



Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006.
ISBN 85-7515-371-4

PRINCÍPIOS BÁSICOS PARA UMA PROPOSTA DE ENSINO SOBRE ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS

Enzo B. Mariano – enzo@gmail.com

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), Departamento de Engenharia de Produção
Endereço Avenida Trabalhador São-carlense,
CEP – São Carlos - SP

Mariana R. Almeida – almeidamariana@yahoo.com

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), Departamento de Engenharia de Produção
Endereço Avenida Trabalhador São-carlense,
CEP – São Carlos - SP

Daisy A. N. Rebelatto – daisy@prod. eesc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), Departamento de Engenharia de Produção
Endereço Avenida Trabalhador São-carlense,
CEP – São Carlos - SP

Resumo: *O objetivo do presente trabalho é sistematizar, de maneira objetiva, os principais conceitos e evoluções pertinentes ao cálculo de eficiência, em especial à técnica Análise por Envoltória de Dados (DEA), apresentando-os em linguagem clara e didática. Atualmente, um dos grandes debates no meio acadêmico é sobre como as empresas devem proceder para alcançar a máxima eficiência nos seus processos produtivos, o que é vital para a sobrevivência no mercado globalizado. A técnica DEA é uma das principais ferramentas, apontadas pela literatura, para ajudar na resolução desse problema. Porém, trata-se de uma ferramenta com relativa complexidade técnica e baixa divulgação no meio acadêmico, em especial no nível de graduação. Por meio de uma pesquisa bibliográfico-exploratória são apresentados e discutidos os principais conceitos referentes à Análise por Envoltória de Dados: (a) DMU; (b) produtividade; (c) eficiência; (d) modelos do DEA (com destaque para os modelos CCR e BCC); e (e) fronteira de eficiência. Esses conceitos são tratados de forma lógica e seqüencial e podem servir de base para disciplinas que pretendam contemplar o assunto, assim como para pesquisadores que tenham interesse em iniciar-se na compreensão do tema.*

Palavras-chave: *Análise por envoltória de dados (DEA), Eficiência, Produtividade, Modelos do DEA e fronteira de eficiência.*

1. INTRODUÇÃO

Dentro da grade curricular da Engenharia de Produção, a pesquisa operacional é a disciplina que melhor circunscreve um ambiente complexo, apresentando grande avanço no desenvolvimento de técnicas de análise de eficiência (LOVELL *et al.*, 1988). A Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis - DEA*) surge como uma dessas técnicas, oriundas da Pesquisa Operacional, sendo uma das mais conhecidas para mensurar a eficiência (VILLELA, 2004). Proposta por Charnes, Cooper e Rhodes no ano de 1978, auxiliou de maneira eficaz a resolução do problema do cálculo da eficiência relativa, com base em um modelo de programação linear, e pode ser sistematizada e facilmente resolvida com ferramentas computacionais disponíveis no mercado.

Ao longo dos anos, a técnica DEA apresentou inúmeras aplicações para os mais diversos setores produtivos (PAIVA JR, 2000). Algumas aplicações necessitaram de ajustes nos modelos originais, de acordo com as características peculiares de cada objeto em estudo, o que motivou o surgimento de novos modelos matemáticos para suprir essa deficiência (SEIFORD *et al.*, 1996).

Considerando a complexidade da técnica e a importância relatada, dentro da Engenharia de Produção, fica evidente a falta de trabalhos que sistematizem todas essas informações e conceitos de maneira clara e didática para alunos da pós-graduação e graduação, o que poderá auxiliar acadêmicos, pesquisadores, estudantes e, principalmente, professores que desejem implementar, em suas disciplinas, o ensino sobre técnicas de eficiência. Com isso, o objetivo desse trabalho é sistematizar, de maneira objetiva, os principais conceitos e evoluções pertinentes ao cálculo de eficiência e, em especial, à técnica Análise por Envoltória de Dados, apresentando-os em linguagem clara e didática.

2. MÉTODO

Para alcançar o objetivo proposto, foi empregada, no presente trabalho, uma abordagem bibliográfico-exploratória, desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

De acordo com Gil (1999), a pesquisa exploratória visa proporcionar maior familiaridade com o problema pesquisado, envolve levantamentos bibliográficos, entrevistas e análises de exemplos que estimulem a compreensão.

Cervo e Bervian (1983) indicam como características da pesquisa bibliográfica os seguintes aspectos:

- não ocorrência de pesquisa dupla;
- ter como base trabalhos anteriores;
- base de conhecimento bem determinada através da pesquisa;
- base teórica para o desenvolvimento do trabalho.

