XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia
COBENGE 2007

# TENSÕES: UMA APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR PARA ALUNOS DE ENGENHARIA

**Solange dos Santos Nieto** – solangenieto@mackenzie.com.br
Universidade Presbiteriana Mackenzie, Escola de Engenharia
Rua da Consolação, 930
01302-907 - São Paulo - SP – Brasil
**Célia Mendes Carvalho Lopes** – celiagiz@mackenzie.com.br
Universidade Presbiteriana Mackenzie, Escola de Engenharia

**Alcides Ferreira da Silva** – nagu@terra.com.br
Universidade Presbiteriana Mackenzie, Escola de Engenharia

***Resumo:*** *Este trabalho procura analisar como os professores têm se comportado perante os desafios encontrados em ensinar esta disciplina, Álgebra Linear, para os alunos dos cursos de engenharia. Talvez seja oportuno mencionar um pequeno histórico sobre esta disciplina e mostrar que o assunto é relativamente novo. Dentre as várias situações concretas em que os métodos de Álgebra Linear são úteis, será mostrado um exemplo de possível aplicação nos cursos de engenharia que é o estudo das tensões em estruturas, por exemplo, em vigas. Espera-se que, com este resultado, encontremos uma forma de atenuar as dificuldades encontradas na preparação dos estudantes, que cursam esta disciplina.*

***Palavras-chave:*** *Álgebra Linear, ensino na engenharia, formação acadêmica.*

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é resultado de discussões sobre os conteúdos da disciplina Álgebra Linear. Apesar dos debates, não há consenso sobre as melhores soluções e a aprendizagem dessa disciplina.

Os docentes que ministram essa disciplina têm consciência das dificuldades no processo ensino-aprendizagem e procuram soluções para amenizar o problema. Muitos colegas deixam essas dificuldades restritas às salas de aula, mas num evento como este, em que são discutidos os problemas envolvendo o ensino na engenharia, consideramos importante divulgar experiências com outros grupos de professores, que trabalham com a mesma disciplina.

## 2 O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR

A preocupação crescente de que o curso de Álgebra Linear, presente nas universidades, não satisfaz às necessidades dos estudantes adequadamente, incita a nós professores a refletirmos sobre o problema.

Através de análises e reflexões estamos à procura da redução dos insucessos voltados a esta disciplina. A receptividade do tema que apresentaremos mostra a necessidade de uma modificação profunda no ensino desta disciplina.

Para podermos compreender a complexidade que é gerada no ensino da Álgebra Linear, pesquisamos alguns livros em que os autores dispõem os tópicos de formas distintas: alguns autores utilizam aplicações evitando as demonstrações, outros autores primam por suas demonstrações e deixam poucos exemplos de aplicação.

Para os cursos de engenharia, os alunos têm muita dificuldade em acompanhar os tópicos descritos em quaisquer das duas situações descritas acima.

A difícil escolha por um livro texto reflete a necessidade de seleção dos assuntos visando à integração da teoria com a prática. Nossa contribuição neste trabalho é a de aproximar o diálogo entre a teoria e a prática que pode ser equilibrada dependendo da escolha, feita pelos professores, do livro adotado, e da linha escolhida na seqüência desses tópicos.

Poderíamos mencionar como exemplo cursos de Álgebra Linear em que se passa todo o tempo trabalhando somente com a álgebra matricial.

## 2.1 A necessidade de aplicações

Nos últimos anos a práxis pedagógica no ensino da Álgebra Linear permanece inalterada, isto é, o curso continua sendo ministrado de forma abstrata.

A responsabilidade da reprovação, nos Cursos de Engenharia, está sempre voltada para o Cálculo, pois este tem uma história de aproximadamente 200 anos, porém isto não deve fazer com que se esqueça que os índices de reprovação em Álgebra Linear estão aumentando a um passo rápido.

Na realidade, as aplicações para as definições aprendidas em Álgebra Linear são várias, mas de difícil acesso, pois nem todos os professores das disciplinas específicas as utilizam.

