

## **SOBRE UM MÉTODO DE TRAÇADO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS SEM O USO DE LINGUAGEM MATRICIAL**

**Antonio Carlos Rigitano** – rigitano@feb.unesp.br

**Aldo Theodoro Gaiotto Jr** – maldo@feb.unesp.br

**Fernando Hideki Hirose** – ra510051@feb.unesp.br

UNESP – Faculdade de Engenharia de Bauru, Departamento de Engenharia Civil.

Rua Eng. Luiz Edmundo C. Coube nº 14-01.

17.036-360 – Bauru – SP

***Resumo:** O objetivo deste trabalho é apresentar a concepção de um método para utilização em projetos de iniciação científica na Faculdade de Engenharia de Bauru, que consiste na geração de fórmulas analíticas, elaboração de fluxogramas e traçado de linhas de influência de vigas retas isostáticas e hiperestáticas, tópico clássico das disciplinas de teoria das estruturas. São resolvidos dois estudos de caso de reações de apoio, sendo que o primeiro deles, uma viga simplesmente apoiada, serve de roteiro para o segundo, que trata de viga sob três apoios. Para a solução optou-se pela não utilização de linguagem matricial empregando-se o Processo dos Esforços. Considerando a necessidade de manipulações algébricas, elas são realizadas no ambiente computacional do aplicativo Mathematica, onde se explora principalmente a integração analítica das funções envolvidas. Trata-se de proposta para motivar o desenvolvimento de atividades com ferramentas computacionais mais sofisticadas de matemática no curso de engenharia civil e terá como subproduto a redação de material didático em forma de apostila. Os resultados preliminares foram utilizados na elaboração de dois programas no ambiente de calculadoras da marca HP, que farão parte de uma biblioteca destinada a profissionais que trabalham em pequenas empresas de engenharia.*

***Palavras-chave:** Linhas de influência, Programação, Gráficos, Mathematica.*

### **1 INTRODUÇÃO**

Este artigo apresenta a concepção de um método que vem sendo utilizado na etapa inicial de dois projetos de iniciação científica em desenvolvimento na Faculdade de Engenharia de Bauru, cujo objetivo é o de tratar do projeto de estruturas submetidas a cargas móveis, através da formulação e traçado de linhas de influência.

Publicações que dizem respeito à descrição de modelos e produção de animações destinadas ao ensino de teoria das estruturas vem sendo feitas no Cobenge (VENTRI & LINDENBERG Neto, 2002), (FRANÇA Filho & LINDENBERG Neto, 2004), sendo a proposta deste trabalho contribuir nessa linha de pesquisa com o fornecimento de fórmulas

analíticas de linhas de influência sem o uso de linguagem matricial, abrindo a possibilidade de seu uso no cálculo de esforços solicitantes extremos por derivação e integração exatas.

É sabido que existem aplicativos disponíveis que fornecem diagramas de linhas de influência (MARTHA, 2007), porém são escassos os que possibilitam a obtenção de envoltórias de esforços solicitantes, problema mais específico e conduzido em separado, que será tratado como seqüência natural deste trabalho.

Aplicações automatizadas podem ser encontradas na literatura técnica, porém sem o registro de maiores detalhes, mostrando somente resultados de processamento (PFEIL, 1983), sendo importante observar que tais programas computacionais, na maior parte das vezes, são desenvolvidos em escritórios especializados, do tipo “caixa preta”, o que se pretende evitar com o fornecimento de fluxogramas, principal motivação dos autores.

A idéia iniciou-se com a meta de produzir texto destinado a profissionais que trabalham em pequenos escritórios de engenharia, procura seguir caráter objetivo de publicação bastante útil à sua época (ANGER, 1949), acresce material destinado à elaboração de programas a exemplo de diversos autores (GERE & WEAVER, 1981) e conforme já comentado, sem a utilização de linguagem matricial.

Para isso, amplia-se o conceito adotado na solução de estruturas isostáticas (LINDENBERG Neto, 2005), estendendo-o às vigas contínuas hiperestáticas, de modo a se obter formulário que possibilite utilizar ambiente mais acessível, como, por exemplo, o das calculadoras portáteis.

A meta é preencher a lacuna destacada, introduzir a aprendizagem de aplicativo para o trabalho com expressões algébricas, incentivar uma formação mais abrangente em informática e utilizar esse conjunto na solução de problemas do cotidiano dos profissionais da engenharia.

