



Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006.
ISBN 85-7515-371-4

MODELAGEM BOND GRAPH E O ENSINO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - REPRESENTAÇÃO DAS MÁQUINAS ELÉTRICAS.

Danilo Nobre Oliveira – danilonobre@yahoo.com.br

Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Elétrica.
Campus do Pici, Bloco 705.
60.455-760 – Fortaleza - CE

Henrique Cunha Jr – hcunhajr@uol.com.br

Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Elétrica.
Campus do Pici, Bloco 705.
60.455-760 – Fortaleza - CE

Vanessa Siqueira de Castro Teixeira – vanessa@dee.ufc.br

Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Elétrica.
Campus do Pici, Bloco 705.
60.455-760 – Fortaleza – CE

***Resumo:** As disponibilidades das novas tecnologias audiovisuais modificaram as exposições dos temas curriculares tornando-as mais assimiláveis e permitindo uma flexibilidade de simulação e estudos em projetos. No entanto, a concepção dos cursos continua quase a mesma em relação aos enfoques teóricos baseados na experiência de sistemas lineares, na qual particularizam as abordagens, dificultando assim a generalização e representação entre sistemas lineares e não-lineares. Neste artigo é apresentada uma introdução ao problema da representação de sistemas físicos nos cursos de engenharia elétrica, com foco no processo de ensino, aprendizagem e cognição de conceitos. É proposta a utilização da teoria de Bond Graph na representação das máquinas elétricas visando uma melhor abordagem didática. Serão também apresentadas vantagens da utilização dessa técnica.*

***Palavras-chave:** Abordagem didática, Máquinas Elétricas, Bond Graph*

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos trinta anos as evoluções tecnológicas causaram impacto no processo de ensino e aprendizado de engenharia elétrica. A revolução da informática se fez fortemente presente neste processo educativo, principalmente pelo acréscimo de ferramentas poderosas de simulação e visualização de imagens, ou seja, programas computacionais que permitem a representação simbólica e a solução quase imediata de equações lineares e não-lineares. As

atuais revisões dos planos pedagógicos estão progressivamente incorporando as facilidades e disponibilidades audiovisuais, resultando, por exemplo, na realização cada vez mais freqüente de aulas com imagens e apresentações televisivas.

Em geral, as novas ferramentas computacionais não conseguem acompanhar o ritmo acelerado das inovações tecnológicas, assim não expressam adequadamente a realidade do conhecimento teórico. A teoria básica dos cursos de engenharia elétrica é baseada e unificada pelo uso de sistemas lineares, álgebra linear e equações diferenciais lineares. Desta forma, ao mesmo tempo em que é formada uma base segura de análise e compreensão teórica, limitam-se os cálculos dos parâmetros em projetos, os quais estão sendo implementados num mundo cada vez mais não-linear. Além disso, restringem-se as análises referentes às margens de desempenho, qualidade, confiabilidade e otimização do aproveitamento da energia. Estes fatores levam a um estreitamento de relações entre o mundo não-linear e a linearização teórica. Assim, são necessárias representações que permitam melhores generalizações e transposição das barreiras entre sistemas lineares e não-lineares.

Outro problema que se pode citar, do ponto de vista curricular, são as tradicionais formas conceituais da concepção dos cursos de engenharia elétrica com relação à física do ensino básico e às disciplinas do ensino específico (circuitos elétricos, sistemas de controle, conversão de energia, sistemas mecânicos e termodinâmicos). Estas concepções são apresentadas sem os encadeamentos que as generalizam, como por exemplo, as equações dos sistemas de segunda ordem que estão presentes no movimento retilíneo uniforme, no sistema massa-mola, nos circuitos RLC e nos sistemas dinâmicos, como o motor de corrente contínua. Assim, a exposição conceitual e a representação desses sistemas são parciais, isoladas e de difícil percepção unificadora para a grande maioria dos estudantes dos cursos de engenharia elétrica. Nesse enfoque, as representações das transformações de energia que ocorrem nos sistemas são de mais difícil compreensão. Normalmente, os estudantes incorporam esta forma cognitiva da generalização pelo final do quarto ou quinto ano de estudo, quando seria um grande avanço se o fizessem no segundo ou terceiro ano, resultando no maior aproveitamento do processo ensino e aprendizagem das disciplinas e do tempo, evitando repetições de sistemas análogos.

Por influência do construtivismo vindo da pedagogia (NEHRIR *et al*, 1995), a prática curricular dos cursos de engenharia elétrica tem avançado com a introdução de uma carga horária experimental, realização de blocos interdisciplinares e generalização do conhecimento. Pode-se citar como exemplos algumas disciplinas que aplicam práticas de projetos orientados (BETANCOURT *et al*, 1989). Contudo, o processo de representação do conhecimento nos cursos de engenharia elétrica requer mais discussões no campo da cognição e das concepções curriculares. Com foco nessa questão, é proposta a utilização da teoria de Bond Graph na representação de sistemas motrizes. A teoria de Bond Graph é uma representação unificada de sistemas dinâmicos, no qual os elementos interagem entre si através de portas, alocados dentro do sistema, onde ocorrerá a troca de energia.