No presente trabalho a abordagem bibliográfica-exploratória, foi realizada na pesquisa dos conceitos de análise por envoltória de dados, produtividade, eficiência, fronteira de eficiência e modelos CCR e BCC.

3. CONCEITOS DE ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS

A Análise por Envoltória de Dados (DEA) é uma técnica baseada em programação linear, com o objetivo de medir o desempenho de unidades operacionais ou tomadoras de decisão (DMUs), quando a presença de múltiplas entradas e múltiplas saídas torna difícil a comparação (NETO, MELO e GOMES, 2003; VILELA, 2004).

Casa Nova (2002) define análise por envoltória de dados como sendo uma curva de eficiência (ou de máxima produtividade) considerando a relação ótima entre insumos e produtos. Essa curva pode ser definida como uma fronteira de eficiência. Assim, as unidades consideradas eficientes estarão nessa curva enquanto as ineficientes se localizarão abaixo dela. A fronteira fornecerá os parâmetros para que uma empresa ineficiente se torne uma empresa eficiente. A “Figura 1” ilustra o conceito de fronteira de eficiência.

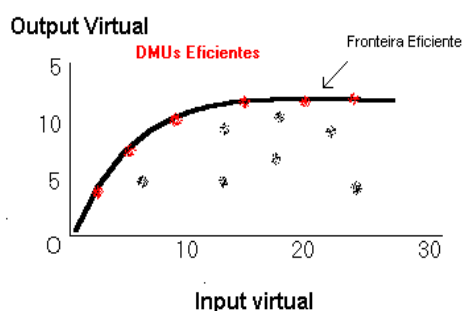


Figura 1 - Fronteira eficiente de produção das DMUs

De acordo Oliveira e Gomes (2003), a análise por envoltória de dados (DEA) é uma abordagem de programação matemática, alternativa aos métodos estatísticos tradicionais, que possibilita estimar a eficiência relativa mediante uma fronteira. Desse modo, o termo fronteira de eficiência denomina quais pontos limitam a produtividade sobre o qual uma unidade produtiva hipotética é tecnicamente eficiente (LORENZETT *et al.*, 2004).

Segundo Avelar (2004), as fronteiras de produção podem ser obtidas por meio de dois tipos de técnicas: as paramétricas e as não-paramétricas. A técnica paramétrica tem como objetivo avaliar a eficiência tomando como base uma função produção. De acordo com Meza (2002), o grande problema desse tipo de método é que eles apresentam, como resultado, uma função produção média e não uma função produção máxima, pois não contemplam os princípios teóricos sobre uma fronteira de produção.

Apesar dos autores acima citados atrelarem a definição do DEA diretamente ao termo fronteira de eficiência pode ser mais conveniente, didaticamente, evoluir o conceito de eficiência a partir do conceito de produtividade e apenas correlacioná-los no momento oportuno.

4. CONCEITO DE PRODUTIVIDADE

O primeiro conceito a ser desenvolvido, para a compreensão da técnica DEA é a respeito da intitulação das unidades organizacionais analisadas para avaliar a eficiência das operações. Essas unidades são denominadas na literatura como unidades tomadoras de decisão (ou *Decision Making Unit* – DMU). De acordo com Casa Nova (2002), uma DMU pode ser definida como toda organização que transforma um conjunto de entradas (*inputs*) em conjunto de saídas (*outputs*), conforme é sintetizado pela “Figura 2”. Uma DMU pode ser um grupo empresarial, uma empresa individual ou uma unidade administrativa. Pode ser do setor produtivo, de serviço ou até mesmo do setor público, podendo ou não visar lucro.

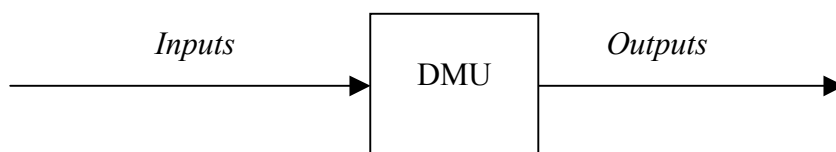


Figura 2 - Representação de uma DMU

Uma das formas para avaliar o desempenho de uma DMU é correlacionando os *outputs* e *inputs* do sistema analisado. O cálculo da razão entre os *outputs* e os *inputs* de uma DMU é denominado como produtividade (CAMPOS, 2004). Logo, a produtividade de uma DMU com um único *input* e um único *output* pode ser calculada pela “Equação 1”:

$$\text{Produtividade} = O / I \quad (1)$$

Em que:

O: quantidade do *output*;

I: quantidade do *input*.

