

## O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM TRELIÇAS PLANAS NA DISCIPLINA DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Gustavo Cunha da Silva Neto** – gcsn.eng@uea.edu.br

**Rogério Coelho Lopes** – rlopes@uea.edu.br

Universidade do Estado do Amazonas – U.E.A., Departamento de Engenharia Mecatrônica  
Av. Darcy Vargas, nº 1200, Parque 10, 69065-020 – Manaus – AM.

**Arlindo Pires Lopes** – arlindo@unb.br

Universidade de Brasília – UnB, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental  
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 – Brasília – DF.

***Resumo:** Este trabalho apresenta uma aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em treliças planas para a obtenção dos deslocamentos nodais, esforços internos, tensões normais e reações de apoio. Aqui o MEF é trabalhado de forma simples e didática no âmbito da análise estrutural para auxiliar os estudantes da disciplina de Mecânica Computacional da Universidade do Estado do Amazonas (UEA). Apresenta-se a formulação do elemento de barra nos sistemas de coordenadas local e global. Ao final, sugere-se uma aplicação dos conceitos apresentados em uma treliça plana com um grau de hiperestaticidade.*

***Palavras-chave:** Elementos finitos, Treliça plana, Mecânica Computacional.*

### 1 INTRODUÇÃO

O uso de computadores nos cursos de engenharia tem sido objeto de estudo por parte de educadores há mais de trinta e cinco anos (LICKLIDER, 1966). Nas atividades de engenharia, de um modo geral, os engenheiros são colocados diante de problemas técnicos, uns simples e outros mais complexos, tendo que resolvê-los de uma forma prudente e satisfatória. No que diz respeito ao projeto estrutural, o engenheiro deve garantir que a estrutura não venha a ter problemas que comprometam a segurança dos seus usuários. Na análise de uma estrutura, o sucesso desta tarefa não está apenas relacionado a formulações matemáticas, mas à capacidade do engenheiro para entender os fenômenos físicos que representam o problema a ser solucionado.

Para sistemas de geometria simples, com condições de carregamento e apoio muito “bem comportados”, encontram-se soluções analíticas para tais sistemas. Porém, grande número das estruturas de importância prática é muito complexo para ser analisado por técnicas clássicas. Para estruturas de forma arbitrária, a solução analítica frequentemente torna-se impossível, e então o problema requer grandes e excessivas simplificações.

Os métodos analíticos clássicos permitem o cálculo da resposta exata das incógnitas da estrutura em todos os seus pontos. Estas soluções, no entanto, são somente conhecidas para alguns casos, que fogem das aplicações práticas encontradas no dia-a-dia.

Faz-se necessário utilizar procedimentos aproximados, que podem ser aplicados em caráter geral, independentemente da forma da estrutura e da condição de carregamento, desde que dentro da precisão aceitável do problema de engenharia. Este caminho alternativo aos procedimentos analíticos clássicos constitui a idéia central do Método dos Elementos Finitos (MEF). Nas últimas décadas o MEF tornou-se uma técnica eficiente, aplicável à análise de problemas relacionados com placas, cascas, barragens, estabilidade de taludes, fundações, escoamento de fluidos, dinâmica estrutural, entre outros. Sua eficiência e desenvolvimento devem-se a dois fatores: aplicações de métodos matriciais na mecânica estrutural e o uso de computadores. Maiores informações sobre o MEF podem ser encontradas em ZIENKIEWICZ (1977), BATHE (1982), ASSAN (1999) e FELIPPA (2000).

A disciplina de Mecânica Computacional da Universidade do Estado do Amazonas – U.E.A. encontra-se no sétimo período dos cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia Mecatrônica. A abordagem da disciplina é feita com a introdução dos conceitos do MEF de forma tradicional, utilização de programas comerciais, tais como: ANSYS, SAP 2000 e NASTRAN e elaboração de códigos computacionais desenvolvidos pelos próprios estudantes.

Neste contexto o MEF foi escolhido para o desenvolvimento do presente trabalho por ser uma ferramenta muito difundida no campo da engenharia estrutural e, ainda, por despertar o interesse dos estudantes com aplicações práticas da engenharia. O objetivo deste trabalho é mostrar os principais conceitos do MEF e aplicá-los “passo-a-passo” no estudo de treliças planas hiperestáticas, tornando possível o entendimento do método em nível de graduação.

