



**COBENGE 2005**

**XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**

“Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças”

12 a 15 de setembro - Campina Grande - Pb

Promoção/Organização: ABENGE/UFCCG-UFPE

## **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL, APLICADOS À ENGENHARIA, USANDO MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA**

**Leonor F. F. Menk** - leoffmenk@yahoo.com.br  
FEMA – Fundação Educacional do Município de Assis.  
Avenida Getúlio Vargas, 1200 Vila Nova Santana  
19807-634 Assis – SP

**MarieClaire R. Póla** - mariepola@yahoo.com.br  
**Sandra Malta Barbosa** - sbarbosa@uel.br  
UEL – Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática, Campus Universitário  
Caixa postal 6001  
86051-990 – Londrina – PR.

***Resumo:** Este artigo apresenta uma metodologia utilizada em um Projeto de Ensino desenvolvido com alunos do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina com dificuldade de aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial Integral. Essa metodologia privilegia o uso de um software de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre, com o qual é possível representar um problema de diversas maneiras (algebricamente, graficamente, geometricamente e por meio de uma planilha). Os problemas escolhidos tinham todos de certa forma um enfoque geométrico e estavam relacionados ao cálculo de máximos e mínimos de uma função. Os resultados obtidos até o momento sugerem que os alunos compreendem melhor os conceitos de cálculo quando podem representá-los de diferentes maneiras.*

***Palavras-chaves:** Máximos e mínimos, Derivadas, Cabri-Géomètre.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Na Universidade Estadual de Londrina o índice de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral (CDI) junto aos alunos do curso de Engenharia Civil é de certa forma alarmante. Preocupados em reverter esse quadro, professores e alunos de mestrado e doutorado resolveram desenvolver um Projeto de Ensino, privilegiando o uso de múltiplas representações de problemas de máximos e mínimos que tivessem um enfoque geométrico, utilizando um software de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre.

O Projeto de Ensino foi desenvolvido com base nos estudos realizados por Cury (1994) e Villareal (1999) sobre os problemas enfrentados pelos alunos para aprender CDI e as propostas apresentadas por essas pesquisadoras. Além disso usou-se a teoria de Duval (2003) sobre as

representações múltiplas. Serão relatadas algumas atividades desenvolvidas nesse Projeto de Ensino, bem como alguns resultados obtidos até o momento.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Iniciado o levantamento bibliográfico sobre as dificuldades de aprendizagem do CDI, chegou-se aos trabalhos desenvolvidos por Villareal (1999), Cury (1994), Borba e Penteado (2003), Duval (2003).

Cury (1994) desenvolveu uma pesquisa junto a alunos de CDI do curso de Engenharia Civil da PUC do Rio Grande do Sul, vindos de um programa em que se dava ênfase à compreensão dos conceitos. Foram analisados os erros cometidos nas provas, classificando-os e tecendo algumas considerações sobre suas causas. Após dois anos de pesquisa, verificou-se que a maior dificuldade dos alunos estava relacionada com o reconhecimento de gráficos, das diversas funções gráficas, aplicação de regras de derivação e integrais indefinidas, chamados de erros resistentes. Esses erros continuavam a aparecer, apesar das explicações do professor. Nas provas aplicadas aos alunos foram analisadas especialmente questões relacionadas a derivadas e integrais e apareciam sempre erros relacionados à simplificação e fatoração, evidenciando problemas com a aprendizagem das propriedades das operações no conjunto dos reais. Em função disso, foi planejado um acompanhamento dos estudantes, realizando com eles atividades que envolvessem os pré-requisitos, as preferências de aprendizagem, os erros cometidos e novas abordagens metodológicas (entre elas o uso de programas gráficos). Essa abordagem vem reforçar o que sugerem Borba e Penteado (2003), quando dizem que o uso de computadores pode ajudar na compreensão dos conceitos de CDI usando representações múltiplas, tais como representações gráficas, algébricas, geométricas e planilhas.