Porém, a complexidade do processo de produção, para DMUs de qualquer natureza, exigiu um procedimento matemático que contemplasse a situação onde uma DMU pode apresentar múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*. O primeiro trabalho da literatura referente ao cálculo da produtividade de uma DMU com múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* foi proposto por Knight (1933) sendo citado por Lovell (1993).

Segundo Beckenkamp (2002), a fórmula de Knight (1933) pode ser compreendida como o cálculo da produtividade para um único *input* virtual e um único *output* virtual. Para compreender melhor, o *input* virtual e o *output* virtual podem ser definidos, respectivamente, como uma combinação linear de todos os *inputs* e de todos os *outputs* referentes a uma DMU. Desse modo, a produtividade pode ser calculada pela “Equação 2”.

$$\text{Produtividade} = \frac{u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + u_3 \cdot y_3 \dots}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 \dots} = O_v / I_v \quad (2)$$

Em que:

u_i : Utilidade (coeficiente de importância) do *output* i ;

y_i : Quantidade do *output* i ;

v_j : Utilidade (coeficiente de importância) do *input* j ;

x_j : Quantidade do *input* j ;

O_v : *Output* virtual;

I_v : *Input* virtual.

A utilidade do *output* i (u_i), também, pode ser denominada como a taxa de troca desse *output*, enquanto a utilidade do *input* j (v_j) pode ser denominada como taxa de substituição desse *input*. Segundo Knight (1933), os coeficientes u_i e v_j poderiam ser calculados com base no preço de mercado desses *inputs* ou *outputs*. No entanto, os preços dos *inputs* e *outputs* não podem ser facilmente encontrados. Além disso, o preço de um *input* ou um *output* nem sempre representa sua real importância.

Com base nos procedimentos matemáticos do DEA, a utilidade de um *input* ou de *output* varia de DMU para DMU. Assim, o cálculo das utilidades u_i e v_j passa a ser um dos maiores

problemas para o cálculo da produtividade, pois definir o peso para cada variável de cada DMU é uma atividade bastante complexa.

5. CONCEITO DE EFICIENCIA

O conceito de eficiência de um objeto é definido como a divisão entre um indicador de desempenho desse objeto e o seu correspondente máximo. Com base nisso, a eficiência de uma DMU pode ser calculada pela “Equação 3”.

$$\text{Eficiência} = P / P_{\max} \quad (3)$$

Em que:

P: Produtividade atual da DMU

P_{\max} : Produtividade máxima que pode ser alcançada por essa DMU.

O resultado do cálculo da eficiência é sempre um valor entre 0 e 1 podendo assim ser expressa em termos percentuais. Além disso é possível calcular dois tipos de eficiência: (a) a eficiência absoluta e a (b) eficiência relativa. Na eficiência absoluta, a produtividade máxima (P_{\max}) é um valor teórico e inatingível (ideal). Por outro lado, na eficiência relativa o P_{\max} é a produtividade da concorrente mais eficiente dessa DMU. Caso a eficiência de uma DMU seja igual a 1 significa que essa unidade é eficiente e se for menor que 1 significa que a unidade é ineficiente.

Caso fosse possível calcular o valor das utilidades dos *inputs* e *outputs* com facilidade, seria possível calcular a eficiência relativa de uma DMU sem precisar de nenhuma técnica específica, utilizando apenas as definições até aqui apresentadas. Todavia, como já foi mencionado, o cálculo desses pesos não é uma tarefa fácil.

O DEA pode ser compreendido, portanto, como uma técnica matemática que calcula os coeficientes de utilidade para uma determinada DMU e fornece, como resultado adicional, a eficiência dessa DMU em relação a DMU que apresentar melhor desempenho, dentre as componentes da amostra analisada. O DEA assume que as utilidades dos *inputs* e dos *outputs* de uma DMU são aquelas que maximizam sua eficiência relativa. Então, o cálculo desses coeficientes pode ser obtido por meio da resolução de um problema de programação matemática.

A literatura apresenta dois modelos para o cálculo da eficiência por meio do DEA: o modelo CCR e o modelo BCC. A diferença entre esses dois modelos é que o CCR calcula a eficiência total e o BCC calcula a eficiência técnica, como ilustrado pela “Figura 3”.

