



COBENGE 2005

XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia

“Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças”

12 a 15 de setembro - Campina Grande Pb

Promoção/Organização: ABENGE/UFCG-UFPE

ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS CURSOS DE ENGENHARIA

Viviana Cocco Mariani – viviana.mariani@pucpr.br
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM
Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR
Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho
81611-970 - Curitiba, PR, Brasil

Resumo: *O presente trabalho apresenta algumas idéias sobre a análise de erros cometidos na solução de questões de Cálculo Diferencial e Integral I e II, referentes a cálculos de derivadas e integrais de funções de uma variável e a utilização destes erros para melhorar o ensino destas disciplinas. As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II são comuns aos cursos de Ciências Exatas, estando presentes em todos os cursos de Engenharia. Por isto a importância das mesmas e a necessidade de verificar alguns dos fatores responsáveis pelos erros na obtenção de derivadas e integrais imediatas, utilizadas em grande parte das questões de provas e listas de exercícios, levando assim a altos índices de reprovações nos primeiros semestres destes cursos, causando um grande número de evasão. O artigo começa com uma breve explanação sobre as formas pedagógicas existentes para o ensino de Cálculo ou qualquer outra disciplina. Em seguida apresenta-se a análise estatística obtida através da aplicação de um questionário na PUCPR, são feitas considerações sobre os erros obtidos, e explorada as formas de trabalhar para tentar evitá-los.*

Palavras-chave: *Cálculo Diferencial e Integral, erros, Engenharia*

1. INTRODUÇÃO

O processo educativo, para muitos educadores, se dá a partir da experiência e dos saberes acumulados transmitidos de geração em geração. A transmissão da informação e do conhecimento, pronto e acabado, é a essência da *pedagogia tradicional* ou pedagogia bancária. Nesta pedagogia a iniciativa cabe ao professor que é ao mesmo tempo o sujeito do processo, o elemento decisivo e decisório. É o que constata FREIRE (1987):

“A educação se torna um ato de depositar em que os educandos são os depositários e o educador o depositante. Em lugar de comunicar-se, o educador faz comunicados e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis a concepção bancária da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los.”

Já DEWEY (1971) propõe que se fomente uma didática concretizada em estudos através de projetos, sendo o pensamento científico o centro da ação educativa. Este modelo didático denominado *pedagogia nova* dá ênfase a uma mudança radical do método de ensino, que passa a ser visto como processo no qual o conhecimento é constantemente construído e reconstruído, onde a iniciativa desloca-se para a atitude reflexiva do aluno, numa relação

interpessoal, intersubjetiva. O saber é adquirido através de uma situação problemática, onde hipóteses são formuladas, um desenvolvimento é seguido chegando-se a uma conclusão.

SAVIANI (1991) cita que na *pedagogia tecnicista* o elemento principal passa a ser a organização racional dos meios, ocupando professor e aluno posição secundária, relegados que são à condição de executores de um processo cuja concepção, planejamento, coordenação e controle ficam a cargo de especialistas, supostamente habilitados, neutros, objetivos, imparciais. Equivocadamente, a pedagogia tecnicista se deixa trair por um reducionismo perigoso quando coloca como centro de eficiência o material didático e, com isto, deixa em segundo plano a ação de alunos e professores no processo ensino-aprendizagem.

Nenhuma destas três formas isoladas resulta em uma resposta adequada ao processo educativo é necessário fazer uma integração entre elas buscando uma pedagogia que privilegie o diálogo, a crítica e a reflexão na busca do saber (FREIRE, 1986). O professor e o aluno se transformam em sujeitos ativos e cognitivos e, dessa forma, cria-se uma teia de comunicação no ambiente escolar, com a utilização dos instrumentos à disposição como o livro, o computador, o vídeo e a televisão, entre outros.

Segundo LÉVY (1993):

“Não existe uma técnica por trás da técnica, nem sistema técnico sob o movimento da indústria, mas apenas indivíduos concretos, situáveis e datáveis. Também não existe um Cálculo, uma Metafísica, uma Racionalidade acidental, nem mesmo um método que possam explicar a crescente importância das ciências e das técnicas na vida coletiva.”

A técnica é apenas a dimensão das estratégias que o homem utiliza pelas formas possíveis de entidades e forças humanas tais como a máquina, energia, elétrons, animais, plantas, a natureza em geral.