Duval (2003) por sua vez fala sobre a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Segundo ele, além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática, Duval fala, parodiando Descartes, de “registro” de representação. Ele salienta que existem diferentes tipos de registros. O quadro a seguir apresenta esses tipos de registros.

	<b>Representação discursiva</b>	<b>Representação não-discursiva</b>
<b>Registros Multifuncionais</b> Os tratamentos não são algoritmizáveis	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Língua natural</li> <li>- Associações verbais (conceituais)</li> <li>- Forma de raciocinar:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- argumentação a partir de observações e crenças;</li> <li>- dedução válida a partir de definições e teoremas.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figuras geométricas planas ou em perspectiva.</li> <li>- Configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3               <ul style="list-style-type: none"> <li>- apreensão operatória e não apenas perceptiva</li> <li>- construção com instrumentos.</li> </ul> </li> </ul>
<b>Registros Monofuncionais</b> Os tratamentos são principalmente	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistemas de escrita:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Numérica (binária, decimal e fracionária)</li> <li>- Algébrica</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gráficos cartesianos.               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mudanças de sistema de coordenação;</li> <li>- Interpolação e extrapolação.</li> </ul> </li> </ul>

algoritmos.	- Simbólica (linguagens formais) - Cálculo	
-------------	---	--

Segundo Duval, a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Certamente na resolução de um problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir a possibilidade de passar de um registro ao outro. Duval afirma que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.

Durante a realização das atividades com os alunos que participaram do Projeto de Ensino, privilegamos essa variedade de representações. Os problemas eram apresentados numa linguagem escrita, natural, que devia ser transformada em uma linguagem matemática (representação algébrica, em forma de uma função), que por sua vez podia ser representada em forma de gráfico, de uma figura geométrica e por meio de planilhas.

### 3. METODOLOGIA

O Projeto de Ensino foi desenvolvido com um grupo de 40 alunos do curso de Engenharia Civil da UEL. Decidiu-se aplicar um pré-teste baseado em questões já validadas por Cury (1994) e Villareal (1999). Foram incluídas neste pré-teste questões sobre noções consideradas pré-requisitos para que se possa resolver os problemas de Cálculo Diferencial e Integral (fatoração, simplificação, racionalização, inequações, domínio de funções, gráficos de funções), além de cálculo de derivadas e limites, conceito de reta tangente e integral. Os resultados do pré-teste mostraram que os alunos tinham o mesmo tipo de dificuldades apresentado pelos alunos que participaram da pesquisa de Cury. Foram ministradas algumas aulas em ambiente tradicional de sala de aula para sanar essas dificuldades e em seguida foram iniciadas as atividades realizadas no laboratório de informática, usando o software Cabri-Géomètre II, que é um software de Geometria Dinâmica. Esse software permite a construção de figuras que normalmente podem ser construídas com régua e compasso, a construção de gráficos e a movimentação dos elementos de uma figura, para que se possa observar determinadas variações. Ele possui uma calculadora e também possibilita a construção de tabelas a partir dos dados apresentados nas construções.

A seguir serão apresentados alguns dos problemas trabalhados no laboratório de informática usando o software Cabri-Géomètre. Procurou-se trabalhar com problemas que, de alguma maneira, mostrassem aplicações práticas de conteúdos de CDI na Engenharia (máximos e mínimos). A maior parte dos problemas escolhidos foi encontrada em livros de CDI. A grande vantagem de resolvê-los usando o Cabri é fazer uma análise de conjecturas, a verificação das possibilidades de variação dos elementos do problema, análise de possíveis soluções, sem ter que estar desenhando a mesma coisa várias vezes ou fazendo cálculos demorados.

#### 3.1 Problema do retângulo de perímetro fixo

Obter o retângulo de área máxima, cujo perímetro seja 10 cm.

Inicia-se a resolução do problema desenhando-se um retângulo cujo semi-perímetro é 5cm e cujos lados podem variar. Em seguida constroi-se um gráfico, cuja coordenadas são representadas pelo valor de um dos lados e pela área (que varia em função da variação dos lados).