Os alunos cobram de seus professores qual a utilidade da Álgebra Linear. A luta entre a utilidade e a beleza matemática é o enigma que o professor tem que resolver. A posição dessa disciplina na grade escolar dificulta a explicação das aplicações, pois os alunos ainda não têm conhecimento técnico necessário para utilizarem tais aplicações.

Geralmente o conceito de vetor geométrico antecede o de vetor como elemento de um espaço vetorial, dificultando, por parte dos alunos, o entendimento.

## 2.2 Motivos históricos

A história da Álgebra Linear é antiga. Rastros podem ser encontrados em um livro chinês chamado Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática ($\pm$250 a. C.), onde se encontra uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. No texto há problemas que levam a sistemas de equações lineares cuja resolução se faz pelo método das matrizes, como seria chamado hoje (EVES, 2004).

Em um trabalho, que data de 1683, de Seki Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, a idéia de determinante veio à luz. Ele sistematizou o velho processo chinês para o caso de duas equações.

Embora se atribua a Leibniz a criação da teoria dos determinantes, foi Kowa que dez anos antes já havia feito tais considerações.

Mas a Álgebra Linear moderna data de 1843 com William Rowan Hamilton a quem se deve o termo vetor. Historicamente, existe uma estreita relação entre a Geometria Analítica e a Álgebra Linear, que teve seu início no sistema cartesiano de coordenadas de vetores em duas e três dimensões.

O estudo da Álgebra Linear foi estendido para considerar espaços arbitrários ou de dimensão infinita.

Embora não se possam visualizar vetores facilmente em n-espaço, tais vetores ou n-uplas são úteis para representar dados.

No presente, a Álgebra Linear adquiriu riqueza e versatilidade com o desenvolvimento da informática e ela é utilizada por qualquer programa "rodado" no computador, mas, mesmo através de todo tempo, ela continua a ser uma ciência muito abstrata.

O grande desafio está em compreender as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão da matemática. De acordo com Duval,

> *Não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática [...] não é formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização* (MACHADO, (org.),2000).

Ao apresentar um problema para os alunos, o professor pode mostrar que aquele assunto tem diferentes abordagens cognitivas e a grande colaboração do professor é fazer com que seu aluno organize as informações por ele recebidas.

O conhecimento humano não tem limites. Tudo que está ao nosso redor interessa. Mas como levar esses objetos do conhecimento para dentro da escola e fazer constar do currículo?

Em particular, centrando ao nosso estudo, nos conteúdos curriculares em Álgebra Linear que são bem menores do que o objeto de conhecimento ao qual se referem.

O exemplo que escolhemos "tensões" é de grande importância em diversas áreas da física, mas nem de longe é um assunto simples. Para ser transformado em um conteúdo curricular, ele deve incluir outros conhecimentos, como a forma de ensinar, a de aprender, a idade dos alunos, os valores educativos da escola, etc.

Para fazer a transposição didática é necessário se levar em conta os pontos levantados acima, pois permitirá que o "saber sábio" (aquele que os cientistas descobrem) passe para o "saber a ensinar" (aquele que está nos livros didáticos) e possam ser reconstruídos, compreendidos e aplicados no contexto em que o aluno está inserido.

Segundo Chevallard (apud PINHO ALVES, 2001), a transposição didática é entendida como um processo, no qual,

> *Um conteúdo do saber que foi designado como saber a ensinar sofre a partir daí, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que transforma um objeto do saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de Transposição Didática.*

A seguir, apresentamos um material tratando do assunto que escolhemos: "tensões". Omitiremos por vezes detalhes, mas nosso objetivo não é fornecer todas as definições do referido assunto, mas enriquecer as aplicações existentes em Álgebra Linear.

## 3 TENSÕES

Uma possível aplicação de técnicas estudadas nos cursos de Álgebra Linear para engenharia é o estudo das tensões em estruturas, por exemplo, em vigas. As definições e os resultados a seguir foram obtidos em Zagottis (1982). Para complementar, também foi utilizado Mori (1977).

## 3.1 Definições

Seja $V$ um sólido que está em equilíbrio, ou seja, a resultante das forças externas e internas é nula. Considere um ponto $P$ interior a um sólido $V$, e um plano $\alpha$ que passa por $P$ e divide $V$ em duas partes. Seja $\vec{n}$ um versor normal ao plano $\alpha$.