## 2 TRELIÇAS

Treliças são estruturas reticuladas formadas por elementos retos, também chamados de elementos de barra, conectados a nós e submetidos somente a forças axiais (Figura 1). A modelagem das treliças é feita a partir de um elemento de barra. Assume-se, ainda, que o material dos elementos é linear-elástico e obedece à lei de Hooke e que suas deformações são pequenas.

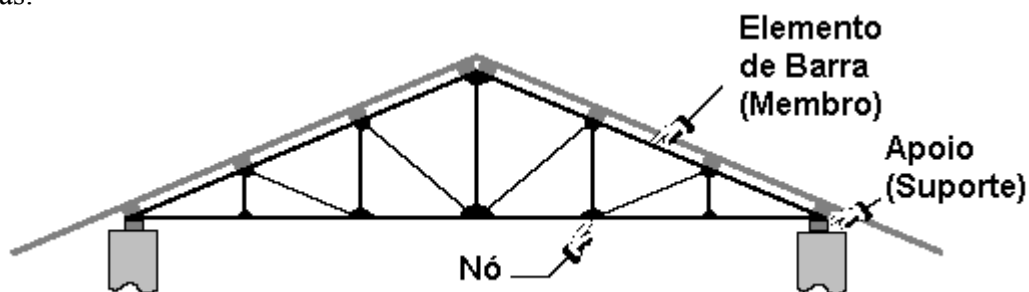


Figura 1 – Exemplo de treliça

### 2.1 Funções de forma

A representação do elemento de barra é aquela mostrada na Figura 2. Considere que todos os deslocamentos estão ao longo do eixo x e a função  $S(x)$  corresponde ao campo de deslocamentos, se somente se:

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{L}{2}\right) &= U_{ix} \\ S\left(\frac{L}{2}\right) &= U_{jx} \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $U_{ix}$  e  $U_{jx}$  são os deslocamentos dos nós.

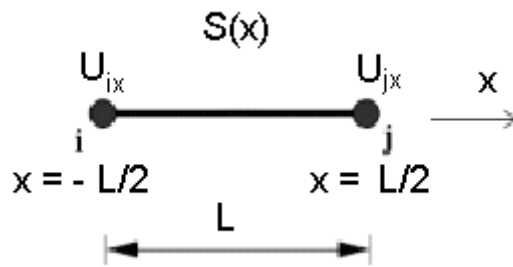


Figura 2 – Elemento finito unidimensional de dois nós com comprimento L.

Torna-se necessário uma aproximação em que o campo de deslocamentos  $S(x)$  é linear e é definido como:

$$S(x) = \frac{U_{ix} + U_{jx}}{2} + \frac{U_{jx} - U_{ix}}{L}x \quad (2)$$

$U_{ix}$  e  $U_{jx}$  são valores numéricos determinados após a análise da estrutura. A Equação 2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$S(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{L}x\right)U_{ix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{L}x\right)U_{jx} \quad (3)$$

Em forma matricial, a Equação 2 pode ser escrita conforme a Equação 4, onde  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  são denominadas de funções de forma do elemento.

$$S(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{L}x & \frac{1}{2} + \frac{1}{L}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{jx} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{L}x \\ N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{L}x \end{cases} \quad (5)$$

A principal característica dessas funções é que elas assumem valor unitário em um nó e valor nulo no outro nó adjacente. Como  $U = \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{jx} \end{bmatrix}$ , a Equação 4 pode ser escrita como:

$$S = NU \quad (6)$$

## 2.2 Campo de deformações

No elemento de barra, o campo de deformações é definido de acordo com a Equação 7.

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} \quad (7)$$

Substituindo-se a Equação 3 na Equação 7, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} [N_1 U_{ix} + N_2 U_{jx}] \Rightarrow \varepsilon = \frac{dN_1}{dx} U_{ix} + \frac{dN_2}{dx} U_{jx} \quad (8)$$

Observe que  $U_{ix}$  e  $U_{jx}$  não dependem de  $x$ . A Equação 8 pode ser escrita em forma matricial da seguinte forma:

$$E = B U, \text{ em que } B = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Substituindo-se a Equação 9 na Equação 5, tem-se:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 2.3 Matriz de rigidez do elemento

Na análise estática de estruturas, o MEF trabalha com equações matriciais do tipo  $KU=F$ , onde  $U$  são os deslocamentos finais da estrutura e  $F$  é o vetor de carregamento da estrutura. Portanto, torna-se necessário o conhecimento da matriz  $K$ , chamada de matriz de rigidez do elemento, o que geralmente é feito a partir do Princípio do Trabalho Virtual (PTV).