Considerando que na bibliografia consultada existe pouca referência a esse tipo de abordagem, o escopo adotado consiste em resumir conceitos básicos destinados à compreensão teórica do problema, fazer o uso de linguagem simbólica de um processador matemático na resolução, propor uma organização para elaborar uma coleção de fórmulas e preparar fluxogramas para programação computacional.

São mostrados os resultados obtidos para dois estudos de caso que foram programados no ambiente das calculadoras da marca HP, observando-se ainda um subproduto, que é o material a ser utilizado na elaboração de apostila destinada a disciplinas do curso de graduação em engenharia civil de nossa faculdade.

## **2 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS**

O problema de se obter esforços extremos provocados nas estruturas por efeito de cargas móveis é tema bastante conhecido e pode ser encontrado em diversas publicações, sendo clássica a solução através do traçado das denominadas linhas de influência.

Define-se linha de influência de um efeito elástico em uma dada seção  $S$  de uma estrutura como a representação gráfica ou analítica do valor desse efeito naquela seção, produzido por uma carga concentrada unitária, de cima para baixo, que a percorre (SÜSSEKIND, 1977).

Tal definição, bastante geral, permite resolver o problema desenhando-se os diagramas das solicitações desejadas para algumas posições previamente escolhidas da carga unitária através de processo espontâneo, que é conveniente para as estruturas isostáticas embora mais trabalhoso para estruturas hiperestáticas, para as quais recomenda-se um processo denominado semi-espontâneo (PFEIL, 1983).

Para evitar essas variantes, apresenta-se neste texto um método de se obter expressões analíticas das linhas de influência a partir de conceituação mais recente (LINDENBERG Neto, 2005), que trata do traçado de linhas de influência em vigas retas de seção transversal constante para vigas isostáticas numa formulação bastante simples, aplicada às vigas hiperestáticas.

Com esse objetivo, são feitas considerações nos próximos sub itens, que tratam a questão de se obter formulário analítico, embora seja possível a redação de expressões a partir do processo espontâneo, conveniente para os casos das vigas retas isostáticas, onde as funções envolvidas são do primeiro grau, processo que não é prático quando aplicado aos casos hiperestáticos nos quais as funções resultantes são polinômios do terceiro grau.

## 2.1 Expressões analíticas de linhas de influência de vigas isostáticas

Para as estruturas isostáticas, as expressões analíticas das linhas de influência são relativamente simples de se obter através das tradicionais equações de equilíbrio.

Assim procedendo, é fácil verificar no exemplo a seguir, para o qual é obtida uma expressão analítica da reação de apoio de uma viga simplesmente apoiada, que esse conceito pode ser estendido às demais solicitações, ou sejam aos esforços cortantes e momentos fletores, uma vez que eles são as próprias expressões das linhas de influência.

Assim, considere-se a viga mostrada na Figura 1, sobre a qual se desloca uma força unitária adimensional, onde  $z$  representa a distância dessa carga em relação a uma origem localizada no apoio  $A$ , sendo  $x$  a coordenada da seção  $S$  que se quer estudar.

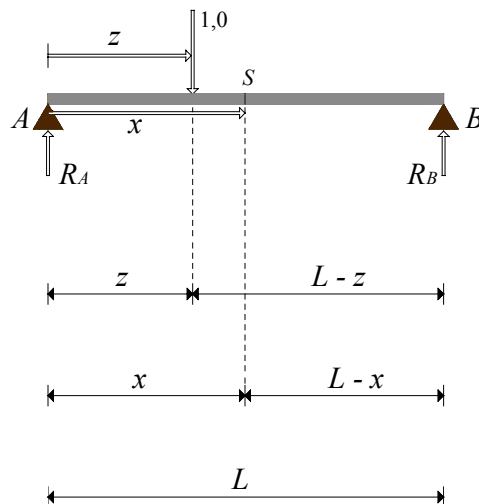


Figura 1 – Viga simplesmente apoiada.

Com o emprego da conhecida equação de equilíbrio  $\sum M_B = 0$ , a reação de apoio em  $A$  é dada por:

$$R_A = 1 - \frac{z}{L} \quad (1)$$

observando-se que a Equação (1) já expressa analiticamente a linha de influência, (LINDENBERG Neto, 2005), e se trata de uma função do primeiro grau que assim se redige:

$$L.I.R_A = 1 - \frac{z}{L} \quad (2)$$

Seguindo tal procedimento para a outra reação de apoio e demais esforços internos solicitantes, é possível organizar resultados no estilo mostrado na Figura 2.