Seja $\Delta S$ a área de uma superfície em $\alpha$ e que passa por $P$. Seja $\Delta\vec{F}$ a força transmitida entre as duas partes do sólido. Assim, a tensão em $P$, no plano $\alpha$ (ou tensão em $P$ associada a $\vec{n}$) é definida por

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(P,\vec{n}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \tag{1}$$

Seja $\vec{\tau}$ um vetor pertencente ao plano $\alpha$ de modo que o vetor $\vec{\rho}$ possa ser decomposto de modo único como $\vec{\rho} = <\vec{\rho},\vec{n}>\vec{n} + \vec{\tau}$. A tensão $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(P,\vec{n}) = <\vec{\rho},\vec{n}>\vec{n}$ é a tensão normal em $P$ associada a $\vec{n}$, e a tensão $\vec{\tau}$ é a tensão tangencial em $P$ associada a $\vec{n}$.

## 3.2 Tensões no tetraedro

Seja Oxyz o sistema de coordenadas para o sólido $V$. Assim, os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ formam a correspondente base ortonormal de $IR^3$.

Construa um tetraedro de modo que três de seus lados estejam nos planos xy, xz e yz e que o quarto lado tenha face perpendicular a $\vec{n}$. Esse tetraedro deve ser suficientemente pequeno, de modo que as tensões nos diversos pontos sejam as correspondentes tensões em $P$ (ver Figura 1). Este tetraedro está em equilíbrio dinâmico.

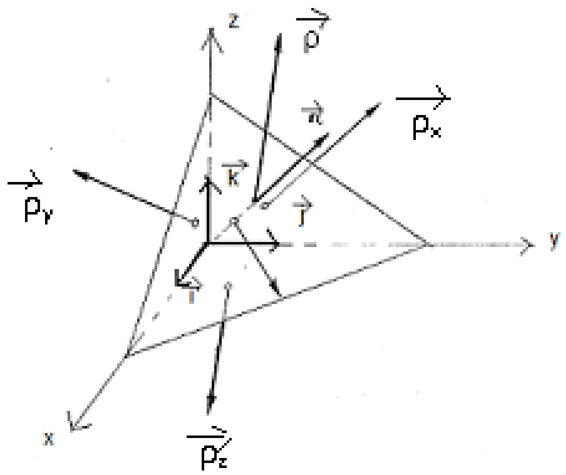


Figura 1 - Tetraedro infinitesimal

Note que, por construção, as normais externas às quatro faces do tetraedro são $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$ e $\vec{n}$. Assim, as tensões em $P$ associadas a esses vetores são, respectivamente, $\vec{\rho}_x = \vec{\rho}(P,-\vec{i})$, $\vec{\rho}_y = \vec{\rho}(P,-\vec{j})$, $\vec{\rho}_z = \vec{\rho}(P,-\vec{k})$ e $\vec{\rho} = \vec{\rho}(P,\vec{n})$.

Além disso, considere o versor $\vec{n}$ decomposto em $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$. Desse modo, temos que as áreas das faces do tetraedro, correspondentes a $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$, $\vec{\rho}_z$ são dadas por $A \cdot n_x$,

$A \cdot n_y$ e $A \cdot n_z$ em que $A$ é a área da face do tetraedro perpendicular a $\vec{n}$. Assim, as forças correspondentes a cada tensão são dadas por $\vec{\rho}_x \cdot A \cdot n_x$, $\vec{\rho}_y \cdot A \cdot n_y$, $\vec{\rho}_z \cdot A \cdot n_z$ e $\vec{\rho} \cdot A$. Portanto, como as forças no tetraedro estão em equilíbrio, temos que

$$\vec{\rho}_x \cdot A \cdot n_x + \vec{\rho}_y \cdot A \cdot n_y + \vec{\rho}_z \cdot A \cdot n_z + \vec{\rho} \cdot A = 0 . \tag{2}$$

Mas, isso implica

$$\vec{\rho}_x n_x + \vec{\rho}_y n_y + \vec{\rho}_z n_z + \vec{\rho} = 0 , \tag{3}$$

ou seja,

$$\vec{\rho} = -\vec{\rho}_x n_x - \vec{\rho}_y n_y - \vec{\rho}_z n_z . \tag{4}$$

Logo, o estado de tensões em um ponto $P$ fica inteiramente caracterizado pelo conhecimento dos três vetores $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$ e $\vec{\rho}_z$.