Procura-se o retângulo de área máxima. Ao variar a posição do ponto x (que pode variar em um intervalo de 0 a 5 – semi-perímetro do retângulo), pode-se observar a variação da forma e da área do retângulo. Além disso, observa-se a variação do gráfico da função que associa o valor de x (medida de um dos lados) e a área do retângulo. A parábola representa o lugar geométrico dos valores da área do retângulo quando o valor de x varia. Pode-se observar que quando o x coincide com o vértice da parábola, a área do retângulo é máxima, ou seja, o retângulo de área máxima é um quadrado.

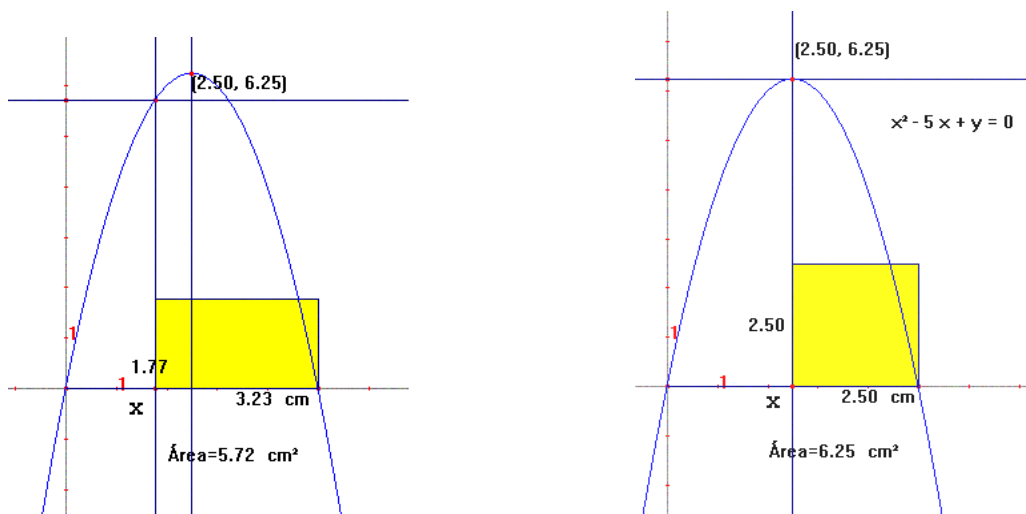


Figura 1: Variação da área de um retângulo de perímetro constante

A vantagem de se utilizar um software como o Cabri é visualizar múltiplas representações de um mesmo problema ao mesmo tempo. Segundo Duval (2003), para que um conceito seja bem compreendido, é necessário que ele seja representado pelo menos de duas maneiras diferentes. No caso acima temos três representações: geométrica (representação do retângulo), gráfica (parábola que representa a variação da área em função da variação dos lados do retângulo) e a representação algébrica (função). Ainda poderíamos ter feito a representação tabular (tabela com os dados do valor dos lados e o valor da área).

### 3.2 Problema da Usina

Uma fábrica situada às margens de um rio pretende utilizar a energia produzida por uma usina situada do outro lado do rio. Sabendo-se que a largura do rio nesse ponto é de 900 m e que a fábrica está situada 3 km a jusante da usina, pergunta-se qual é a solução mais econômica, tendo em vista que para passar os cabos por terra o custo é de R\$ 20,00/m e por baixo da água é de R\$ 25,00/m.

A função custo é dada por:  $y = 20.(3 - x) + 25.\sqrt{x^2 + 0,81}$ .

A figura 2 representa a situação proposta. A distância x pode variar, movimentando-se o ponto compreendido entre os extremos. Utilizando-se a calculadora do Cabri pode-se calcular o

custo, multiplicando-se as medidas dos segmentos UC e CF respectivamente por 20 e 25, custo das ligações por terra e por água. Pode-se mostrar o resultado obtido na tela e a cada vez que se movimentar o ponto x, o valor do custo é atualizado na tela do computador. Onde se lê “custo=73,53 cm”, leia-se “73,53 reais”, pois o Cabri não faz a conversão de unidades.