Reação de apoio	Esforço cortante	Momento fletor
<b>Apoio A</b>	<b>1º Trecho</b>	<b>1º Trecho</b>
$L.I.R_A = 1 - \frac{z}{L}$	$L.I.V_S = -\frac{z}{L}$	$L.I.M_S = \frac{z}{L}(L - x)$
<b>Apoio B</b>	<b>2º Trecho</b>	<b>2º Trecho</b>
$L.I.R_B = \frac{z}{L}$	$L.I.V_S = 1 - \frac{z}{L}$	$L.I.M_S = x\left(1 - \frac{z}{L}\right)$

Figura 2 – Expressões analíticas de linhas de influência para viga simplesmente apoiada.

A construção de tabelas similares para outros casos é a meta do trabalho e tem o objetivo de fornecer subsídios para a elaboração de programas que forneçam gráficos e resultados numéricos, servindo de exemplo para ampliação do conceito às estruturas hiperestáticas, conforme será mostrado no próximo sub item.

## 2.2 Expressões analíticas de linhas de influência de vigas hiperestáticas

Seja a viga sob três apoios mostrada na Figura 3, para a qual se quer deduzir a expressão analítica da reação vertical em A.

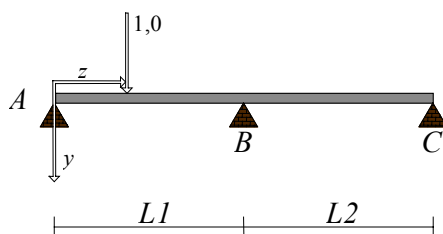


Figura 3 – Viga sob três apoios.

Utilizando-se o Processo dos Esforços para consecução desse objetivo, escolhe-se o sistema principal ilustrado na Figura 4, no qual  $X_I$  é a denominada incógnita hiperestática que se quer determinar.

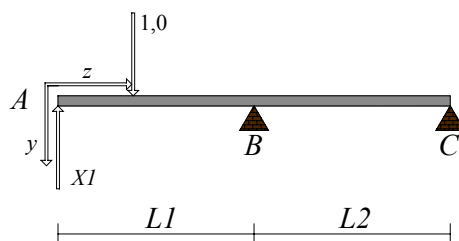


Figura 4 – Sistema principal com carregamento externo e hiperestático  $X_I$ .

Isso providenciado emprega-se o princípio da superposição dos esforços para obter o tradicional modelo indicado na Figura 5, que representa o sistema principal com o carregamento externo somado ao sistema principal com o hiperestático  $X_I$  tomado unitário. Ressalte-se a redação analítica dos diagramas de momento.

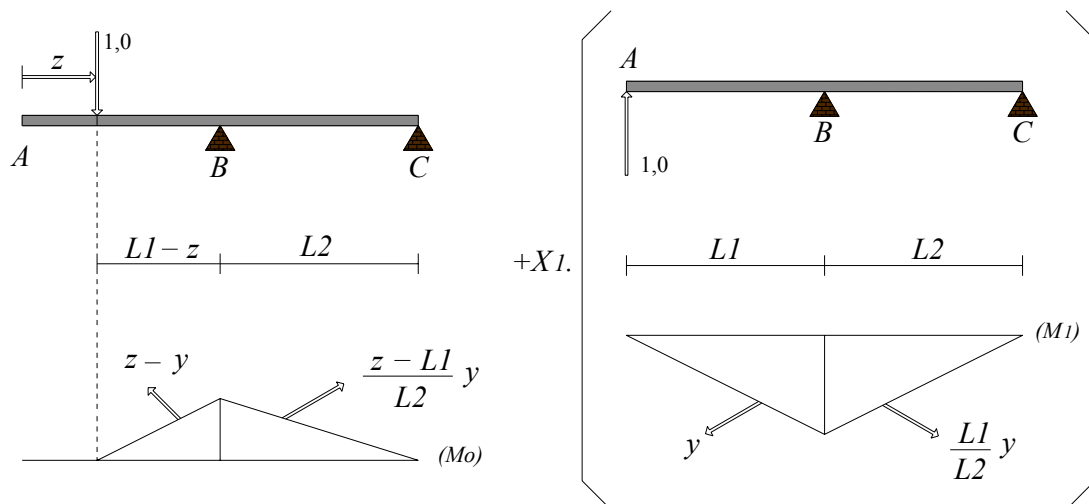


Figura 5 – Superposição de efeitos: carregamento externo e hiperestático.