O PTV estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação (AZEVEDO, 2003). De uma forma mais simples, o PTV afirma que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho realizado pelas forças externas.

Nas equações a seguir,  $\delta$  indica que os deslocamentos são virtuais. O PTV para barras que estão submetidas a deslocamentos e forças axiais é definido pela Equação 11.

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_L \delta S^T p dL \quad (11)$$

Nesta equação, o vetor  $\delta \varepsilon$  apresenta a componente que corresponde o comprimento segundo o eixo da barra, o vetor  $\sigma$  contém a tensão normal na seção transversal da barra, o campo de deslocamentos  $\delta S$  e a ação exterior distribuída ( $p$ ) referem-se ao componente segundo o eixo da barra.

Considerado o elemento da Figura 2, designa-se por “ $A$ ” a área da seção transversal. Obtém-se, então a seguinte equação:

$$dV = A dx \quad (12)$$

Como se pode verificar na Figura 2, o eixo da barra coincide com o eixo  $x$ , ou seja:

$$dL = dx \quad (13)$$

Para deslocamentos virtuais, a Equação 9 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta \varepsilon = B \delta U \quad (14)$$

Ou ainda utilizando a matriz transposta, tem-se:

$$\delta \varepsilon^T = \delta U^T B^T \quad (15)$$

Utilizando-se a Lei de Hooke, onde  $E$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do elemento, tem-se que:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (16)$$

Substituindo-se a Equação 9 na Equação 16, tem-se:

$$\sigma = E B U \quad (17)$$

Utilizando-se da Equação 6, na sua representação de deslocamentos virtuais, juntamente com a Equação 15, tem-se o conjunto de equações definido abaixo:

$$\begin{aligned} \delta S &= N \delta U \\ \delta S^T &= \delta U^T N^T \end{aligned} \quad (18)$$

Substituindo-se a Equação 18 na Equação 11, o PTV fica pode ser escrito como:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta U^T B^T E B U A dx = \int_{-L/2}^{L/2} \delta U^T N^T p dx \quad (19)$$

Observe que os deslocamentos nodais não dependem de  $x$ , o módulo de elasticidade longitudinal e a área da seção transversal são constantes. Como o PTV é verdadeiro para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, tem-se:

$$EA \int_{-L/2}^{L/2} B^T B dx U = \int_{-L/2}^{L/2} N^T p dx \quad (20)$$

Comparando-se a Equação 20 com o sistema  $KU=F$ , pode-se afirmar que a matriz de rigidez é representada pela Equação 21, conforme abaixo:

$$K = EA \int_{-L/2}^{L/2} B^T B dx \quad (21)$$

Substituindo-se a Equação 10 na Equação 21 e efetuando-se os cálculos necessários, chega-se, desta forma, à matriz de rigidez do elemento de barra na sua forma usual.

$$K = EA \int_{-L/2}^{L/2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \quad (22)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (23)$$

## 2.4 Matriz de rotação

Para se obter a matriz de rigidez de uma estrutura, as matrizes de rigidez de cada elemento são superpostas adequadamente de acordo com as conexões dos nós. A rigidez é definida como uma força associada a um deslocamento unitário. Essa montagem é feita de acordo com a localização do elemento, ou seja, trata-se de uma questão vetorial. Assim, para determinar as propriedades de rigidez dessa estrutura, as forças e deslocamentos associados a cada elemento individualmente devem ser relacionados a um sistema de referências, chamado sistema de coordenadas local, onde sua abscissa corresponde ao eixo ao longo do elemento.

Entretanto, a estrutura é formada por vários elementos, então precisa-se de algum artifício para se trabalhar com essas matrizes de rigidez em um único sistema de coordenadas. É nesse contexto que surge a matriz de rotação. Essa matriz relaciona a matriz de rigidez do elemento no sistema local com a matriz de rigidez desse elemento no sistema global. Será convencionalizada a notação de letras minúsculas para forças e deslocamentos no sistema local, e letras maiúsculas para forças e deslocamentos no sistema global, conforme a Figura 3.