Uma forma de se trabalhar a expressão $\vec{\rho} = -\vec{\rho}_x n_x - \vec{\rho}_y n_y - \vec{\rho}_z n_z$ é via operadores lineares, já que estes ficam inteiramente determinados quando seus valores nos vetores da base são dados.

Sendo $T$ o operador linear, então

$$T(\vec{n}) = T(n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}) = n_x T(\vec{i}) + n_y T(\vec{j}) + n_z T(\vec{k}) \tag{5}$$

e, se os valores de $T(\vec{i})$, $T(\vec{j})$ e $T(\vec{k})$ são conhecidos, $T(\vec{n})$ está determinado. Se considerarmos o operador $T$ tal que $T(\vec{i}) = -\vec{\rho}_x$, $T(\vec{j}) = -\vec{\rho}_y$ e $T(\vec{k}) = -\vec{\rho}_z$ então

$$T(\vec{n}) = -n_x \vec{\rho}_x - n_y \vec{\rho}_y - n_z \vec{\rho}_z = \vec{\rho} = \vec{\rho}(P,\vec{n}) . \tag{6}$$

Portanto, o operador $T$ leva o vetor $\vec{n}$ na tensão $\vec{\rho}(P,\vec{n})$ associada a $\vec{n}$. Esse é chamado operador das tensões.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tópico "tensões" é, geralmente, desenvolvido em "Resistência dos Materiais", disciplina ministrada a partir do 3º semestre dos cursos de engenharia.

A aplicação deste tópico permite ao professor de Álgebra Linear (2º semestre) apresentar o termo tensões facilitando a sua utilização nas disciplinas seguintes, além de fazer uso de produto interno (cálculo da tensão normal em $P$ associada a $\vec{n}$, $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(P,\vec{n}) = < \vec{\rho},\vec{n} > \vec{n}$) e de operadores lineares (definição do operador das tensões).

Se o professor possuir um pouco mais de tempo, ele pode continuar os estudos das tensões, abordando as chamadas tensões principais, que podem ser obtidas através de cálculos que envolvem autovalores e autovetores, utilizando, portanto, mais um tópico estudado em Álgebra Linear.

Se as disciplinas básicas conseguissem apresentar aplicações de tópicos a serem estudados pelas disciplinas específicas do curso de engenharia, faria com que houvesse uma integração dos conteúdos apresentados, respeitando o contexto no qual o aluno está inserido.

O uso da transposição didática é necessário permitindo que o “saber sábio” passe para o “saber a ensinar” e os tópicos possam ser apresentados e compreendidos na fase em que o aluno se encontra.

## 5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004. p. 243.

MACHADO A. D.S. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MORI, Y., LENK, D. **Reologia**. Notas de Aula – Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 1977. p.109.

PINHO ALVES, J. **Regras da Transposição Didática aplicada ao Laboratório Didático.** Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 17. nº 2. Agosto 2000. p. 174-188.

ZAGOTTIS, D. **Introdução à teoria das estruturas**. Escola Politécnica, São Paulo, 1982.

## TENSIONS: AN APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA FOR ENGINEERING STUDENTS

***Abstract:*** *This work tries to analyze how the challenges found in teaching this discipline, Linear Algebra, for the pupils of the engineering courses, have been faced. Perhaps it is opportune to mention a small historical context of this discipline and to show that the subject is relatively new. Among some concrete situations where the methods of Linear Algebra are useful, it will be shown an example of possible application in the engineering courses that is the study of the tensions in structures, for example, in beams. It is expected that, with this result, one can find a way to attenuate the difficulties found in the preparation of the students, who attend this course.*

***Key-words:*** *Linear Algebra, education in engineering, academic formation.*