Neste artigo apresenta-se uma introdução à teoria de Bond Graph com aplicação à modelagem das máquinas elétricas de corrente contínua, de indução e de relutância variável. Serão analisadas as possíveis influências da utilização dessa técnica para o ensino e aprendizado de engenharia elétrica.

2. A MODELAGEM EM BOND GRAPH

O Bond Graph (BG) é uma ferramenta de representação gráfica, desenvolvida por H. M. Paytner, em 1959, utilizada para descrever as interações entre sistemas físicos. Grandezas elétricas, mecânicas, térmicas, dentre outras, são descritas por elementos gráficos de fácil compreensão, resultando em diagramas de esforços e fluxos de energia, onde a dinâmica

destes sistemas é didaticamente bem visualizada. Dentro dessa modelagem, é possível descrever as características dos sistemas e subsistemas, bem como as conexões e trocas de energia entre os subsistemas.

Na Figura 1, demonstra-se um sistema físico dividido em subsistemas. Esse processo de divisão é realizado até se obter formas elementares de representações, as quais podem ser descritas em equações matemáticas (ANTIC *et al*, 1999).

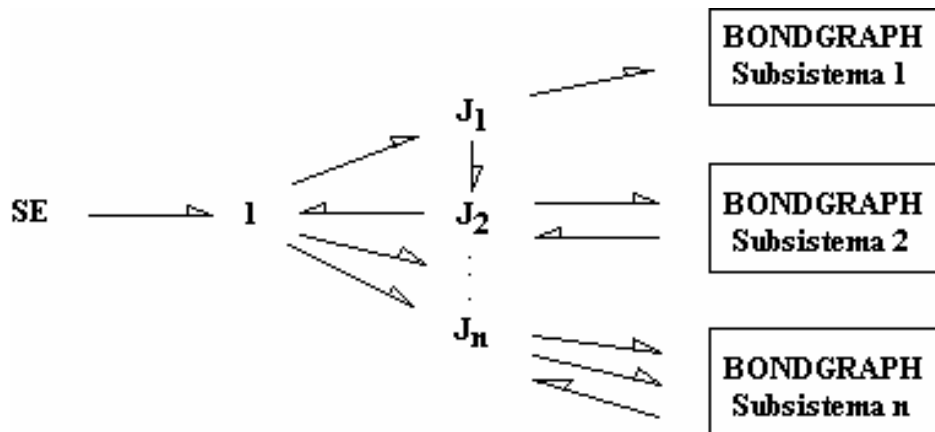


Figura 1 – Sistema físico original decomposto em subsistemas menores.

As linhas entre cada elemento representam as ligações de energia, onde cada uma dessas ligações é caracterizada por duas variáveis mutuamente dependentes, esforço e fluxo de energia, que são os principais conceitos da teoria de BG, e cuja interpretação física e nomenclatura varia conforme o domínio do sistema estudado, como mostra a Tabela 1. Como exemplos de sistemas pode-se citar um motor elétrico acoplado a uma bomba hidráulica ou um motor térmico conectado a um redutor de ruído acústico (SAMANTARAY, 2001), nos quais a forma da energia varia dentro de cada sistema, bem como as respectivas interpretações dos conceitos de esforço e fluxo.

Na Figura 2, representa-se a seqüência da mudança do modelo físico para o de BG, do qual serão obtidas as equações matemáticas.

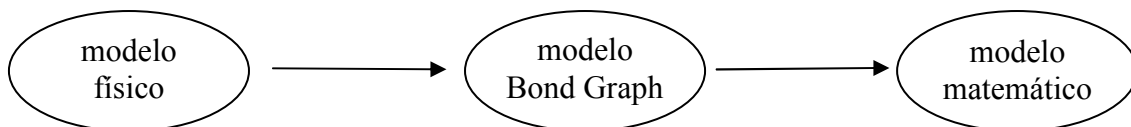


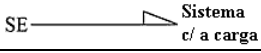
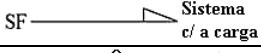
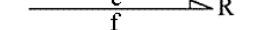

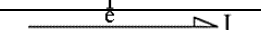
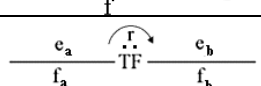
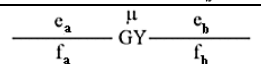
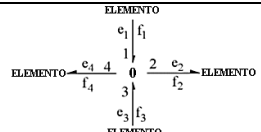
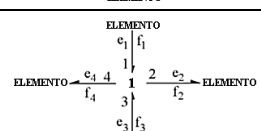
Figura 2 – processo de obtenção do modelo matemático através do desenvolvimento do modelo BG.

Tabela 1 – Variáveis de esforço e fluxo em diferentes sistemas físicos

Sistema	Esforço	Fluxo
Elétrico	Tensão (V)	Corrente (i)
Hidráulico	Pressão	Vazão (dQ/dt)
Térmico	Temperatura	Taxa de variação da entropia (ds/dt)
	Pressão	Taxa de variação do volume (dV/dt)
Mecânico	Torque (τ)	Velocidade angular (ω)

O BG é composto por quatro grupos básicos de elementos: três elementos passivos de uma porta, dois elementos ativos de uma porta, dois elementos de duas portas e duas junções, conforme a Tabela 2. As variáveis básicas são esforço (e), fluxo (f), integral temporal de esforço (P) e integral temporal de fluxo (Q).