A Equação 24 representa matematicamente a relação entre forças e deslocamentos através da matriz de rigidez do elemento de barra.

$$\begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

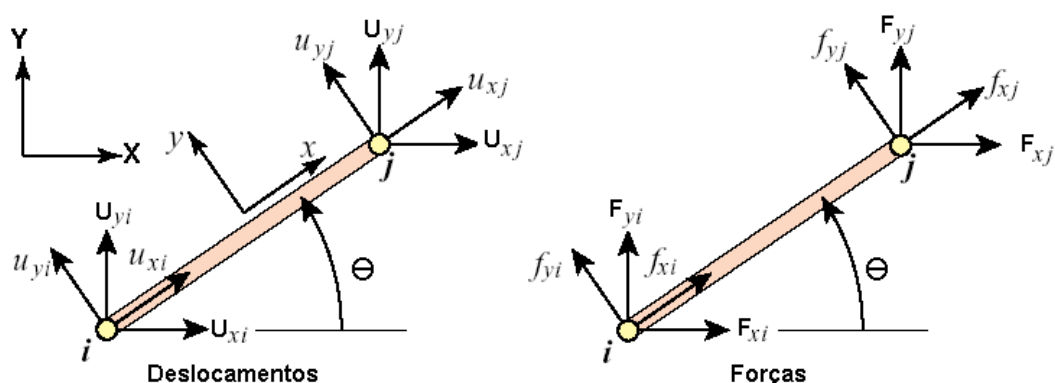


Figura 3 – Relação entre os sistemas local e global de coordenadas.

As forças que agem no elemento, escritas no sistema de coordenadas global são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
F_{iX} &= f_{ix} \cos \theta - f_{iy} \operatorname{sen} \theta \\
F_{iY} &= f_{ix} \operatorname{sen} \theta + f_{iy} \cos \theta \\
F_{jX} &= f_{jx} \cos \theta - f_{jy} \operatorname{sen} \theta \\
F_{jY} &= f_{jx} \operatorname{sen} \theta + f_{jy} \cos \theta
\end{aligned} \tag{25}$$

Escrevendo-se a Equação 25 na sua forma matricial, tem-se:

$$[F] = [T] [f] \tag{26}$$

onde

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{27}$$

Observe que existe uma relação interessante na matriz da Equação 27: a sua inversa é igual à sua transposta, fato que será usado mais adiante. Para sistemas ortogonais, a relação entre os componentes de deslocamentos nos dois sistemas é similar à Equação 26.

$$[U] = [T] [u] \tag{28}$$

Portanto, pode-se estabelecer a relação entre forças e deslocamentos nodais no sistema global, ou seja, a matriz de rigidez de qualquer elemento no sistema global. Para isso, torna-se necessário o ângulo do vetor de localização em relação ao sistema global:

$$\begin{aligned}
[f] &= [k][u] \\
[T]^{-1}[F] &= [k][T]^{-1}[U]
\end{aligned} \tag{29}$$

Multiplicando-se o lado esquerdo da Equação 29 por [T], tem-se:

$$[F] = [T][k][T]^{-1}[U] \tag{30}$$

A Equação 30 quando comparada com o sistema  $KU=F$  resulta na equação correspondente da matriz de rigidez do elemento, no sistema global, representada pela Equação 32.

$$[K] = [T][k][T]^{-1} \tag{31}$$

Fazendo-se os cálculos necessários, tem-se o seguinte:

$$[K]^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \end{bmatrix} \tag{32}$$

A título de ilustração apresenta-se uma aplicação numérica dos conceitos aqui mostrados na determinação dos esforços e deslocamentos de uma treliça plana com um grau de hiperestaticidade.

### 3 APLICAÇÃO NUMÉRICA

A treliça plana apresentada na Figura 4 é a mesma daquela encontrada em MOAVENI, 1999. Os elementos de barra possuem seção transversal de  $1,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e são feitos de aço A-36, com módulo de elasticidade longitudinal igual a 200 GPa. Determine os deslocamentos em cada nó, a tensão normal em cada elemento e as reações de apoio.