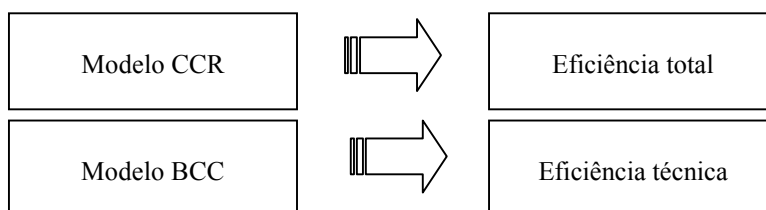


Figura 3 - Correspondência dos modelos matemáticos e o tipo da eficiência calculada

A eficiência total compara uma DMU com todas as concorrentes – grupo estudado - enquanto a eficiência técnica compara uma DMU apenas com aquelas que operam em escala semelhante a sua. Após o cálculo da eficiência técnica e da eficiência total pode-se calcular a eficiência de escala, que pode ser definida como a relacionada ao fato da empresa estar

operando abaixo ou acima de sua escala ótima. Dessa forma, a eficiência de escala é calculada a partir da eficiência técnica e da eficiência total de uma DMU por meio da “Equação 4”.

$$\text{Eficiência de escala} = \text{Eficiência total} / \text{Eficiência técnica} \quad (4)$$

Em que:

Eficiência total: a eficiência calculada pelo modelo CCR

Eficiência técnica: a eficiência calculada pelo modelo BCC

O desenvolvimento de alguns conceitos relacionados à economia de escala certamente auxiliarão na compreensão dos modelos. O conceito de economia de escala pode ser aplicado para compreender o procedimento matemático do modelo BCC. Esse conceito é oriundo da microeconomia, para compor a teoria da produção.

A teoria da produção expressa uma função matemática (chamada função produção) que relaciona as variáveis dos *inputs* e os *outputs* de uma determinada DMU. A função produção, ilustrada pela Figura 4, apresenta pelo menos quatro regiões distintas de retornos à escala: crescente, constante, decrescente e negativo (FERGUSON, 1994)

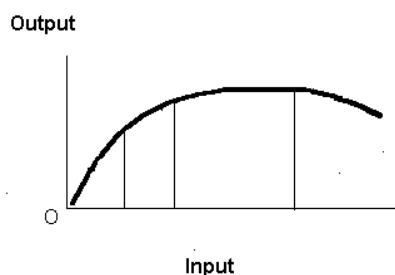


Figura 4 - Gráfico da função produção

Na primeira região (crescente) o aumento no número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente maior no número de *outputs*, o que ocorre quando uma DMU está operando muito abaixo da sua capacidade ótima. Na segunda região (constante) o aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento proporcional nos *outputs*, quando uma DMU está operando na sua capacidade ótima. Na terceira região (decrescente) o aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente menor no número de *outputs*, se uma DMU está operando na acima da sua capacidade ótima. Na quarta região (negativo) o aumento do número de *inputs* ocasiona uma redução no número de *outputs*, quando uma DMU está operando acima da sua capacidade ótima.

6. OS MODELOS E MODELAGENS DO DEA

Os modelos matemáticos configuram a realidade por meio de procedimentos matemáticos. Desse modo, os modelos CCR e BCC configuram a realidade mediante, respectivamente, a eficiência total e a eficiência técnica.

As modelagens são as diferentes formas de se escrever um mesmo modelo. Duas modelagens são originadas da orientação do modelo que pode ser para *input* ou para *output*. De acordo com Coelli (1998), no caso da orientação ser para os *inputs*, o modelo busca responder a seguinte questão: dado o nível de *outputs* que uma unidade produz qual a redução

possível nos *inputs* de modo a manter o corrente nível de *outputs*? Já os modelos orientados para os *outputs* procuram responder à questão: dado o nível de *inputs* utilizado, qual o maior nível de *outputs* que pode ser alcançado, mantendo-se o nível dos *inputs* constante? (VILELA, 2004).

Segundo Thanassoulis (2001), a todo problema de programação linear (denominado Primal), associa-se um outro problema de programação linear (designado como Dual), cujo resultado da função objetivo é igual (CHARNES *et al.*, 1994). A abordagem primal/dual permite mais duas modelagens do DEA.

Assim, a literatura apresenta quatro modelagens para representar um modelo CCR ou um modelo BCC: (a) *input* primal; (b) *input* dual; (c) *output* primal; e (d) *output* dual, conforme está representado na “Figura 5”.