Tabela 2 – Visão geral dos elementos do Bond Graph

Símbolo	Representação	Tipo de elemento	Nome do elemento	Exemplo no domínio elétrico
S_e		Fonte	Fonte de esforço	Fonte de tensão
S_f			Fonte de fluxo	Fonte de corrente
R		Dissipador	Resistência	Resistor
C		Armazenador	Capacitância	Capacitor
I			Inercial	Indutor
TF		Transdutor	Transformador	Transformador
GY			Girador	Acoplamento eletromecânico
0		Junção	Junção-0	Conexão em paralelo
1			Junção-1	Conexão em série

Os três elementos passivos de uma porta são a resistência, que representa um dissipador de energia, a capacitância, que armazena energia como um fluxo e a libera como um esforço, e o elemento inercial, que armazena energia como um esforço e a libera como fluxo. Seus modelos matemáticos estão descritos nas equações (1), (2) e (3), onde R , K , e m , representam constantes de dissipação, armazenamento de fluxo e armazenamento de esforço, respectivamente.

$$e = R \cdot f \quad (1)$$

$$e = K \cdot \int_{-\infty}^t f \cdot dt \Leftrightarrow Q = \int_{-\infty}^t f \cdot dt \text{ ou} \quad (2)$$

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t e \cdot dt \Leftrightarrow q = \int_{-\infty}^t e \cdot dt \text{ (no domínio elétrico)}$$

$$f = m^{-1} \cdot \int_{-\infty}^t e \cdot dt \Leftrightarrow P = \int_{-\infty}^t e \cdot dt \text{ ou} \quad (3)$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v \cdot dt \Leftrightarrow \phi = \int_{-\infty}^t v \cdot dt \text{ (no domínio elétrico)}$$

Os dois elementos ativos de uma porta são as fontes de esforço e de fluxo. As fontes são as geradoras das forças que fornecem a dinâmica do sistema.

Os elementos de duas portas são o transformador, que converte os fluxos e esforços de energia com valores proporcionais a um módulo r , e o girador, que converte esforço em fluxo e fluxo em esforço, relacionando os valores finais através de um módulo μ . O Transformador é descrito matematicamente pelas equações (4), e o Girador por (5).

$$\begin{cases} f_b = r \cdot f_a \\ e_b = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot e_a \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} e_b = \mu \cdot f_a \\ e_a = \mu \cdot f_b \end{cases} \quad (5)$$

O módulo r representa uma relação de transformação, que pode ser uma constante ou uma expressão algébrica. No caso de um transformador elétrico, por exemplo, r é a proporção entre o número de espiras do primário e do secundário, enquanto num sistema de alavanca, r é a proporção entre os braços do conjugado mecânico. Na Tabela 1, a pequena seta sobre o elemento Transformador denota o sentido no qual o módulo deve ser utilizado, que é o mesmo do fluxo de energia neste elemento. Já o módulo μ não possui um sentido associado e deve ser representado matematicamente como esforço em função de fluxo. No caso de um corpo rígido em movimento rotativo, por exemplo, μ representa o produto do momento de inércia pela velocidade angular.

As duas junções são utilizadas para representar funções de equalização de fluxos ou de esforços, no sistema físico, que estão baseadas no princípio da conservação de energia no sistema, conforme a equação (6).

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \dots + e_n f_n = 0 \quad (6)$$

A junção-0 representa uma função de equalização de fluxos, descrita pelas equações em (7). Em geral, esta junção representa uma ligação de elementos em paralelo.

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n \Leftrightarrow e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0 \quad (7)$$

A junção-1 representa uma função de equalização de esforços, descrita pelas equações em (8). Em geral, esta junção representa uma ligação de elementos em série.

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0 \quad (8)$$

As setas e as barras verticais nas extremidades das ligações representadas na Tabela 2 denotam, respectivamente, a direção do fluxo de energia e a causalidade dos elementos que compõem um determinado sistema. Estes conceitos, fundamentais na teoria de BG, são detalhados no exemplo a seguir.

Como exemplo de aplicação do BG, é apresentada a modelagem seqüencial do circuito elétrico RLC da Figura 3.

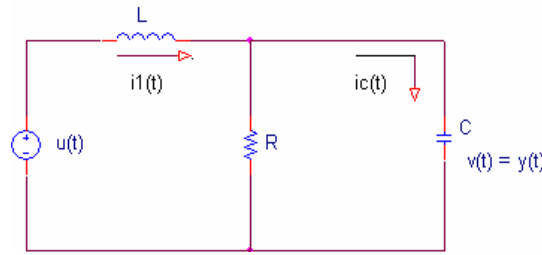


Figura 3 – Circuito RLC.

O circuito RLC da Figura 3 é representado através do BG conforme a Figura 4.