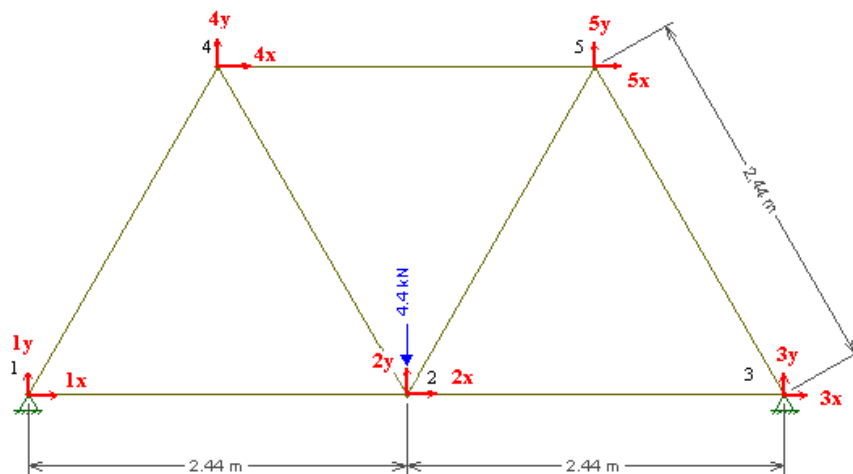


Figura 4 – Treliça plana com um grau de hiperestaticidade

#### 3.1 Parâmetros geométricos da estrutura

Observe que a estrutura possui sete elementos e cinco nós. A incidência dos elementos com seus respectivos nós, pode ser encontrada na Tabela 1. A próxima etapa é a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento no sistema global, a partir da matriz de rigidez do elemento de barra em seu sistema local.

Tabela 1 – Incidência dos elementos da treliça.

| Elemento | i | j |
|----------|---|---|
| 1        | 1 | 2 |
| 2        | 1 | 4 |
| 3        | 2 | 4 |
| 4        | 4 | 5 |
| 5        | 2 | 5 |
| 6        | 2 | 3 |
| 7        | 3 | 5 |

Para a montagem da Tabela 2, deve-se definir o vetor de localização de cada elemento, ou seja, estabelecer os nós  $i$  e  $j$  para definir o ângulo formado entre o sistema local e global de



coordenadas. Na Tabela 2 são mostrados os valores necessários para a obtenção da matriz no sistema global. Observe que um elemento de treliça possui dois graus de liberdade, e a treliça utilizada nesta aplicação numérica possui 5 nós, ou seja, a matriz de rigidez global da treliça deve ser uma matriz de ordem 10 x 10.

Tabela 2 – Parâmetros para a obtenção das matrizes de rigidez no sistema global.

| Elemento | ângulo | $\lambda = \cos \theta$ | $\mu = \sin \theta$ | $\lambda^2 = \cos^2 \theta$ | $\mu^2 = \sin^2 \theta$ | $\lambda\mu$ |
|----------|--------|-------------------------|---------------------|-----------------------------|-------------------------|--------------|
| 1        | 0°     | 1                       | 0                   | 1                           | 0                       | 0            |
| 2        | 60°    | 0,5                     | 0,866               | 0,25                        | 0,75                    | 0,433        |
| 3        | 120°   | -0,5                    | 0,866               | 0,25                        | 0,75                    | -0,433       |
| 4        | 0°     | 1                       | 0                   | 1                           | 0                       | 0            |
| 5        | 60°    | 0,5                     | 0,866               | 0,25                        | 0,75                    | 0,433        |
| 6        | 0°     | 1                       | 0                   | 1                           | 0                       | 0            |
| 7        | 120°   | -0,5                    | 0,866               | 0,25                        | 0,75                    | -0,433       |

### 3.2 Montagem da matriz de rigidez de cada elemento

A matriz de rigidez no sistema global é a apresentada conforme a Equação 32. A constante de proporcionalidade EA/L vale  $1,06 \times 10^8$  Pa/m. O comprimento de todas as barras é igual a 2,44 m.

Para os elementos 1, 4 e 6, da Figura 4, as matrizes de rigidez são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 [k]^1 &= 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \end{matrix} \\
 [k]^4 &= 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{matrix} \\
 [k]^6 &= 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{33}$$

De forma análoga, a obtenção das matrizes de rigidez para os elementos 2 e 5, da Figura 4, são as seguintes:

$$[k]^2 = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 0,250 & 0,433 & -0,250 & -0,433 \\ 0,433 & 0,750 & -0,433 & -0,750 \\ -0,250 & -0,433 & 0,250 & 0,433 \\ -0,433 & -0,750 & 0,433 & 0,750 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{matrix} \tag{34}$$

$$[k]^5 = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 0,250 & 0,433 & -0,250 & -0,433 \\ 0,433 & 0,750 & -0,433 & -0,750 \\ -0,250 & -0,433 & 0,250 & 0,433 \\ -0,433 & -0,750 & 0,433 & 0,750 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{matrix}$$

