorial $\vec{A}$. Tomando o divergente do da indução magnética,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0\,. \tag{25}$$

Na expressão usamos novamente que a soma de produtos de termos simétrico e anti-simétrico se anula. O fato do divergente da indução magnética se anular tem o significado físico de que não existem pólos magnéticos isolados.

Uma das mais importantes aplicações das Equações de Maxwell (REITZ & MILFORD, 1962) é a obtenção das equações das ondas eletromagnéticas. Considere as equações de Maxwell na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},. \tag{26}$$

$$.\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \tag{28}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{29}$$

As Equações (26) a (29) escritas na forma diferencial representam uma generalização de observações experimentais: a Equação (26) é uma extensão da lei de Ampère, a Equação (27) é a lei da indução eletromagnética de Faraday, a Equação (28) é a Lei de Gauss, a qual é obtida da lei de Coulomb, a Equação (29) representa o fato do monopolo magnético nunca ter sido observado. A equação da onda para o campo magnético $\vec{H}$ é obtida tomando o rotacional da Equação (26):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{30}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, onde as constantes ε e σ são, respectivamente, a constante dielétrica do material e a condutividade, obtemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \tag{31}$$

onde $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e a constante μ é a permeabilidade magnética do material. O primeiro termo da Equação (30) pode ser facilmente desenvolvido usando a notação de Levi-Civita com base na Equação (20), ou seja:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \equiv \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l H_m = \partial_j \partial_i H_j - \partial_j \partial_j H_i \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H}. \tag{32}$$

Substituindo a Equação (32) na Equação (31) e levando em conta a Equação (29), obtemos finalmente a equação da onda:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{33}$$

O vetor campo elétrico satisfaz a mesma equação da onda, bastando tomar o rotacional do vetor $\vec{E}$ dado pela Equação (27) e tratando σ, μ e ε como constantes, obtemos:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \tag{34}$$

As equações da onda obtidas acima governam o campo eletromagnético e são conseqüências das equações de Maxwell.

Há várias operações vetoriais no Eletromagnetismo a serem desenvolvidas, que podem ser obtidas facilmente utilizando o método proposto neste trabalho.

3 RESULTADOS

Os exemplos já mostrados em aplicação ao Eletromagnetismo mostram alguns resultados importantes do método desenvolvido e aplicado no ensino em Engenharia Física. Vamos mostrar agora mais um exemplo em Eletromagnetismo.
Tomando como base duas das Equações de Maxwell (REITZ & MILFORD, 1962) na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{35}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{36}$$

Vamos tomar o divergente do produto vetorial entre os campos vetoriais $\vec{H}$ e $\vec{E}$ para aplicar o resultado da operação nas equações dadas acima, usando a notação de Levi-Civita

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \equiv \partial_i \varepsilon_{ijk} E_j H_k = H_k \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j + E_j \varepsilon_{ijk} \partial_i H_k \tag{37}$$

Observando a Equação (37), identificamos nos dois temos do lado direito a presença do rotacional, daí escrevemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) \tag{38}$$

Tomando o produto escalar da Equação (35) com o campo elétrico $\vec{E}$ e subtraindo o resultado obtido com o produto escalar da Equação (36) com o campo magnético $\vec{H}$, obtemos:

$$\vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{39}$$

Comparando as Equações (38) e (39), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{40}$$

Se aplicarmos a Equação (40) a um meio linear, ou seja, se $\vec{D}$ é proporcional a $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é proporcional a $\vec{H}$, as derivadas temporais do lado direito podem ser escritas como

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \tag{41}$$

e

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \tag{42}$$

Usando as Equações (41) e (42) na Equação (40), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right) - \vec{J} \cdot \vec{E}. \tag{43}$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (43) é a derivada temporal da soma das densidades de energia elétrica e magnética e o segundo termo é o negativo da taxa de calor Joule por unidade de volume.

O uso da notação de Levi-Civita mostra uma forma eficiente, sem qualquer violação às leis da álgebra vetorial, de trabalhar no campo eletromagnético e tem sido utilizado na disciplina Eletromagnetismo no ensino de Engenharia Física. Esta mesma notação também pode ser empregada em Mecânica mais avançada que envolve um trabalho de análise vetorial.

A validade em usar o método proposto em Eletromagnetismo abrange tanto para Engenheiros como para Físicos e simplificam de uma forma considerável os cálculos e apresenta uma forma elegante em operar com campos vetoriais, dispensando usar uma expansão em coordenadas cartesianas como geralmente são empregados em livros textos. Naturalmente os fundamentos de Eletromagnetismo são os mesmos independentes de estarmos trabalhando com problemas físicos ou aplicações à Engenharia.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, após uma larga experiência na disciplina de Eletromagnetismo para o ensino em Engenharia Física, motivou a incentivar o uso do método de Levi-Civita, bem como usar as convenções da soma de Einstein onde é totalmente dispensável usar a notação do somatório quando a soma é tomada sobre índices repetidos.

O uso convencional de trabalhar com campos vetoriais com operações em que tomam rotacional do rotacional, rotacional de produtos vetoriais, divergente de produto vetorial que aparecem em Eletromagnetismo, usando expandir um vetor em componentes cartesianas, embora correto, é muito trabalhoso e acaba desestimulando o aluno em efetuar estas operações.

A utilização da notação proposta tem estimulado os estudantes a efetuar quaisquer operações vetoriais que se aplicam ao Eletromagnetismo e propiciado interpretações dos objetos em estudo.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARFKEN, G. B. & WEBER H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. New York: Academic Press, 1995, p.40, 42, 59, 199.

BYRON, F. W. & FULLER, R. W. **Mathematics of Classical and Quantum Physics.** New York: Dover Publications, Inc., 1970, p. 5, 82.

HAYT,W. H., JR. **Eletromagnetismo.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978, p. 383-393.

REITZ J. R. & MILFORD F. J. **Foundations of Electromagnetic Theory.** Palo Alto, 1962, p. 296- 300.

THE USE OF THE NOTATION OF LEVI-CIVITA IN ELECTROMAGNETISM FOR ENGINEERS

Abstract: *In this work is applied the Levi-Civita notation that simplified calculations and equations considerably in Electromagnetic Theory. Several of these simplifications are due to use the Einstein summation convection, that appeared twice in the summed expression in the three dimensional space.*

Key-words: *Electromagnetic theory, Levi-Civita, Einstein summation*