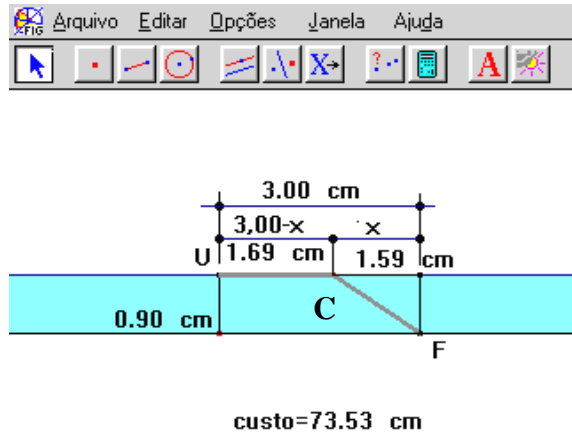


Figura 2: Esquema da Usina

Se os cabos forem levados 3 km por terra e 900m por água, atravessando o rio perpendicularmente a sua margem, o custo será igual a R\$ 82,50, como mostra a figura 3. Se ele for levado todo pela água, a distância percorrida será a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são 900m e 3000. O custo é menor do que o mostrado na figura 3 e é mostrado na figura 4.

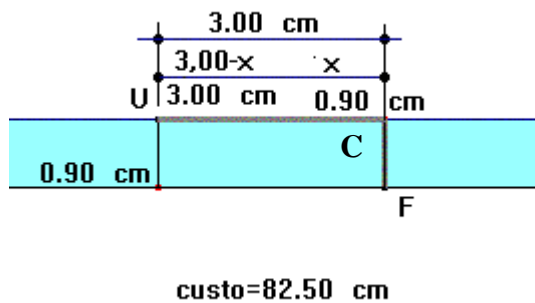


Figura 3: Cabos 3 km por terra e 900m por água

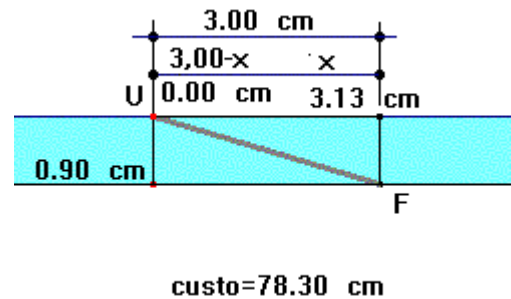
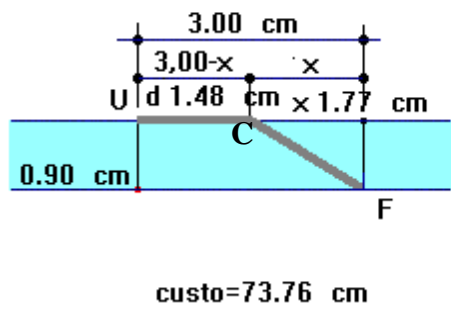


Figura 4: Cabos só pela água.

A pesquisa pode continuar movimentando-se o ponto x até se obter por tentativa, o menor custo, mas existem outras maneiras de fazer essa verificação. Uma delas é construindo uma tabela no próprio Cabri. Constrói-se a tabela de maneira usual, colocando-se um dos valores e depois anima-se a tabela e o ponto x, de modo que a tabela é completada instantaneamente, com uma série de valores, como mostra a figura 5. Pode-se observar ai que o menor custo acontece quando os cabos forem levados por terra até uma distância de 1,8 km da Usina ou 1,2 km antes da perpendicular que parte da Fábrica para atravessar o rio.



	d	custo=
1	1.48	73.76
2	1.56	73.65
3	1.62	73.59
4	1.68	73.54
5	1.74	73.51
6	1.80	73.50
7	1.86	73.51
8	1.92	73.55
9	1.98	73.61
10	2.04	73.70
11	2.10	73.82

Figura 5: Tabela mostrando as variações do custo em função da posição de x.