Finalmente, para os elementos 3 e 7, da Figura 4, as matrizes de rigidez são as seguintes:

$$[k]^3 = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 0,250 & -0,433 & -0,250 & 0,433 \\ -0,433 & 0,750 & 0,433 & -0,750 \\ -0,250 & 0,433 & 0,250 & -0,433 \\ 0,433 & -0,750 & -0,433 & 0,750 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{matrix}$$

$$[k]^7 = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 0,250 & -0,433 & -0,250 & 0,433 \\ -0,433 & 0,750 & 0,433 & -0,750 \\ -0,250 & 0,433 & 0,250 & -0,433 \\ 0,433 & -0,750 & -0,433 & 0,750 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{matrix} \quad (35)$$

### 3.3 Montagem da matriz de rigidez da estrutura

Cada matriz de rigidez dos elementos desconexos tem contribuição na matriz de rigidez da estrutura. O coeficiente de posição  $u_{(ix,jy)}$  da matriz de rigidez de cada elemento deve ocupar a mesma posição na matriz de rigidez da estrutura. Por exemplo, o posicionamento da matriz do elemento 3 na matriz de rigidez da estrutura é o seguinte:

$$[K] = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,250 & -0,433 & 0 & 0 & -0,250 & 0,433 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,433 & 0,750 & 0 & 0 & 0,433 & -0,750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,250 & 0,433 & 0 & 0 & 0,250 & -0,433 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,433 & -0,750 & 0 & 0 & -0,433 & 0,750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1x \\ 1y \\ 2x \\ 2y \\ 3x \\ 3y \\ 4x \\ 4y \\ 5x \\ 5y \end{matrix} \quad (36)$$

Fazendo o mesmo procedimento para os demais elementos e verificando a contribuição dessas matrizes, obtém-se a matriz de rigidez da treliça, conforme abaixo:

$$[K] = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1,25 & 0,433 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & -0,433 & 0 & 0 \\ 0,433 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,433 & -0,75 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2,5 & 0 & -1 & 0 & -0,25 & 0,433 & -0,25 & 0,433 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0,433 & -0,75 & -0,433 & -0,75 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1,25 & -0,433 & 0 & 0 & -0,25 & 0,433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,433 & 0,75 & 0 & 0 & 0,433 & -0,75 \\ -0,25 & 0,433 & -0,25 & 0,433 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1 & 0 \\ 0,433 & -0,75 & 0,433 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,433 & -0,25 & 0,433 & -1 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,433 & -0,75 & 0,433 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1x \\ 1y \\ 2x \\ 2y \\ 3x \\ 3y \\ 4x \\ 4y \\ 5x \\ 5y \end{matrix} \quad (37)$$

### 3.4 Aplicação das condições de contorno na estrutura

A partir da montagem da Equação 37 pode-se utilizar o sistema  $KU=F$  e montar a Equação 38. Observe que a treliça possui dois apoios do segundo gênero, nos nós 1 e 3, o que significa dizer que os deslocamentos nesses nós são nulos. Ou seja:  $u_{1x} = 0$ ,  $u_{1y} = 0$ ,  $u_{3x} = 0$  e  $u_{3y} = 0$ . Existe, ainda, como condição, um carregamento externo no nó 2 de 4448 N de compressão, ou seja,  $F_{2y} = -4448$ . Nos demais nós, não existe carregamentos externos.