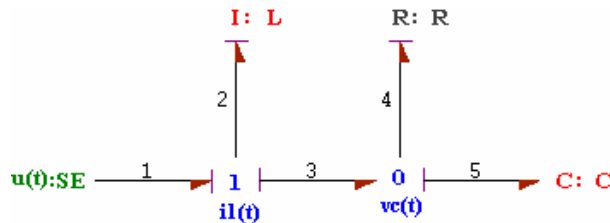


Figura 4 – Representação em Bond Graph do circuito RLC.

O sentido do fluxo de energia e a causalidade do modelo BG são representados pelas setas e barras verticais nas extremidades de cada ligação, respectivamente.

As setas são utilizadas para estabelecer a relação entre o sentido do fluxo de energia e o sinal das variáveis de esforço e fluxo de cada ligação. Se as duas variáveis possuem o mesmo sinal, então a energia flui, através da ligação, no sentido indicado pela seta. Se as variáveis possuem sinais distintos, então a energia flui no sentido contrário ao indicado pela seta. O sentido das setas pode ser definido arbitrariamente, de acordo com as características de cada sistema.

As barras verticais definem a causalidade de cada ligação no modelo BG e devem ser estabelecidas de forma que existam somente causalidades integrais no sistema. Contudo, poderão existir situações nas quais a causalidade diferencial seja imprescindível no modelo BG, o que requer o tratamento adequado destas exceções no momento da obtenção das equações.

As equações que descrevem o sistema são obtidas a partir do modelo BG, através de um procedimento sistemático, apresentado a seguir.

Inicialmente, formula-se as equações que descrevem os elementos ativos e passivos de uma porta, como fontes, resistências, capacitâncias e elementos inerciais, conforme mostram as equações (9) e (10), onde ϕ_2 representa a energia armazenada no campo magnético do indutor e q_5 representa a energia armazenada no campo elétrico do capacitor.

$$e_1 = SE = u(t) ; e_5 = \frac{q_5}{C} \quad (9)$$

$$f_2 = \frac{\phi_2}{L} ; f_4 = \left(\frac{1}{R}\right) \cdot e_4 \quad (10)$$

Em seguida, encontram-se somente as equações das junções. Neste caso, não se verifica a presença de elementos de duas portas no sistema, que são o transformador e o girador. Portanto, a junção-1, que representa uma ligação em série, é dada por (11) e (12), enquanto a junção-0, que denota uma ligação em paralelo, é representada por (13) e (14).

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0 \Leftrightarrow e_2 = e_1 - e_3 \quad (11)$$

$$f_1 = f_2 = f_3 \quad (12)$$

$$f_3 - f_4 - f_5 = 0 \Leftrightarrow f_5 = f_3 - f_4 \quad (13)$$

$$e_3 = e_4 = e_5 \quad (14)$$

No terceiro passo, são feitas substituições das equações (9) e (10) em (11) e (13), de forma a eliminar todas as dependências lineares, levando em conta as propriedades obtidas em (12) e (14). Ao final deste passo, obtém-se as equações (15) e (16), que descrevem as características desejadas para as variáveis de estado do sistema, ou seja, o esforço e_2 e o fluxo f_5 para os elementos inercial e de capacitância, respectivamente.

$$e_2 = u(t) - \left(\frac{1}{C}\right) \cdot q_5 \quad (15)$$

$$f_5 = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \phi_2 - \left(\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot q_5 \quad (16)$$

Caso ainda haja dependências lineares ou causalidades diferenciais, estas deverão ser resolvidas logo em seguida. No caso do circuito RLC, tem-se as equações em (17).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_2}{dt} = e_2 \\ \phi_2 = L \cdot i_1(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dq_5}{dt} = f_5 \\ q_5 = C \cdot v_c(t) \end{cases} \quad (17)$$

Por fim, substituindo (15) e (16) em (17) e utilizando as relações em (9) e (10), obtém-se a equação (18), a partir da qual pode-se escrever a equação de estado do circuito RLC, mostrada em (19).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_2}{dt} = -\left(\frac{1}{C}\right) \cdot q_5 + u(t) \\ \frac{dq_5}{dt} = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \phi_2 - \left(\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot q_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = -v_c(t) + u(t) \\ C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} = i_1(t) - \left(\frac{1}{R}\right) \cdot v_c(t) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{dv_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R \cdot C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (19)$$

3. MODELAGEM DE MÁQUINAS ELÉTRICAS ATRAVÉS DA TEORIA DE BOND GRAPH

A modelagem tradicional de máquinas elétricas parte da representação de seus efeitos eletromagnéticos internos, resultando nos circuitos elétricos equivalentes, que são resolvidos para obter as equações elétricas que descrevem o comportamento eletromagnético destas máquinas (GURU *et al*, 2001 e FITZGERALD *et al*, 2003).

Uma alternativa de modelagem é feita com a utilização da teoria de BG, através da qual os fluxos de energia em uma máquina elétrica são representados sem a necessidade de um circuito equivalente, podendo-se facilmente incluir elementos mecânicos e térmicos na modelagem em BG para uma análise mais completa da dinâmica do sistema.

3.1 Modelagem do motor de corrente contínua

O motor de corrente contínua (CC) controlado pela armadura pode ser representado pelo circuito equivalente da Figura 5, onde R_a e L_a denotam a resistência e indutância do circuito de armadura, J e F são o momento de inércia da carga e o coeficiente de atrito viscoso, $V_a(t)$ e $i_a(t)$ representam a tensão e a corrente de armadura, $E(t)$ é a força contra-eletromotriz e $\omega(t)$ denota a velocidade angular do motor, respectivamente (BASÍLIO *et al*, 2001).