Indexando os deslocamentos verticais do ponto  $A$  e redigindo a equação de compatibilidade pertinente, tem-se que:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \quad (3)$$

e as parcelas  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$  dadas respectivamente por:

$$\delta_{10} = \int_z^{L1} (z-y)y dy + \int_0^{L2} \left( \frac{z-L1}{L2} \right) y^2 dy \quad \delta_{11} = \int_0^{L1} y^2 dy + \int_0^{L2} \left( \frac{L1}{L2} y \right)^2 dy \quad (4)$$

sendo que a solução da Equação (3) fornece, a exemplo da Equação (2), a expressão analítica da linha de influência procurada, ou seja:

$$LIR_A = X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} \quad (5)$$

Para tornar mais práticas as manipulações algébricas envolvidas, as Equações (4) e (5) foram resolvidas em um aplicativo de manipulação algébrica, o Mathematica, ambiente no qual se obtém a fórmula analítica da linha de influência, que é a função do terceiro grau dada por:

$$LIR_A = \frac{(L1-z)(2L1^2 + 2L1L2 - L1z - z^2)}{2L1^2(L1+L2)} \quad (6)$$

Seguindo-se procedimento análogo para a carga posicionada no segundo tramo, ou seja, entre os pontos  $B$  e  $C$ , obtém-se outra fórmula que consta na Figura 6 e que completa o percurso da carga móvel em toda a estrutura.

Cumpra-se observar que o trabalho que está sendo desenvolvido trata de deduzir os demais casos necessários para a completa análise da viga, bem como da solução de outros esquemas estruturais mais comuns, cujos resultados serão publicados em outra oportunidade.

REAÇÃO DE APOIO	
Carga percorrendo o 1º tramo	Carga percorrendo o 2º tramo
Apoio A	Apoio A
$LIR_A = \frac{(L1 - z)(2L1^2 + 2L1L2 - L1z - z^2)}{2L1^2(L1 + L2)}$	$LIR_A = \frac{(L1 - z)(L1 + L2 - z)(L1 + 2L2 - z)}{2L1L2(L1 + L2)}$

Figura 6 – Expressões analíticas da linha de influência de  $R_A$  para viga sob três apoios.

### 3 EXEMPLOS DE FLUXOGRAMAS E GRÁFICOS

Neste tópico são mostrados fluxogramas para a solução das linhas de influência de reações de apoio para as Figuras 1 e 3. Os valores numéricos e os gráficos foram obtidos em programa redigido no ambiente das calculadoras da marca HP.

#### 3.1 Exemplo para viga isostática sob dois apoios.

O fluxograma apresentado na Figura 7, diz respeito ao gráfico da linha de influência e de seus valores numéricos para décimos de vão do caso bastante simples da reação de apoio  $R_A$  da viga da Figura 1 e foi desenvolvido para iniciar a produção de uma biblioteca de programas.

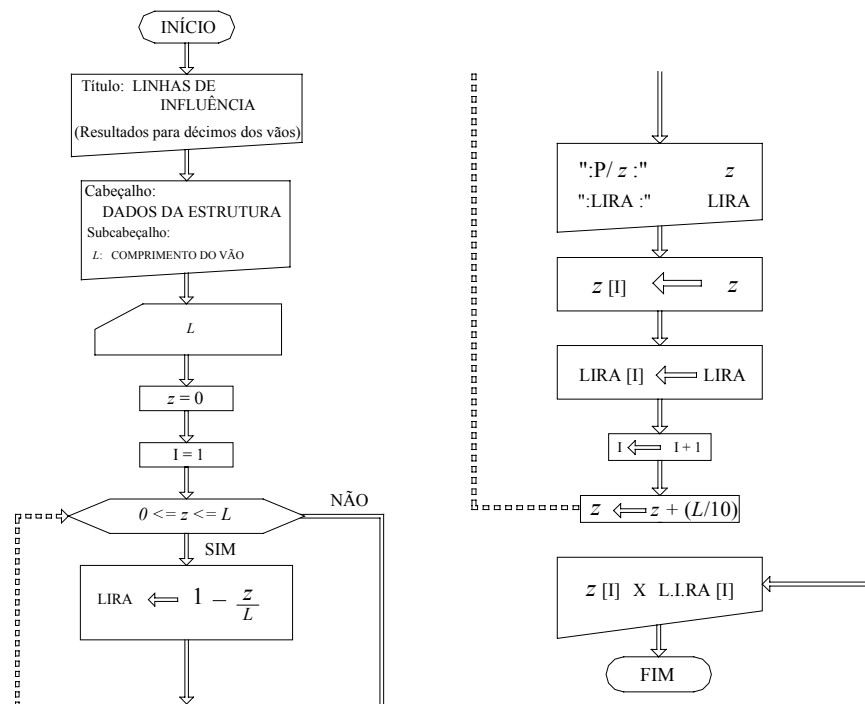


Figura 7 – Fluxograma para programa da LI da reação  $R_A$  - viga simplesmente apoiada.