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1,25 & 0,433 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & -0,433 & 0 & 0 \\ 0,433 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,433 & -0,75 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2,5 & 0 & -1 & 0 & -0,25 & 0,433 & -0,25 & 0,433 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0,433 & -0,75 & -0,433 & -0,75 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1,25 & -0,433 & 0 & 0 & -0,25 & 0,433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,433 & 0,75 & 0 & 0 & 0,433 & -0,75 \\ -0,25 & 0,433 & -0,25 & 0,433 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1 & 0 \\ 0,433 & -0,75 & 0,433 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,433 & -0,25 & 0,433 & -1 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,433 & -0,75 & 0,433 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Aplicando essas condições na Equação 38, linhas e colunas são zeradas na Equação 39, para finalmente se obter a Equação 40, conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ -4448 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} \color{red}{-1,25} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{red}{0,433} & \color{red}{0,75} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{2,5} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1,5} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{-0,75} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{1,25} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{0,75} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} \\ \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1,5} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} \\ \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1,5} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{-0,433} & \color{red}{-0,25} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} & \color{red}{1,5} & \color{red}{0} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{0,433} & \color{red}{-0,75} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4448 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,06 \times 10^8 \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -0,25 & 0,433 & -0,25 & 0,433 \\ 0 & 1,5 & 0,433 & -0,75 & -0,433 & -0,75 \\ -0,25 & 0,433 & 1,5 & 0 & -1 & 0 \\ 0,433 & -0,75 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,433 & -1 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0,433 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix} \quad (40)$$

### 3.5 Obtenção dos resultados

Resolvendo a Equação 40, obtém-se o vetor deslocamento [U]. Pode-se resolver facilmente essa equação fazendo-se a inversão da matriz [K] e multiplicando-se pelo vetor [F], ou seja,  $[U] = [K]^{-1} \times [F]$ . Dessa forma, obtém-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7,0 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 1,2 \times 10^{-5} \\ -3,5 \times 10^{-5} \\ -1,2 \times 10^{-5} \\ -3,5 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{m}) \quad (41)$$

As reações de apoio podem ser encontradas utilizando-se a Equação 39. Por exemplo, a reação  $F_{1x}$  é obtida da seguinte forma:

$$F_{1x} = 1,06 \times 10^8 [-1U_{2x} - 0,25U_{4x} - 0,433U_{4y}] \quad (42)$$

Aplicando-se os valores dos deslocamentos previamente encontrados, obtêm-se  $F_{1x} = 1284$  N. Procedendo-se de forma análoga, obtêm-se os seguintes valores para as demais reações de apoio:  $F_{1y} = 2224$  N,  $F_{3x} = -1284$  N e  $F_{3y} = 2224$  N.

Na determinação das tensões em cada barra, é necessário determinar os esforços internos em cada elemento. A força interna em um elemento de nós  $i$  e  $j$ , representado pela Figura 5, é dado por:

$$\begin{aligned} f_{ix} &= \frac{EA}{L}(u_{ix} - u_{jx}) \\ f_{jx} &= \frac{EA}{L}(u_{jx} - u_{ix}) \end{aligned} \quad (43)$$

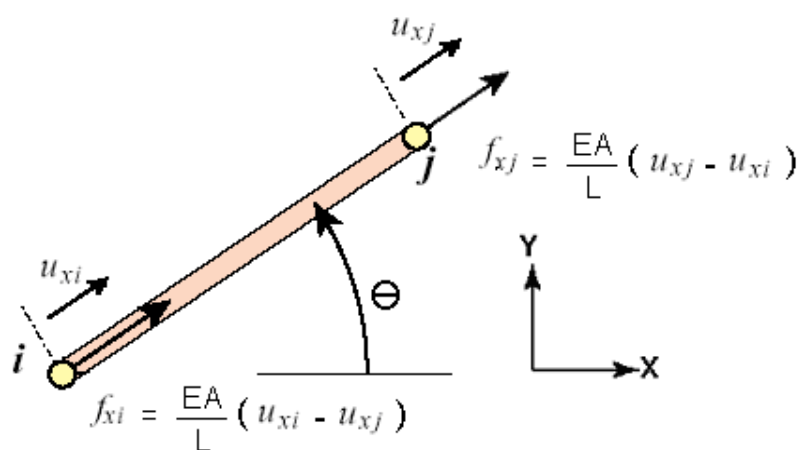


Figura 5 – Representação dos esforços internos no elemento de treliça.