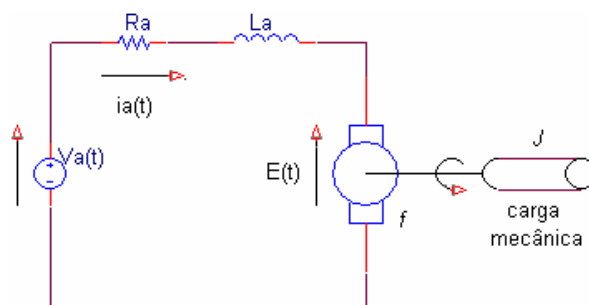


Figura 5 – Circuito equivalente do motor CC controlado pela armadura.

O modelo em BG proposto é mostrado na Figura 6, na qual o motor CC aparece representado pelo elemento Girador, onde o torque de saída é proporcional à corrente de entrada e a força contra-eletromotriz é proporcional à velocidade angular do motor.

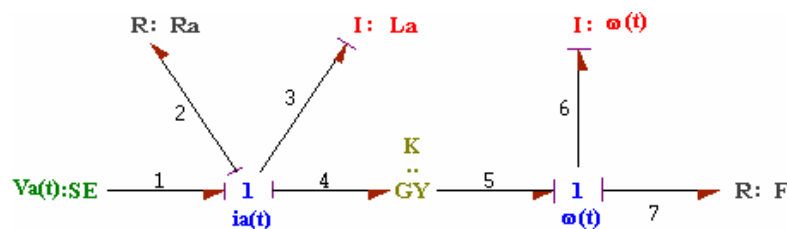


Figura 6 – Modelo simplificado em Bond Graph do motor CC controlado pela armadura.

Do modelo BG da Figura 6, obtém-se, inicialmente, as equações (20) e (21), que descrevem a fonte de esforço SE e os elementos armazenadores e dissipadores de energia, representados pela fonte de tensão $V_a(t)$, pelo fluxo magnético ϕ_3 , momento angular l_6 , pela resistência de armadura R_a e pelo coeficiente de atrito viscoso F , respectivamente.

$$e_1 = SE = V_a(t) ; e_2 = R_a \cdot f_2 ; e_7 = F \cdot f_7 \quad (20)$$

$$f_3 = \frac{\phi_3}{L_a} ; f_6 = \frac{l_6}{J} \quad (21)$$

Em seguida, descreve-se matematicamente todas as junções do sistema, conforme as equações (22) a (25), e os elementos de duas portas, representados em (26):

$$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0 \Leftrightarrow e_3 = e_1 - e_2 - e_4 \quad (22)$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \quad (23)$$

$$e_5 - e_6 - e_7 = 0 \Leftrightarrow e_6 = e_5 - e_7 \quad (24)$$

$$f_5 = f_6 = f_7 \quad (25)$$

$$\begin{cases} f_4 = K \cdot e_5 \\ f_5 = K \cdot e_4 \end{cases} \quad (26)$$

Das equações (20) a (26), realizam-se substituições para eliminar as dependências lineares, obtendo-se (27) e (28).

$$e_3 = V_a(t) - \frac{R_a}{L_a} \cdot \phi_3 - \frac{1}{K \cdot J} \cdot l_6 \quad (27)$$

$$e_6 = \frac{1}{K \cdot L_a} \cdot \phi_3 - \frac{F}{J} \cdot l_6 \quad (28)$$

As dependências lineares ou causalidades diferenciais restantes são resolvidas pelas equações em (29).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_3}{dt} = e_3 \\ \phi_3 = L_a \cdot i_a(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dl_6}{dt} = e_6 \\ l_6 = J \cdot \omega(t) \end{cases} \quad (29)$$

Por fim, substituindo as equações (27) e (28) em (29), e utilizando as relações para ϕ_3 e l_6 , obtém-se (30), a partir da qual pode-se escrever a equação de estado do motor de corrente contínua, mostrada em (32).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_3}{dt} = -\left(\frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{1}{K \cdot J}\right) \cdot l_6 + V_a(t) \\ \frac{dl_6}{dt} = \left(\frac{1}{K \cdot L_a}\right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{F}{J}\right) \cdot l_6 \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{di_a(t)}{dt} = -\left(\frac{R_a}{L_a}\right) \cdot i_a(t) - \left(\frac{1}{K \cdot L_a}\right) \cdot \omega(t) + \left(\frac{1}{L_a}\right) \cdot V_a(t) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \left(\frac{1}{K \cdot J}\right) \cdot i_a(t) - \left(\frac{F}{J}\right) \cdot \omega(t) \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{1}{K \cdot L_a} \\ \frac{1}{K \cdot J} & -\frac{F}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_a(t) \quad (32)$$

Dessa forma, obtém-se a modelagem matemática do modelo do motor CC em equações de estados, onde os parâmetros R_a , L_a , J , F , K são identificados através de experimentos (BASÍLIO *et al*, 2001).