Uma outra maneira de mostrar o custo mínimo é construindo o gráfico cartesiano da função custo. Para construir o gráfico, inicialmente se define o intervalo, traçando-se sobre o eixo  $x$ , a partir da origem dos eixos, um segmento de 3 cm, que representa os 3 km de distância da Usina até o ponto perpendicular à Fábrica no outro lado do rio. Sobre esse segmento, transfere-se a distância UC. Transfere-se para o eixo  $y$  o valor da função custo  $f(x)$ . Obtém-se o ponto cujas coordenadas são  $x$  e  $f(x)$  e em seguida pede-se ao Cabri para obter o lugar geométrico desse ponto quando o ponto  $x$  (da figura inicial) se deslocar. Obtém-se uma curva, cujo ponto de vértice é o ponto de mínimo da função, como mostra a figura 6. Mais uma vez o aluno pode se certificar que o custo mínimo é 73,50, como já tinha constatado ao fazer a tabela ou manipular o ponto C da figura inicial.

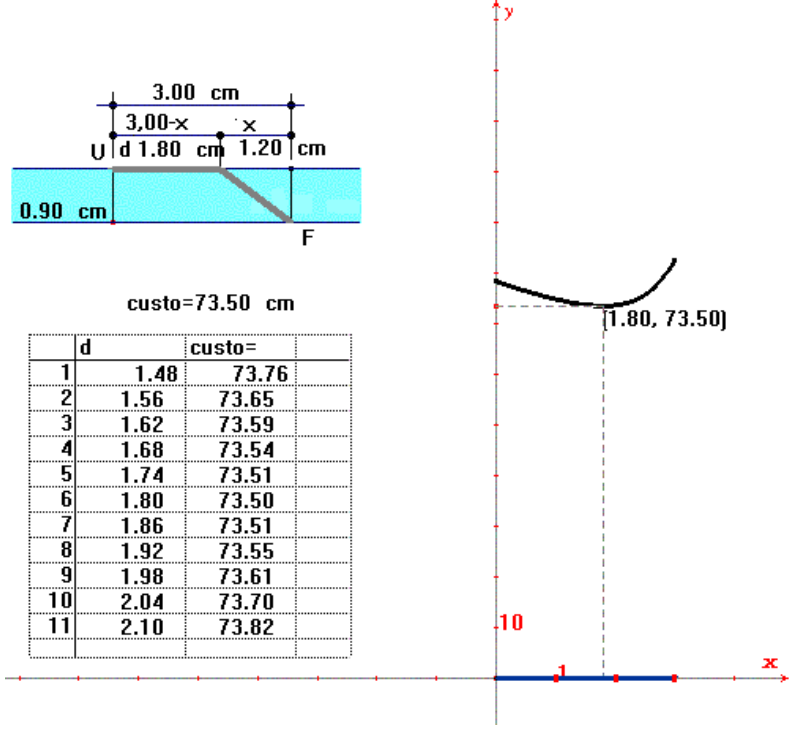


Figura 6: Várias representações

Falta agora comprovar algebricamente, usando as ferramentas aprendidas nas aulas de CDI. Assim sendo, retomamos a função custo inicial. Onde  $z = \sqrt{x^2 + 0,81}$

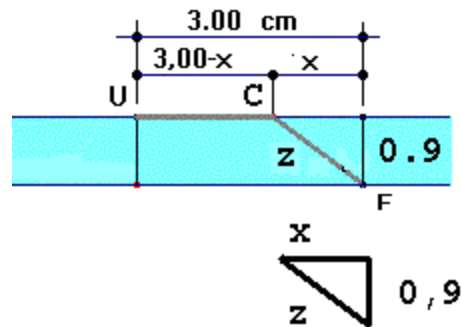
A função custo é:

$$y = 20 \cdot (3 - x) + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 0,81}$$

Cuja função derivada é:  $y' = -20 + \frac{25 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 0,81}}$

e tomando a derivada igual a 0, temos o ponto crítico,  $x = 1,2$ .

Assim podemos verificar algebricamente os dados obtidos com o desenho feito no Cabri.



### 3.3 Problema da calha.

Pretende-se construir uma calha de seção trapezoidal como mostra a figura abaixo. Qual deve ser o ângulo da face inclinada em relação à horizontal, para que a calha tenha vazão máxima?