No entanto, para a determinação desses esforços internos, é necessário que se tenha o valor dos deslocamentos em cada sistema local, pois os deslocamentos encontrados estão no

sistema global. Utiliza-se neste caso a Equação 28. Então, para a determinação dos deslocamentos locais, tem-se:

$$[u] = [T]^{-1} \times [U]$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Uma vez determinados esforços internos, a tensão normal em cada elemento da estrutura é dada por:

$$\sigma = \frac{\text{força interna}}{\text{área da seção transversal}} = \frac{f}{A} = \frac{EA}{L}(u_{ix} - u_{jx}) = \frac{E}{L}(u_{ix} - u_{jx}) \quad (45)$$

Por exemplo, para o elemento 2,  $\theta = 60^\circ$  ( $i = 1, j = 4$ ), tem-se que os deslocamentos no sistema local são:

$$\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \text{sen} 60^\circ & 0 & 0 \\ -\text{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 60^\circ & \text{sen} 60^\circ \\ 0 & 0 & -\text{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,2 \times 10^{-5} \\ -3,5 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (46)$$

O que resulta em  $u_{1x} = 0$  e  $u_{4x} = -0,0243$  mm. Com esses valores, obtém-se o valor para a tensão normal do elemento 2 de aproximadamente 2 MPa (compressão). Procedendo-se de forma análoga, encontram-se as tensões normais nos demais elementos, conforma a Tabela 3.

Tabela 3 – Tensões em cada elemento da treliça

| Elemento      | 1 | 2    | 3   | 4    | 5   | 6 | 7    |
|---------------|---|------|-----|------|-----|---|------|
| Tensão em MPa | 0 | -2,0 | 2,0 | -2,0 | 2,0 | 0 | -2,0 |

O sinal negativo representa compressão nas barras e positivo, tração.

Assim, todas as incógnitas do problema foram resolvidas.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do emprego do MEF e utilizando-se, por exemplo, planilhas eletrônicas, disponíveis nos computadores da Universidade do Estado do Amazonas – U.E.A., através de licenças, é possível demonstrar aos estudantes matriculados na disciplina de Mecânica Computacional como solucionar treliças hiperestáticas, empregando os modernos recursos computacionais. Entretanto, é de bom alvitre, na fase de introdução destes recursos aos estudantes, resolver exemplos clássicos, onde se conheça a solução analítica. Isto possibilita enfatizar os fenômenos físicos envolvidos.

Atualmente os estudantes da disciplina Mecânica Computacional da U.E.A. utilizam diversas ferramentas computacionais para realizarem seus cálculos. As vantagens de se utilizar estas ferramentas em relação aos procedimentos manuais, incluem a redução de erros matemáticos, execução rápida de cálculos repetitivos e a exploração de configurações alternativas. A utilização de notas de aula, disponíveis através da plataforma Moodle, têm se

mostrado uma excelente ferramenta de auxílio no ensino de treliças planas hiperestáticas, reduzindo o tempo gasto pelos estudantes na resolução dos exercícios, além de contribuir para uma melhor formação profissional e um melhor desempenho perante as exigências do mercado de trabalho.

## 5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos – Primeiros Passos**. Campinas: Ed. UNICAMP, 1999.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE**. 7. ed. São Paulo: Érica, 2002. 292 p.

AZEVEDO, A. F. M.. Elementos finitos unidimensionais. In: AZEVEDO, Álvaro F. M.. **Método dos elementos finitos**. 2003. ed. Porto: Universidade do Porto, 2003. Cap. 4, p. 59-70. Disponível em: <[http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/mnae/Livro\\_MEF\\_AA.htm](http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/mnae/Livro_MEF_AA.htm)>. Acesso em: 15 jan. 2007.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1982.

FELIPPA, C. A., **Introduction to The Finite Element Method: Lecture Notes**, University of Colorado at Boulder, 2000.

LICKLIDER, J. C. R. The Impact of Computers on Education in Engineering Design. In: **Proceedings of the Conference on the Impact of Computers in Engineering Design**, Washington, D.C., USA, 1966.

MOAVENI, S. T. In: MOAVENI, Saeed. **Finite Element Analysis: Theory and application with ANSYS**. Minnesota: Prentice Hall, 1999. Cap. 2, p. 54-70.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method**. London: Mc Graw-Hill, 1977.

### **THE FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO PLANE TRUSSES IN THE SUBJECT OF COMPUTATIONAL MECHANICS**

**Abstract:** *This work presents an application of The Finite Element Method applied to plane trusses to obtain nodal displacements, internal forces, normal stresses, and restraints reactions. Here the FEM is developed in a simple and pedagogical way in the scope of the structural analysis, assisting students in the subject of Computational Mechanics at the Amazonas State University (U.E.A.). It is shown the bar element formulation in both local and global coordinates and it is also suggested an application to the concepts shown in an indeterminate plane truss.*

**Key-words:** *Finite elements, Plane Truss, Computational Mechanics.*