3.2 Modelagem do motor de indução

O motor de indução trifásico simétrico e balanceado pode ser representado pelo circuito monofásico equivalente da Figura 7 (GURU *et al*, 2001).

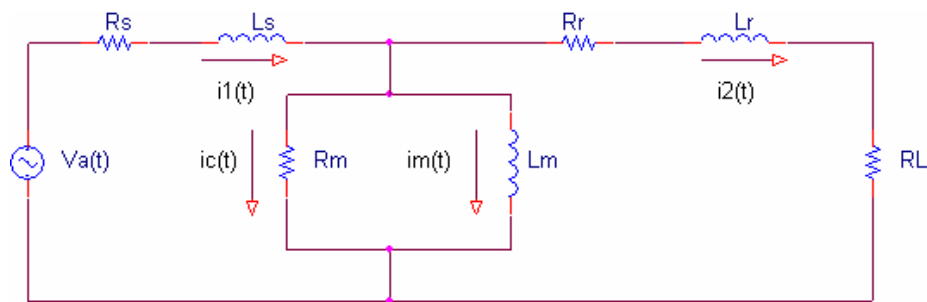


Figura 7 – Circuito monofásico equivalente do motor de indução.

O modelo BG do circuito acima é mostrado na Figura 8.

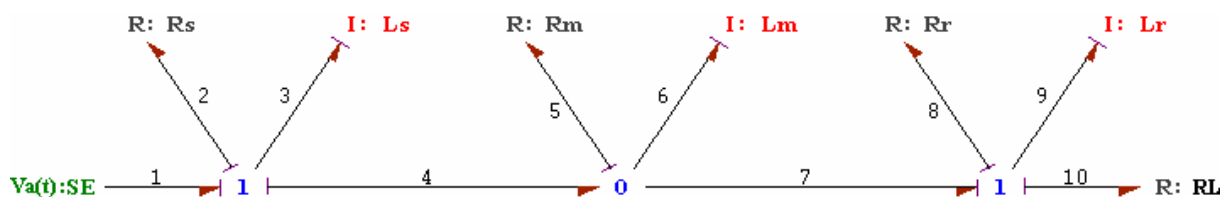


Figura 8 – Modelo Bond Graph do motor de indução baseado no circuito equivalente monofásico.

Os modelos das Figuras 7 e 8 descrevem o comportamento elétrico da máquina, através de uma fonte de tensão (V_a), resistências e indutâncias do estator, rotor e de dispersão (R_s , R_r , R_m , L_s , L_r , L_m , respectivamente). Além disso, a carga mecânica é representada por uma resistência elétrica equivalente (R_L), que é função do escorregamento (s), variando de acordo com a velocidade do motor, conforme as equações (33) e (34), onde ω_s e ω_r denotam as velocidades síncrona (ou nominal) e do rotor, respectivamente.

$$R_L = \frac{R_r}{s} \cdot (1-s) \quad (33)$$

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (34)$$

A partir deste modelo, pode-se acrescentar outros elementos que permitem um aprofundamento da compreensão da dinâmica existente com outros sistemas que fazem interação com a máquina elétrica.

A partir do modelo BG da Figura 8, podemos obter as equações de estado do circuito. Neste caso, os estados escolhidos são as correntes de alimentação de fase no estator, $i_1(t)$, do enrolamento de dispersão do fluxo magnético, $i_m(t)$, e da carga no rotor, $i_2(t)$.

Analogamente ao procedimento desenvolvido para o equacionamento do motor CC, obtém-se inicialmente as relações dos elementos passivos de uma porta e das fontes, conforme as equações (35) e (36).

$$e_1 = SE = V_a(t) ; e_2 = R_s \cdot f_2 ; e_3 = R_m \cdot f_5 ; e_8 = R_r \cdot f_8 ; e_{10} = R_L \cdot f_{10} \quad (35)$$

$$f_3 = \frac{\phi_3}{L_s} ; f_6 = \frac{\phi_6}{L_m} ; f_9 = \frac{\phi_9}{L_r} \quad (36)$$

As junções e suas respectivas propriedades de ligação em série ou em paralelo, são descritas pelas equações (37) a (42).

$$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0 \Leftrightarrow e_3 = e_1 - e_2 - e_4 \quad (37)$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \quad (38)$$

$$f_4 - f_5 - f_6 - f_7 = 0 \Leftrightarrow f_5 = f_4 - f_6 - f_7 \quad (39)$$

$$e_4 = e_5 = e_6 = e_7 \quad (40)$$

$$e_7 - e_8 - e_9 - e_{10} = 0 \Leftrightarrow e_9 = e_7 - e_8 - e_{10} \quad (41)$$

$$f_7 = f_8 = f_9 = f_{10} \quad (42)$$

Eliminando todas as dependências lineares de (35) a (42), obtém-se (43), (44) e (45).