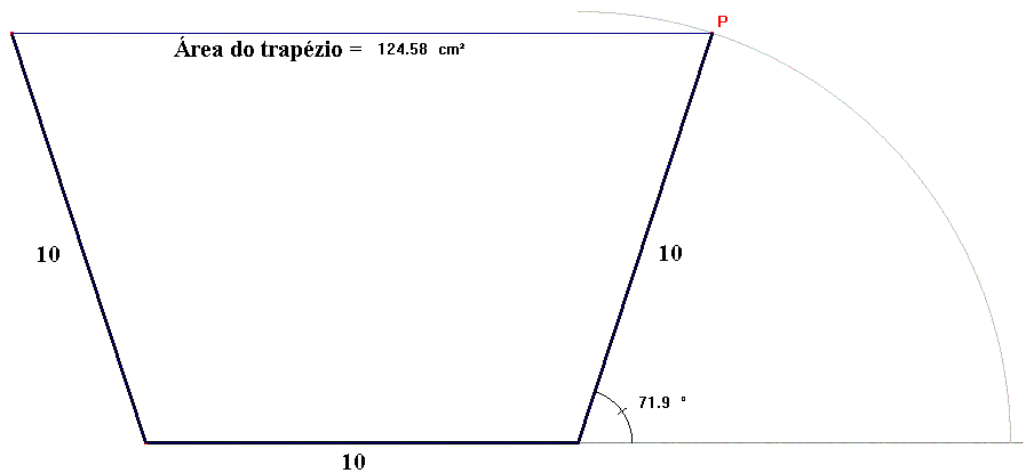


Figura 7: Calha

Construindo-se a figura da calha no Cabri, pode-se fazer variar o ângulo de inclinação e observar simultaneamente a variação da área da calha, cujo valor é usado no cálculo da vazão da água que deve escoar por ela.

Verificamos com o auxílio da tabela que o ângulo que proporciona uma vazão máxima está em torno de  $60^\circ$ , como mostra a figura 8. Fazendo os cálculos podemos chegar ao valor exato do ângulo.