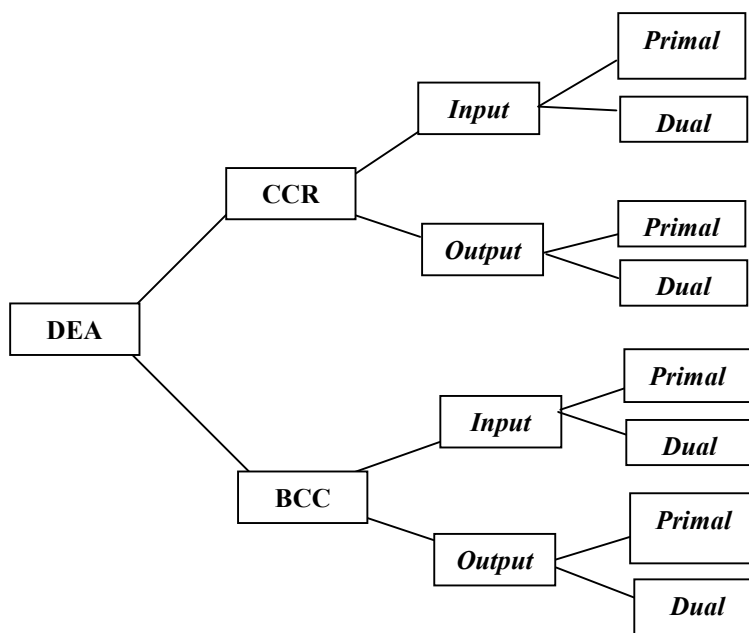


Figura 5 - Discriminação dos tipos de modelos matemáticos associados com suas distintas orientações

Fonte: Almeida, Mariano, Rebelatto (2006).

Cumprir destacar que o BCC e o CCR não são os únicos modelos do DEA, pois existem outros mais sofisticados, tais como: os modelos multiplicativos, modelos aditivos e a extensão dos modelos aditivos (COOPER *et al.*, 2000), cuja descrição não faz parte do escopo do presente trabalho.

7. EQUAÇÕES MATEMÁTICAS DO MODELO CCR

Os primeiros a modelar o problema do cálculo dos coeficientes de utilidade foram Charnes, Cooper e Rhodes em 1978. O modelo obtido foi denominado como Retornos Constantes a Escala (CCR), devido as iniciais de cada autor, (ou CRS - *Constant Returns to Scale*). O modelo CCR pode ser ilustrado pela “Equação 5”, “Equação 6” e “Equação 7”.

$$\text{MAX } P_0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} \quad (5)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (6)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (7)$$

Em que:

u_i = peso calculado para o *output* i

v_j = peso calculado para o *input* j

x_{jk} = quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor

y_{ik} = quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor

x_{j0} = quantidade do *input* j para unidade em análise

y_{i0} = quantidade do *output* i para unidade em análise

z = número de unidades em avaliação

m = número de *outputs*

n = número de *inputs*

A “Equação (5)” é a função objetivo (F.O) do modelo de programação matemática que deve ser maximizada. Essa equação é nada mais do que a fórmula de Knight (1933), para o cálculo da produtividade de uma DMU. A “Equação (6)” é um conjunto de restrições (uma para cada DMU do setor, inclusive para aquela que está sendo avaliada) que limita a produtividade de todas as DMUs a 1. Essa restrição é muito importante porque a produtividade de uma DMU teoricamente pode assumir qualquer valor (ela é ilimitada) e não fosse essa restrição não seria possível maximizar a função objetivo. Para cada DMU analisada deve-se construir em modelo de programação matemática diferente.

Após a resolução do modelo matemático é possível analisar a eficiência da DMU analisada. Se o resultado da função objetivo for igual a 1 a DMU é eficiente, pois nenhuma restrição limitou seu valor e sua produtividade atingiu o valor máximo. Por outro lado, se o resultado for menor que 1 a DMU é ineficiente, pois mesmo com as utilidades que maximizem sua produtividade existem DMUs mais produtivas que ela. Essas DMUs que limitam a função objetivo são chamadas de *benchmarks* da DMU analisada que serão modelos para que a DMU ineficiente se torne eficiente. O valor da função objetivo após a resolução do modelo será a própria eficiência relativa da DMU.

O modelo original CCR é um modelo de programação fracionária muito difícil de ser resolvido porque possui infinitas soluções. Sendo assim, houve a necessidade de linearizar esse modelo, ou seja, de transformar esse modelo de programação fracionária em um modelo de programação linear. Logo, esse modelo pode ser facilmente resolvido por meio dos muitos *softwares* existentes no mercado.