As novas bases da ação acadêmica reformulam a conduta do professor como o facilitador de múltiplas atividades na construção do conhecimento, abrindo espaço para o diálogo, para a efetividade de um processo didático onde professor e aluno são atores. O professor é o coordenador de um grupo que fazendo uso de uma certa metodologia exploram algum conteúdo do currículo. A ele cabe planejar, avaliar e re-planejar, se necessário. Na medição entre o saber e os métodos de estudo estão os materiais que serão utilizados na aprendizagem para viabilizar a didática.

Nos cursos de Engenharia o Cálculo é uma das disciplinas mais tradicionais e que tem preservado sua estrutura original, contudo existem vários materiais que podem ser explorados em uma disciplina de Cálculo, entre estes: livros, calculadoras gráficas, microcomputadores, vídeos, artigos, materiais concretos etc. As ferramentas tecnológicas, nas mãos dos alunos, se tornam instrumentos para obtenção de resultados. Sabemos que o computador não tem inteligência, sensibilidade, emoção e nem intuição, características próprias dos alunos, somente quando usado por um sujeito é que o computador se torna instrumento que pode explicitar as muitas qualidades de quem o manuseia. Vários trabalhos vem sendo desenvolvidos nos últimos anos utilizando as ferramentas tecnológicas para melhorar a qualidade do ensino de Cálculo, entre estes pode-se citar: FRANCHI (2001), BALDIN e BALDIN (2001), SESTOKAS *et al.* (2002), DANDOLINI *et al.* (2004).

Na Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR) os professores, que ministram as disciplinas de Cálculo, utilizam alguns dos recursos citados anteriormente em suas aulas, sem perder de vista o objetivo principal, de que o aluno deve ter a atitude de questionar, procurar por diversos tipos de representações (numérica, gráfica e analítica) de um problema, e ter a capacidade de apresentar argumentos diferentes durante a execução de uma atividade. Contudo, o que se observa é o surgimento de alguns erros freqüentes entre os alunos quando da solução de derivadas e integrais. Analisar os erros cometidos pelos alunos é uma tarefa

habitual de um professor de Cálculo, contudo a forma com que elaboramos a prova e com quais objetivos estamos analisando estes erros podem ser fatores determinantes de fracasso ou de sucesso do aluno (CURY, 2004).

Sob a abordagem da análise de erros, no presente trabalho foi realizada uma investigação, sobre os erros que podem surgir na solução de alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral I e II. A amostra da pesquisa foi composta de 134 alunos do primeiro e segundo períodos (semestres) da PUCPR, dos cursos Engenharia Mecânica, Engenharia Ambiental e Engenharia Química. Destes alunos 47 são do sexo feminino e 87 do sexo masculino. Sendo que 38 estudam no primeiro período e 96 no segundo período. A faixa etária compreendida na pesquisa foi composta por 82 alunos com menos que 20 anos, 50 alunos na faixa etária entre 20 e 30 anos (em sua maior parte, menos que 25 anos) e 2 alunos com mais de 30 anos. Destes alunos 39 estudam no período matutino, 54 alunos no período vespertino e 41 alunos no período noturno.

O questionário formulado, para efetivar a presente pesquisa, continha 15 questões envolvendo cálculo de derivadas e integrais. Entre os dias 24 e 26 de novembro de 2004 o questionário foi aplicado. Nesta pesquisa a par dos resultados obtidos procurou-se estabelecer padrões para os erros mais freqüentes obtidos. A principal categoria avaliada neste trabalho foi à modificação de regras de derivação ou integração, através do uso de falsas generalizações pelo aluno.

2. QUESTIONÁRIO E DADOS ESTATÍSTICOS

O questionário, composto de 15 questões relacionadas com a obtenção de derivadas e integrais de funções de uma variável, tem algumas das suas questões apresentadas a seguir, juntamente com a análise estatística obtida. Os alunos cursando o primeiro semestre dos cursos avaliados não responderam as questões sobre integração.

A primeira questão relacionada à disciplina Cálculo Diferencial e Integral I disponível no questionário foi $d(5x + 3)/dx$. Entre as respostas obtidas para esta questão com maior índice está o valor "5" respondido por 116 alunos, o valor "8" foi a resposta de 5 alunos e os demais obtiveram outras soluções. Esta simples questão aborda quatro regras de derivação usadas amplamente durante todo o curso, que são:

1^a.) Se k é uma constante e $f(x) = k$ para todo x , então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d(k)}{dx} = 0$, ou seja, a derivada de uma função constante é nula.