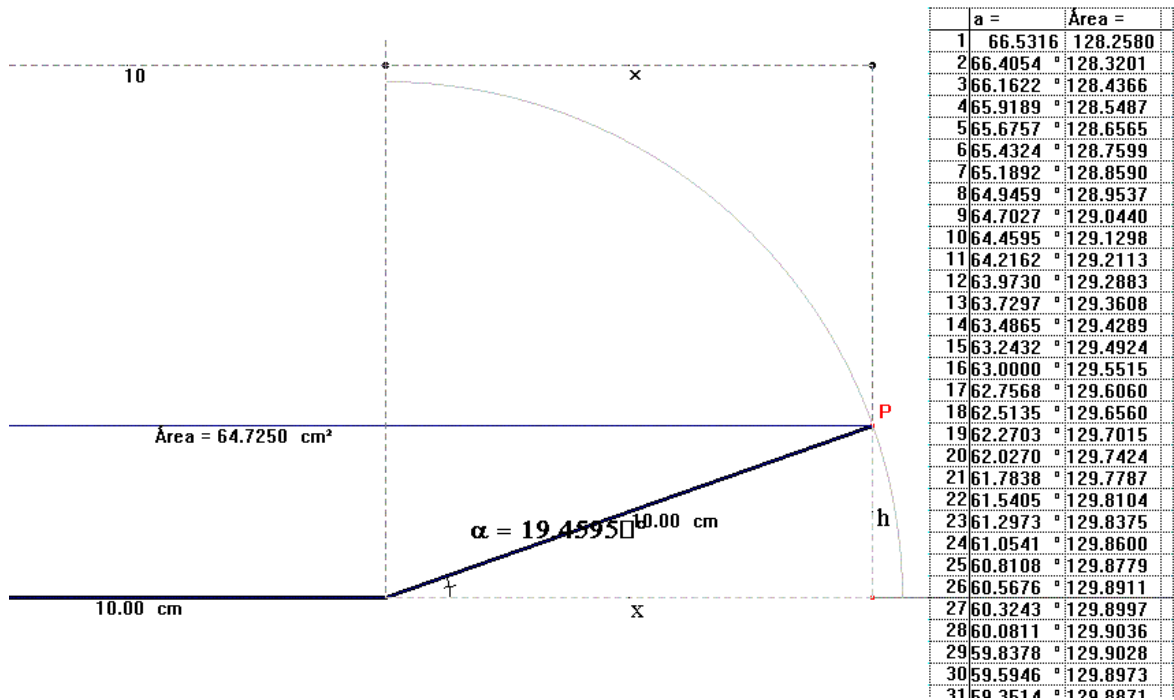


Figura 8: Cálculo do ângulo usando Tabela

Considerando-se que :

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \qquad B = 10 + 2x$$

Temos que obter primeiramente os valores de x e de h, que estão em função do ângulo que a face lateral da calha forma com a horizontal, mostrado na figura 9.

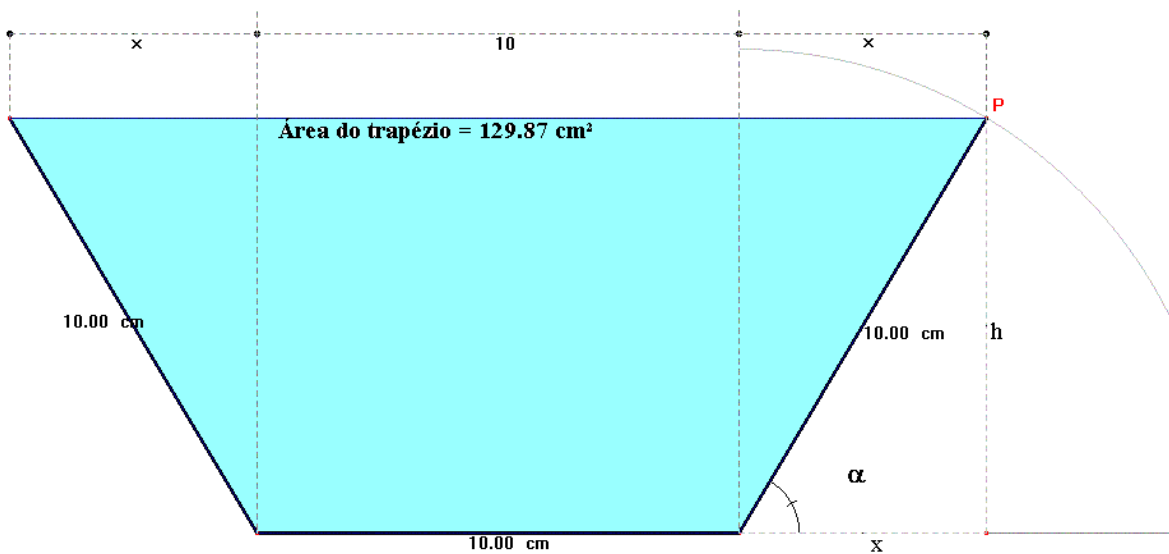


Figura 9: Ângulo da Face Lateral



$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = h/10 \\ \cos \alpha = x/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 10 \operatorname{sen} \alpha \\ x = 10 \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 10 + 2x \\ B = 10 + 2(10 \cos \alpha) \end{cases}$$

Substituindo na fórmula da área do trapézio:

$$A = \frac{(10 + 20 \cos \alpha + 10) \cdot 10 \operatorname{sen} \alpha}{2} = 100 \operatorname{sen} \alpha + 100 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Derivando em relação a  $\alpha$  temos:

$$A'(\alpha) = 100(2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1), \text{ cujo ponto crítico acontece quando } \alpha = 60^\circ.$$

Portanto, a vazão máxima acontecerá quando o ângulo que a face lateral da calha forma com a horizontal for de  $60^\circ$ .