A linearização pode ser realizada de duas maneiras como: (a) mantendo-se os *inputs* constantes e maximizando os *outputs* e (b) mantendo-se os *outputs* constantes e minimizando os *inputs*. O modelo CCR orientado ao *input* pode ser representado pela “Equação 8”, “Equação 9”, “Equação 10” e “Equação 11”.

$$\text{MAX } P0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{1} = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} \quad (8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1 \quad (9)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (10)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (11)$$

Em que:

u_i = peso calculado para o *output* i

v_j = peso calculado para o *input* j

x_{jk} = quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor

y_{ik} = quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor

x_{j0} = quantidade do *input* j para unidade em análise

y_{j0} = quantidade do *output* i para unidade em análise

z = número de unidades em avaliação

m = número de *outputs*

n = número de *inputs*

A única diferença entre esse modelo e o modelo de programação fracionária é o acréscimo da "Equação (9)" ao modelo. A partir dessa equação a função objetivo é transformada em uma equação linear. O mesmo procedimento utilizado para a minimização dos *inputs* poderia ser utilizado para a maximização dos *outputs*. Nesse caso a função objetivo ficaria como a "Equação 12", enquanto as restrições ficariam como a "Equação 13", a "Equação 14" e a "Equação 15". Nesse modelo o resultado da função objetivo será o inverso da eficiência relativa como pode ser notado na "Equação 12".

$$\text{MAX } P0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} = \text{MIN FO} = \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} \quad (12)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (14)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (15)$$

Em que:

u_i = peso calculado para o *output* i

v_j = peso calculado para o *input* j

x_{jk} = quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor

y_{ik} = quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor

x_{j0} = quantidade do *input* j para unidade em análise

y_{j0} = quantidade do *output* i para unidade em análise

z = número de unidades em avaliação

m = número de *outputs*

n = número de *inputs*

8. EQUAÇÕES MATEMÁTICAS DO MODELO BCC

O modelo BCC, assim chamado em homenagem aos seus criadores Banker, Charnes e Cooper (1985), também é conhecido como modelo VRS (*Variable Returns to Scale - Retornos Variáveis de Escala*). Banker, Charnes e Cooper (1985) sugeriram que uma DMU não pode ser comparada com todas as DMUs de um determinado setor, mas apenas com as que operem em escala semelhante a sua.

O modelo BCC apresenta similaridades com o modelo CCR. A única diferença é o acréscimo de uma variável u no numerador (ou de uma variável v no denominador) como pode ser ilustrado pela “Equação 16”, “Equação 17” e “Equação 18”.

$$\text{MAX } P0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} + u}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} \quad \text{ou} \quad \text{MAX } P0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} + v} \quad (16)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik} + u}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} + v} \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (17)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (18)$$

u e v sem restrição de sinal

Em que:

u_i = peso calculado para o *output* i

v_j = peso calculado para o *input* j

x_{jk} = quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor

y_{ik} = quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor

x_{j0} = quantidade do *input* j para unidade em análise

y_{j0} = quantidade do *output* i para unidade em análise

u = variável de retorno a escala

z = número de unidades em avaliação

m = número de *outputs*

n = número de *inputs*

As variáveis u e v tem a função de garantir que as restrições das DMUs, que operem em escala diferente da DMU em análise, não limitem sua função objetivo. Com essa variável é possível avaliar o retorno de escala em que a DMU está operando. Se o valor de u for maior que zero significa que a empresa opera em retornos decrescentes à escala; se o valor de u for menor que zero significa que os retornos são crescentes à escala; e se o valor de u for igual a zero significa retornos constantes a escala.

A variável v também pode ser utilizada para estimar o tipo de escala de uma DMU, porém deve ser interpretada de maneira oposta ao u , ou seja, caso $v > 0$ os retornos serão crescentes, se $v = 0$ os retornos serão constantes e caso $v < 0$ serão decrescentes. Os retornos de escala não serão necessariamente iguais para as duas orientações.

O modelo BCC pode ser linearizado por meio dos mesmos procedimentos utilizados para o modelo CCR. Logo, esses procedimentos podem ser utilizados para a obtenção do BCC orientado para o *input* e para *output*. Porém, essas demonstrações matemáticas não foram desenvolvidas neste artigo.

9. FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA DO MODELO CCR E BCC

A fronteira de eficiência é o lugar geométrico onde se encontram todas as DMUs eficientes, segundo um modelo específico. O primeiro passo para se encontrar graficamente a fronteira de eficiência é plotar em um gráfico todas as DMUs analisadas, sendo que no eixo y desse gráfico estarão os valores do *output* virtual e no eixo x estarão os valores do *input* virtual.

A produtividade de uma DMU (O_v / I_v) pode ser calculada pela tangente da reta que sai da origem e passa por essa DMU. No caso do modelo CCR, as DMUs eficientes são exclusivamente aquelas que possuem uma produtividade máxima que, com os coeficientes calculados pelo modelo, é sempre igual a 1. Sendo assim, pode-se concluir que a fronteira de eficiência de um modelo CCR será uma reta com inclinação de 45° como representado na “Figura 6”.

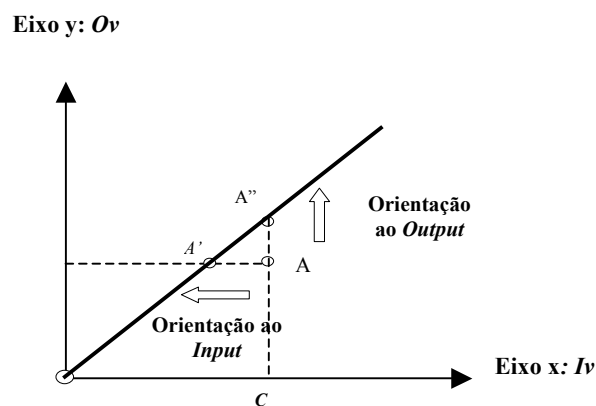


Figura 6 - Modelo de Orientação ao insumo ou ao produto
Fonte: Coelli (1998).

Na “Figura 6” estão representadas as orientações para *input* e para *output*. Sendo assim, é fácil perceber, a partir das relações trigonométricas, que para todo modelo CCR (em que a fronteira é uma reta de 45°) a eficiência calculada pelo modelo orientado ou *output* é igual a calculada pelo modelo orientado ao *input*.

A fronteira de eficiência obtida pelo BCC, denominada fronteira de eficiência técnica, tem a forma da função produção, apesar de ser linear por partes. A “Figura 7” apresenta uma comparação entre as fronteiras dos modelos BCC e CCR.

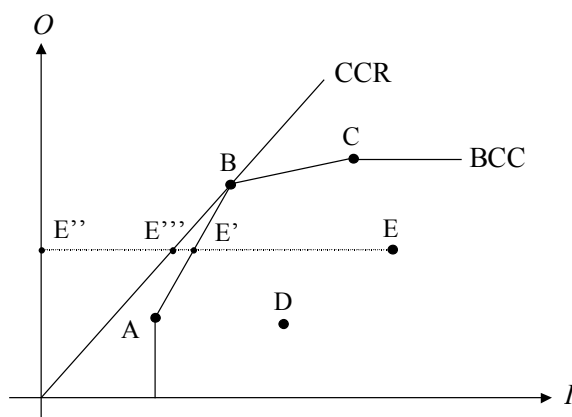


Figura 7- Comparação entre as fronteiras dos modelos BCC e CCR
Fonte: Soares Mello (2004)

É fácil perceber por meio da “Figura 7” que os resultados obtidos pelo modelo BCC orientados ao *input* e ao *output* são diferentes. Isso é coerente, pois a premissa básica do modelo BCC é que os *inputs* e *outputs* não sejam proporcionais. Portanto, dependendo da orientação escolhida, a DMU estará mais próxima ou não do ideal.

10. CONCLUSÃO

A apresentação dos principais modelos do DEA, CCR e BCC, com todas as suas variações, primal e dual orientados ao *input* e ao *output*, permitiu a construção de um painel do que de há de mais citado na literatura a respeito do cálculo de eficiência relativa por meio dessa técnica.

Esse painel foi construído a partir dos conceitos básicos que são os conceitos de eficiência e produtividade, associados às informações de microeconomia, como economia de escala aplicada na teoria da produção, que pode facilitar o desenvolvimento e aplicação dessa técnica nas universidades, tanto em disciplinas de graduação como pós-graduação. Isso, aliado a uma linguagem simplificada que poderá, também, facilitar a compreensão do DEA por pesquisadores que necessitem utilizá-la para alguma aplicação.