2^a.) Se n é um número real não nulo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$, conhecida como regra da potência.

3^a.) Sejam f e g duas funções e k uma constante, se $g(x) = kf(x)$, então $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d(kf(x))}{dx} = kf'(x)$.

4^a.) Sejam f , g e h funções, se $h(x) = f(x) + g(x)$ então $h'(x) = \frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$, derivada de uma soma.

Ao resolver a primeira questão todos alunos já conhecem estas regras e já estão habituados a usá-las, então porque 14% não resolveram de forma correta a questão? Nota-se na “Figura 1” que 4% dos alunos usaram uma regra falsa, isto é a derivada da função constante permaneceu sendo a própria constante, por isto encontraram o valor “8” para a questão.

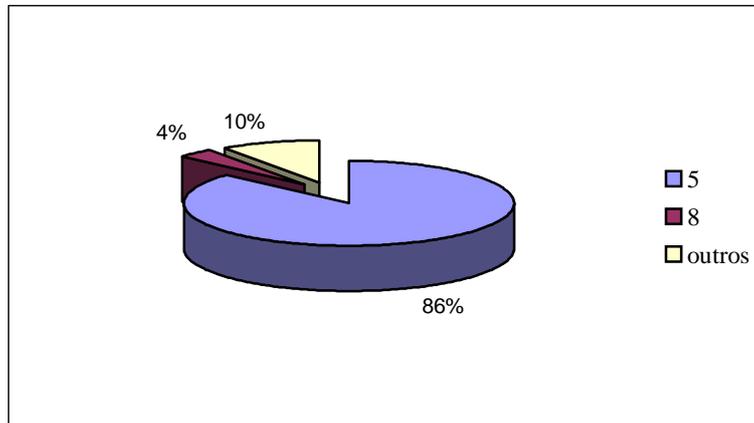


Figura 1 – Porcentagem relacionada à primeira questão.

A segunda questão abordada foi a obtenção da derivada da função $\text{sen}(x) \cdot 7x$. Para resolver esta questão o aluno deveria lembrar de três regras de derivação sendo uma delas a terceira regra já apresentada anteriormente para a primeira questão, as demais são,

5^a.) Sejam f , g e h funções, se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ então

$$h'(x) = \frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ derivada do produto.}$$

6^a.) Seja $f(x) = \text{sen}(x)$ então $f'(x) = \text{cos}(x)$, derivada da função seno.

Os resultados obtidos com a solução da questão 2 estão apresentados na “Figura 2”. Onde nota-se que houve uma falsa generalização da 5^a. regra de derivação, aqui apresentada. Nesta questão 11% dos alunos ao derivar o produto de duas funções apresentaram como solução o produto da derivada das duas funções, fazendo uma generalização da 4^a. regra (derivada de uma soma).

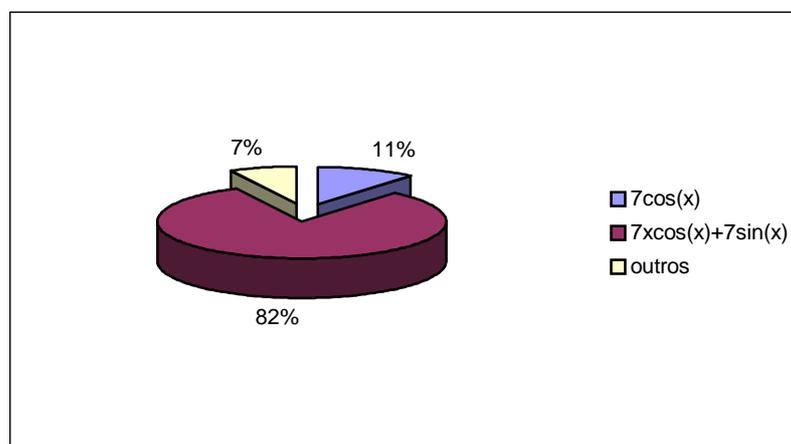


Figura 2 – Porcentagem relacionada à segunda questão.

A terceira questão apresentada no questionário foi $d(e^x)/dx$. Esta questão envolve apenas uma regra de derivação, que é:

7^a.) Seja $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), então $f'(x) = a^x \ln(a)$, derivada da função exponencial.