$$e_3 = V_a(t) - \left(\frac{R_s + R_m}{L_s} \right) \cdot \phi_3 + \left(\frac{R_m}{L_m} \right) \cdot \phi_6 + \left(\frac{R_m}{L_r} \right) \cdot \phi_9 \quad (43)$$

$$e_6 = \left(\frac{R_m}{L_s} \right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{R_m}{L_m} \right) \cdot \phi_6 - \left(\frac{R_m}{L_r} \right) \cdot \phi_9 \quad (44)$$

$$e_9 = \left(\frac{R_m}{L_s}\right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot \phi_6 - \left(\frac{R_m + R_r + R_L}{L_r}\right) \cdot \phi_9 \quad (45)$$

Em seguida, obtêm-se as relações com os estados desejados do sistema, conforme as equações em (46).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_3}{dt} = e_3 \\ \phi_3 = L_s \cdot i_1(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{d\phi_6}{dt} = e_6 \\ \phi_6 = L_m \cdot i_m(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{d\phi_9}{dt} = e_9 \\ \phi_9 = L_r \cdot i_2(t) \end{cases} \quad (46)$$

Substituindo as equações (43), (44) e (45) nas equações em (46), obtemos (47) e (48).

$$\begin{cases} \frac{d\phi_3}{dt} = -\left(\frac{R_s + R_m}{L_s}\right) \cdot \phi_3 + \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot \phi_6 + \left(\frac{R_m}{L_r}\right) \cdot \phi_9 + V_a(t) \\ \frac{d\phi_6}{dt} = \left(\frac{R_m}{L_s}\right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot \phi_6 - \left(\frac{R_m}{L_r}\right) \cdot \phi_9 \\ \frac{d\phi_9}{dt} = \left(\frac{R_m}{L_s}\right) \cdot \phi_3 - \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot \phi_6 - \left(\frac{R_m + R_r + R_L}{L_r}\right) \cdot \phi_9 \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \frac{di_1(t)}{dt} = -\left(\frac{R_s + R_m}{L_s}\right) \cdot i_1(t) + \left(\frac{R_m}{L_s}\right) \cdot i_m(t) + \left(\frac{R_m}{L_s}\right) \cdot i_2(t) + V_a(t) \\ \frac{di_m(t)}{dt} = \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot i_1(t) - \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot i_m(t) - \left(\frac{R_m}{L_m}\right) \cdot i_2(t) \\ \frac{di_2(t)}{dt} = \left(\frac{R_m}{L_r}\right) \cdot i_1(t) - \left(\frac{R_m}{L_r}\right) \cdot i_m(t) - \left(\frac{R_m + R_r + R_L}{L_r}\right) \cdot i_2(t) \end{cases} \quad (48)$$

De equação (48) obtemos as equações de estado do motor de indução, conforme (49).

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_m(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s + R_m}{L_s}\right) & \frac{R_m}{L_s} & \frac{R_m}{L_s} \\ \frac{R_m}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \\ \frac{R_m}{L_r} & -\frac{R_m}{L_r} & -\left(\frac{R_m + R_r + R_L}{L_r}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_m(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_a(t) \quad (49)$$

3.3 Modelagem do motor de relutância variável

O motor de relutância variável (MRV) pode ser representado pelo circuito equivalente da Figura 9, onde $V(t)$ representa a alimentação de tensão de uma fase, R e L a resistência e a indutância dos fios do enrolamento, respectivamente e E_a denota a força contra-eletromotriz que se opõe à variação do campo magnético (KRISHNAN, 2001).

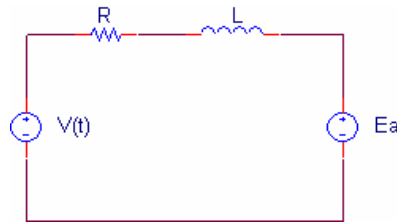


Figura 9 – Circuito equivalente do motor de relutância variável.

Um modelo em Bond Graph do circuito acima, é mostrado na Figura 10.

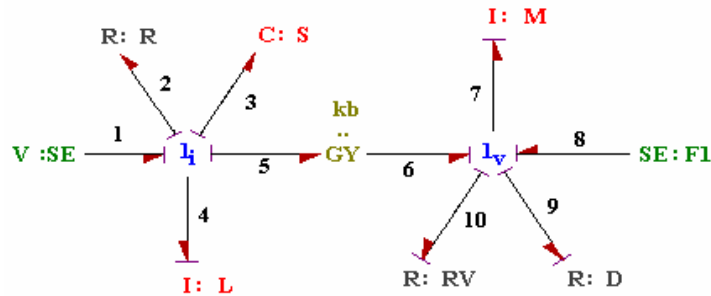


Figura 10 – Modelo simplificado em Bond Graph do motor de relutância variável.