Os resultados obtidos com o uso de calculadora da marca HP são mostrados na Figura 8 e expressam a parte inicial dos programas que estão sendo desenvolvidos e que serão disponibilizados em página a ser criada na internet.

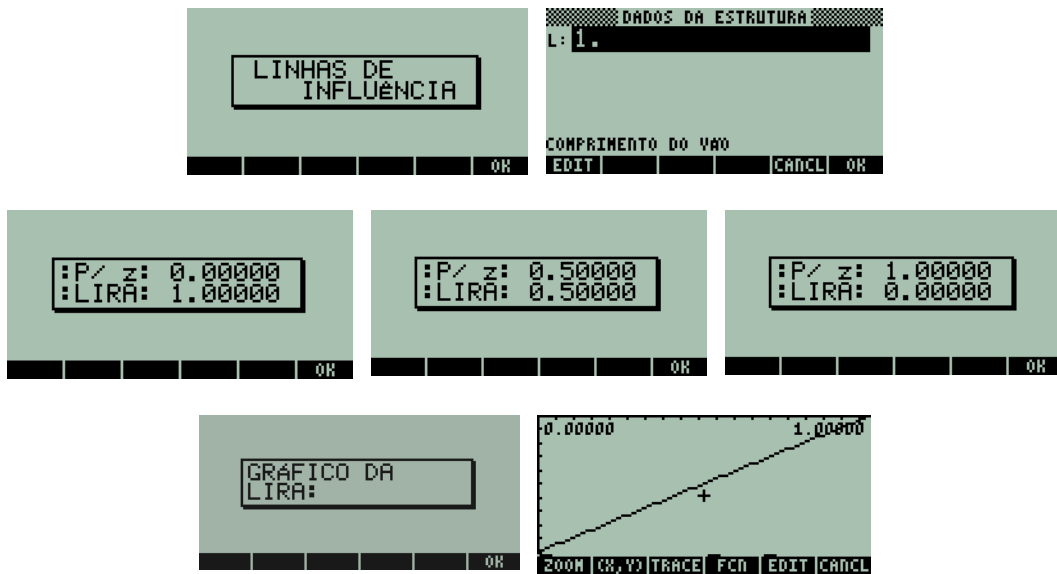


Figura 8 – Viga simplesmente apoiada – Saídas do programa.

### 3.2 Exemplo para viga hiperestática sob três apoios

Apresenta-se na Figura 9 o fluxograma da linha de influência de reação de apoio  $R_A$  da viga hiperestática mostrada na Figura 3, seguindo os mesmos passos do caso anterior.