Vale lembrar que, devido às limitações naturais de um artigo para congresso, este trabalho contemplou superficialmente os modelos Duais referentes ao modelo matemático DEA. Os modelos Duais podem identificar quais DMUs podem ser utilizadas como *benchmarks* das DMUs ineficientes e, também, definir metas para que as DMUs ineficientes se tornem eficientes. Com isso, uma sugestão para futuros trabalhos é formalizar esses conceitos e ampliar essa pesquisa para outros modelos DEA como, por exemplo, os aditivos e multiplicativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, M. R. ; MARIANO, E. B. ; REBELATTO, D. N. . *Análise por Envoltória de Dados - Evolução e possibilidades de aplicação*. In: IX Simpósio de Administração da Produção, Logística e Operações Internacionais, IX SIMPOI, 2006, São Paulo.
- BECKENKAMP T. B. *Análise por envoltória de dados: considerações sobre o estabelecimento de restrições para os multiplicadores ótimos*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina UFSC, Florianópolis.
- CAMPOS, V. F. *Qualidade total: padronização de empresas*. Nova Lima, MG: Tecnologia e Serviços, 2004.
- CASA NOVA, S.P.C. *Utilização da análise por envoltória de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis*. 2002. Tese (Doutorado em Ciências Contábeis) - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- CERVO, A.L; BERVIAN, P.A. *Metodologia Científica*. São Paulo, Markron, 1983.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W. Preface to topics in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research* 2, p.59-94, 1985.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; LEWIN, A.Y.; SEIFORD, L.M. *Data Envelopment Analysis Theory, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston. Norwell, 1994.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, vol. 2, p. 429-444, 1978.
- COELLI, T.; PRAZADA RAO D.S.; BATTESE G. E. *An introduction to efficiency and productivity analysis*. Massachussets Kluwer Academic Publishers, 1998.
- COOPER, W.W.; SEIFORD, L. M.; TONE; K. *Data envelopment analysis a comprehensive text with models, applications, references, and DEA-Solver software*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- FERGUSON, C.E. *Microeconomia*. 18.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1994.
- GIL, A.C. *Métodos e técnica de pesquisa social*. São Paulo: Atlas, 1999.
- KOZYREFF FILHO, E.; MILIONI, A. Z. *Um método para estimativa de metas DEA*. *Revista Produção*. v. 14, n. 2, 2004.
- LORENZETT, J.R.; LOPES, A. L. M.; LIMA, M.V.A. *Aplicação do método de pesquisa operacional DEA na avaliação de desempenho de unidades produtivas para área de educação profissional*. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.
- LOVELL, C. A. K. (1993). *Productions frontiers and productive efficiency*. In: FRIED, SOARES MELLO J.C.C.B; GOMES E.G.; BIOND NETO L.; LINS M.P.E. *Suavização da fronteira DEA: o caso BCC tridimensional*. In: ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DE DENTEINVESTIGAÇÃO OPERACIONAL, 2004.
- OLIVEIRA, H.C.; GOMES, A.P. *Eficiência na agroindústria avícola mineira*. In: CONGRESSO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES. Ouro Preto, 28 a 31 de agosto, 2003.
- PAIVA JR, H. *Avaliação de desempenho de ferrovias utilizando a abordagem integrada*
- SEIFORD, L.M. Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978–1995). *Journal of Productivity Analysis*, vol.7, p. 99–137, 1996.
- THANASSOULIS, E. *Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software*, Kluwer Academic Publishers, 2001
- VILELA, D.L. *Utilização do método Análise Envoltório de Dados Para Avaliação do Desempenho Econômico de Corporativas de Crédito*. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

BASIC PRICIPLES FOR A PROPOSAL OF TEACHING ON DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Abstract: *The objective of the present work is systemize, in objective way, the main concepts and evolutions about the calculation of efficiency, in special about the technique Data Envelopment Analysis (DEA), presenting them in clear and didactic language. Currently, one of the great debates in the academic environment is about how the companies can reach a maximum efficiency in its productive processes, what it is vital for the survival in the globalized market. The technique DEA is one of the main tools, pointed for literature, to help in the resolution of this problem. However, this tool has relative technique complexity and low spreading in the academic environment, in special in the graduation level. Through of a searcher bibliographical exploratory had been presented and argued the main referring concepts to Data Envelopment Analyzes: (a)DMU, (b)Productivity, (c)Efficiency,(d) models of DEA (where models CCR and BCC had received prominence) and (e)efficiency border. These concepts had been approached of a logical and sequential form and can serve of base for discipline that they intent to contemplate this subject, as well as for researchers that have interest in initiating itself in the understanding of the subject.*

Key words: *Data Envelopment Analyzes (DEA), Productivity, Efficiency, DEA models and efficiency border*