Seguindo a mesma seqüência desenvolvida para o equacionamento das máquinas CC e de indução, temos, inicialmente, as equações das fontes e dos elementos dissipadores e armazenadores de energia, conforme (50) e (51).

$$e_1 = SE = V(t) ; e_2 = R \cdot f_2 ; e_3 = \frac{q_3}{S} ; e_7 = R_V \cdot f_7 ; e_8 = D \cdot f_8 ; e_{10} = F \quad (50)$$

$$f_4 = \frac{\phi_4}{L} ; f_9 = \frac{P_9}{M} \quad (51)$$

Em seguida, são analisadas as junções do modelo BG, conforme as equações (52) a (55), e os elementos de duas portas, representados em (56):

$$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 = 0 \Leftrightarrow e_4 = e_1 - e_2 - e_3 - e_5 \quad (52)$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 \quad (53)$$

$$e_6 - e_7 - e_8 - e_9 + e_{10} = 0 \Leftrightarrow e_9 = e_6 - e_7 - e_8 + e_{10} \quad (54)$$

$$f_6 = f_7 = f_8 = f_9 = f_{10} \quad (55)$$

$$\begin{cases} e_5 = k_b \cdot f_6 \\ e_6 = k_b \cdot f_5 \end{cases} \quad (56)$$

Eliminando todas as dependências lineares das equações (50) a (56), obtém-se (57) a (59).

$$f_3 = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \phi_4 \quad (57)$$

$$e_4 = V(t) - \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \phi_4 - \left(\frac{1}{S}\right) \cdot q_3 - \left(\frac{k_b}{M}\right) \cdot P_9 \quad (58)$$

$$e_9 = \left(\frac{k_b}{L}\right) \cdot \phi_4 - \left(\frac{R_V + D}{M}\right) \cdot P_9 + F \quad (59)$$

Em seguida, obtém-se as relações com os estados desejados do sistema, conforme as equações em (60).

$$\begin{cases} \frac{dq_3}{dt} = f_3 \\ q_3 = S \cdot V_c(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{d\phi_4}{dt} = e_4 \\ \phi_4 = L \cdot i(t) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dP_9}{dt} = e_9 \\ P_9 = M \cdot v \end{cases} \quad (60)$$

Substituindo as equações (57) a (59) em (60), tem-se como resultado (61) e (62).

$$\begin{cases} \frac{dq_3}{dt} = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \phi_4 \\ \frac{d\phi_4}{dt} = -\left(\frac{1}{S}\right) \cdot q_3 - \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \phi_4 - \left(\frac{k_b}{M}\right) \cdot P_9 + V(t) \\ \frac{dP_9}{dt} = \left(\frac{k_b}{L}\right) \cdot \phi_4 - \left(\frac{R_V + D}{M}\right) \cdot P_9 + F \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} \frac{dV_c(t)}{dt} = \left(\frac{1}{S}\right) \cdot i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{L}\right) \cdot V_c(t) - \left(\frac{R}{L}\right) \cdot i(t) - \left(\frac{k_b}{L}\right) \cdot v + \left(\frac{1}{L}\right) \cdot V(t) \\ \frac{dv}{dt} = \left(\frac{k_b}{M}\right) \cdot i(t) - \left(\frac{R_V + D}{M}\right) \cdot v + \left(\frac{1}{M}\right) \cdot F \end{cases} \quad (62)$$

Da equação (62) obtém-se as equações de estado do MRV, conforme (63).

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_c(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} & -\frac{k_b}{L} \\ 0 & \frac{k_b}{M} & -\frac{R_V + D}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(t) \\ F \end{bmatrix} \quad (63)$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foram abordados os problemas de ensino e aprendizado de engenharia elétrica, focalizando a generalização da representação dos sistemas físicos. Foi apresentada a teoria do Bond Graph como uma alternativa adequada para os problemas de representação generalizada de sistemas físicos. A teoria e as técnicas do Bond Graph são pouco conhecidas nos cursos de engenharia elétrica no Brasil. A aplicação da técnica da Bond Graph permite a discussão e compreensão das transformações de energia ocorridas nos sistemas físicos sem a preocupação com a linearidade ou não-linearidade dos fenômenos. Além disso, utilizando o Bond Graph é possível obter-se uma classificação no estudo da natureza da transformação sob conceitos gerais e não dentro de uma disciplina específica. No modelo apresentado, de modo geral, foram obtidas de maneira nítida e destacada as variáveis de estado do sistema e a sua interação dinâmica no modelo.

Agradecimentos

Agradecemos pelo apoio da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTIC, D., VIDOJKOVIC, B., MLADENOVIC, M. An Introduction to Bond Graph Modelling of Dynamic Systems. In: Telsiks'99, 1999, Nis.

BASÍLIO, J. C., MOREIRA, M. C. Experimentos para estimação dos parâmetros dos motores de corrente contínua. In: VII Encontro de Educação em Engenharia, 2001, Petrópolis.

BETANCOURT, R., TORRE, W. V. The use of a design project as an innovative and practical approach to the teaching of power systems. **IEEE Transactions on Power Systems**. v. 4, n. 1, p. 372-379.

FITZGERALD, A. E., KINGSLEY JR., C., UMANS, S. D. **Electric Machinery**. New York: McGraw-Hill, 2003.

GURU, B. S., HIZIROGLU, H. R. **Electric Machinery and Transformers**. New York: Oxford University Press, 2001.

KRISHNAN, R. **Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design and applications**. Florida: CRC Press, 2001.

NEHRIR, M. H., FATEHI, F., GEREZ, V. Computer Modeling for Enhancing Instruction of Electric Machinery. **IEEE Transactions on Education**. v. 38, n. 2, p. 166-170.

SAMANTARAY, A. K. About Bond graphs – The System Modeling World. In: [<http://www.bondgraphs.com/about.html>], 2001, HighTech Consultants.