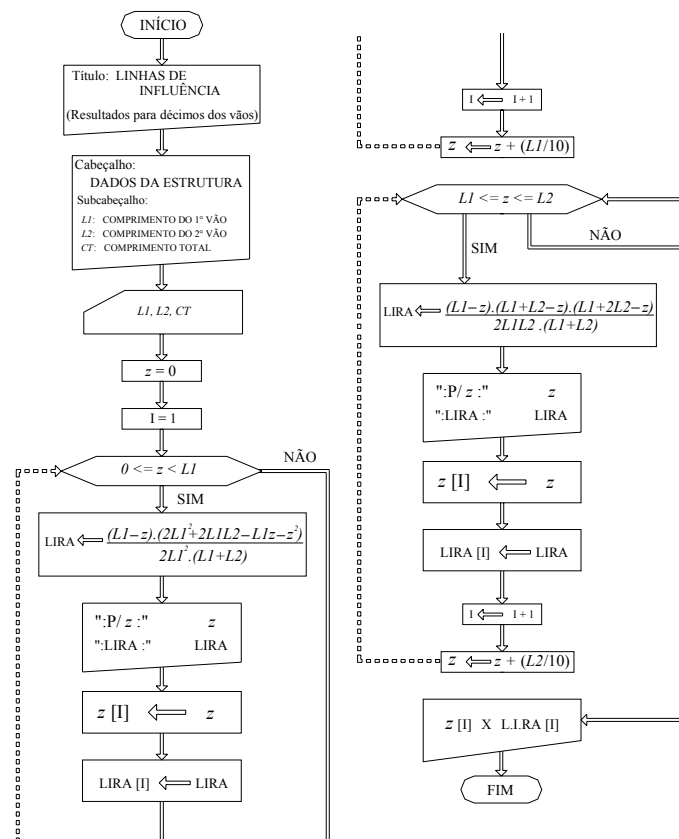


Figura 9 – Fluxograma para programa da LI da reação  $R_A$  - viga sob três apoios.

Os resultados obtidos no mesmo ambiente do exemplo anterior, ou seja, em uma calculadora da marca HP, encontram-se mostrados na Figura 10.



Figura 10 – Viga sob três apoios - Saídas do programa.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A concepção do projeto de pesquisa apresentada procura resumir passos indispensáveis para a obtenção de expressões analíticas de traçado de linhas de influência.

O roteiro proposto permite a consecução dos demais esforços reativos e internos para outras concepções de vigas contínuas e vem sendo utilizado para o preparo de uma biblioteca de programas dos tipos estruturais mais comuns utilizados nos projetos de pontes, enfatizando-se que as manipulações algébricas são realizadas em processador matemático.

Quando se trabalha com programação em calculadoras da marca HP, especial cuidado deve ser observado com relação à limitação da memória, recomendando-se subdivisões dos fluxogramas, de modo a reduzir o número de comandos a utilizar, que em termos práticos significa elaborar programas mais específicos e menores.

Consta-se que a capacitação pretendida em termos de qualificação profissional tem sido eficaz e a motivação para a execução desse tipo de projeto tem propiciado um ambiente de trabalho que fomenta a produção de aplicações práticas destinadas a pequenas empresas de engenharia e nesse sentido, tem sido possível gerar tecnologia para minimizar custos referentes à aquisição de programas mais sofisticados.

Como prosseguimento da pesquisa, pretende-se resolver o problema do cálculo de valores extremos das funções e construir uma série de fluxogramas, uma vez que as expressões deduzidas permitem derivação e integração analíticas, fornecendo valores exatos dos esforços solicitantes.

#### *Agradecimentos*

Os autores agradecem a Comissão de Pesquisa da Faculdade de Engenharia de Bauru e à FAPESP.



## 5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGER, G. **Linhas de influência para vigas contínuas**. 1. ed. São Paulo: Todtmann, 1949.

FRANÇA Filho, L.; LINDENBERG Neto, H. **Resistência dos materiais com descrição, modelos e história dos conceitos**. In: COBENGE – CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA. Brasília: UnB, 2004. CD-ROM.

GERE, J.; WEAVER, W. Jr. **Análise de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

LINDENBERG Neto, H. **Introdução à mecânica das estruturas**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005. Cap. 6.

MARTHA, L.F. Homepage do programa Ftool. **Two dimensional frame analysis tool**. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>>. Acesso em: 14 fev. 2007.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1983.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1977.

VENTRI, D.A.; LINDENBERG Neto, H. **O uso de animações para introduzir conceitos fundamentais da mecânica das estruturas: relato e avaliação da experiência**. In: COBENGE – CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA. Piracicaba: Universidade Metodista de Piracicaba e Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2002. CD-ROM.

### ON A METHOD FOR GENERATING INFLUENCE LINES OF BEAMS WITHOUT THE USE OF MATRIX LANGUAGE

**Abstract:** *The aim of this work is to present the conception of a method that is being used in scientific initiation projects in the College of Engineering of Bauru, that consists of the generation of analytical formulas, flowcharts elaboration and graphs production of influence lines in straight hiperstatic beams, topics of structure's theory. Two case studies of support reactions calculus are made, the first one of them, applied to a simply supported beam, guides the script for the sequence, a three point supported beam. Force Methods was adopted, avoiding matrix language. Considering pertaining algebraic manipulations, they are carried in computational environment Mathematica, where analytical integration of the involved functions was made. One is proposal to motivate more sophisticated computational tools activities with mathematics in civil engineering and will have as by-product the writing of didactic text. The preliminary results shown here had been used in elaborating programs in HP calculator's environment that will be part of a library for professionals who deals with structural design in small engineering companies.*

**Key-words:** *Influence lines, Programming, Graphs, Mathematica.*