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procuramos mostrar como foi desenvolvido um Projeto de Ensino junto a alunos de Engenharia Civil com problemas de aprendizagem em CDI. Foram revisados conceitos básicos e trabalhados conceitos específicos do CDI usando o software de Geometria Dinâmica, Cabri-Géomètre II. Após todo um semestre de aulas práticas em laboratório, os alunos foram entrevistados para verificarmos o que eles tinham achado da experiência e se esta os havia ajudado a compreender melhor os conceitos de CDI. Durante as entrevistas verificou-se que a preferência dos alunos por um ou outro tipo de representação variava bastante. Havia aqueles que preferiam as representações gráficas e as tabelas, enquanto outros preferiam as gráficas e as geométricas. De um modo geral, notou-se que esses tipos de representações que não são usuais no CDI, dão sentido para as representações algébricas que os alunos estão habituados a utilizar, sem compreendê-las na maior parte das vezes. A seguir apresentaremos algumas considerações feitas pelos alunos com relação a metodologia utilizada:

“Acho que a representação geométrica facilitou muito porque os gráficos eu já tinha visto de monte nos livros”.

“Fica mais fácil de entender vendo o gráfico e não apenas o exercício escrito”.

“Às vezes vendo só no gráfico não dá pra ter tanta idéia, mas quando tem a figura (representação geométrica) dá uma idéia melhor”. (problema da calha, ...).

“A tabela é boa para chegar na aproximação do máximo e do mínimo, como a gente tem fazer em Cálculo Numérico” (referindo-se a disciplina de Cálculo Numérico, que eles estavam cursando no mesmo período em que participaram do Projeto de Ensino).

"É mais fácil enxergar o erro no computador. Quando se usa um ângulo errado, por exemplo, no computador dá pra ver pois *"ta na cara que não está certo"* (referindo-se aos resultados inesperados que o computador apresenta quando existe um erro).

"O fato de usar bastante exemplo prático (referindo-se ao problema da calha, da usina, ...) ajuda a motivar para se estudar o Cálculo".

"Entendi para que serve a derivada. Eu pensava que era só um monte de cálculo, usando um monte de fórmulas. Agora vi que ela dá origem a outras curvas, retas...."

"Tenho mais facilidade em aprender com material visual do que só ouvindo ou escrevendo números".

Estas são apenas algumas opiniões externadas pelos alunos com relação às atividades desenvolvidas no projeto. Mesmo sem termos obtidos resultados mais significativos até o momento, acreditamos que o caminho para a formação de conceitos sólidos em CDI passa pelo caminho das representações múltiplas e que softwares de Geometria Dinâmica podem auxiliar sobremaneira a compreensão desses conceitos tidos como muito abstratos pelos alunos.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G., *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

CURY, H. N., *As Concepções de Matemática dos Professores e Suas Formas de Considerar os Erros dos Alunos*, Tese de Doutorado, Orientador Prof. Dr. Juan José Mouriño Mosquera – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Faculdade de Educação, Porto Alegre, 1994.

DUVAL, R., Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. MACHADO, S. D. A. (Org.) - Campinas: Papirus, (Coleção Papirus Educação), 2003.

VILLARREAL, M. E. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. Tese de Doutorado. IGCE, UNESP - Rio Claro, 1999.

## **INTEGRAL DIFFERENTIAL CALCULUS PROBLEM SOLVING APPLIED TO ENGINEERING USING MULTIPLE REPRESENTATION AND DINAMIC GEOMETRY SOFTWARE**

**Abstract:** *This article presents the methodology used in a Teaching Project developed around Civil Engineering students from the State University of Londrina that demonstrated learning difficulties during their Integral and Differential Calculus class. This methodology uses a Dinamic Geometry software, the Cabri-Geomètre, which makes possible the representation of a*

*problem in various ways (algebraically, graphically, geometrically and through a form). The chosen problems were all geometrically-based and were related to finding the maxima and minima of functions. The attained results at this time suggest the students understand better the concepts of calculus when they are able to represent them in other ways.*

***Keywords:*** *Maxima and Minima, Derivatives and Cabri-Geomètre*