Nota-se na “Figura 3” que 15% dos alunos avaliados optaram pelo uso da 2^a. regra de derivação, tratando a função exponencial como uma função polinomial, onde a regra da potência é utilizada. A resposta correta foi obtida por 71% dos alunos. Frequentemente os alunos confundem a regra da função exponencial com a regra da potência. Uma nova regra foi criada por 4% dos alunos onde derivaram apenas o expoente x da função $f(x) = e^x$, como a derivada é em relação à x obteve-se como resultado errôneo o valor e^1 .

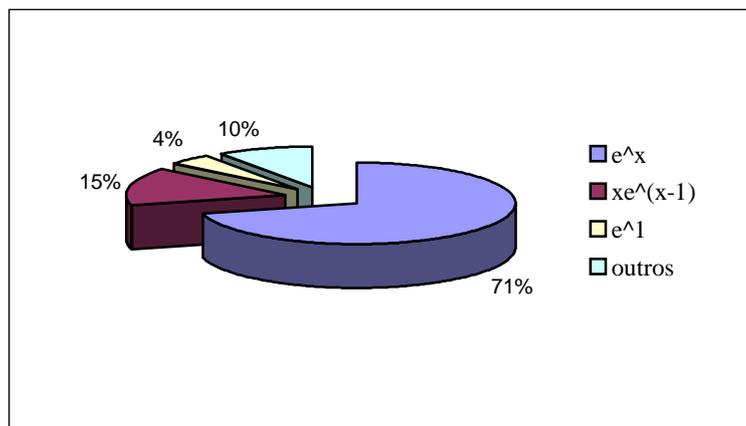


Figura 3 – Porcentagem relacionada à terceira questão.

A quarta questão proposta solicitava o cálculo da derivada da função $f(x) = \cos(5x)$. A regra utilizada para derivar esta função envolve uma função composta da seguinte forma,

8^a.) Seja $y = \cos(u)$ então $y' = -u' \text{sen}(u)$.

Para a questão $u = 5x$, logo tem-se $y' = -5 \text{sen}(5x)$. Na “Figura 4” percebe-se que 67% dos alunos acertaram a questão, 19% esqueceram de derivar o arco da função no caso esquecendo do valor 5 multiplicando a derivada da função co-seno, 7% não derivaram a própria função co-seno porém derivando o arco, enquanto 7% optaram por outra resposta incorreta. Ao esquecer de derivar o arco da função co-seno composta o aluno está generalizando a regra $d(\cos(x))/dx = -\text{sen}(x)$ de uma função co-seno simples, o que é um erro comum entre os alunos.

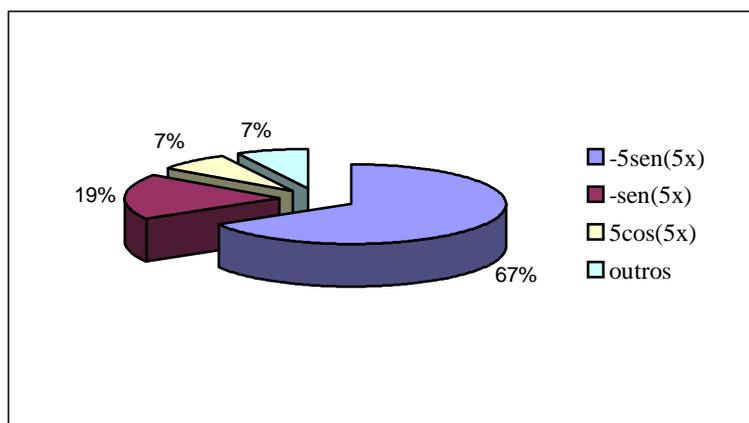


Figura 4 – Porcentagem relacionada à quarta questão.

A quinta questão apresentada no questionário refere-se a derivada da função $\text{sen}^2(7x)$. Esta derivada envolve o uso das regras 2^a., 6^a. e 8^a. apresentadas neste trabalho. Nesta questão, conforme nota-se na “Figura 5”, a resposta obtida por 68% é a correta enquanto 15% dos alunos generalizaram a regra da potenciação esquecendo de derivar o arco da função seno e 5% dos alunos obtiveram a resposta $7\cos^2(x)$ generalizando a 8^a. regra para a função seno, $d(\text{sen}(g(x)))/dx = g'(x)\cos(g(x))$, esquecendo de usar a regra da potência.

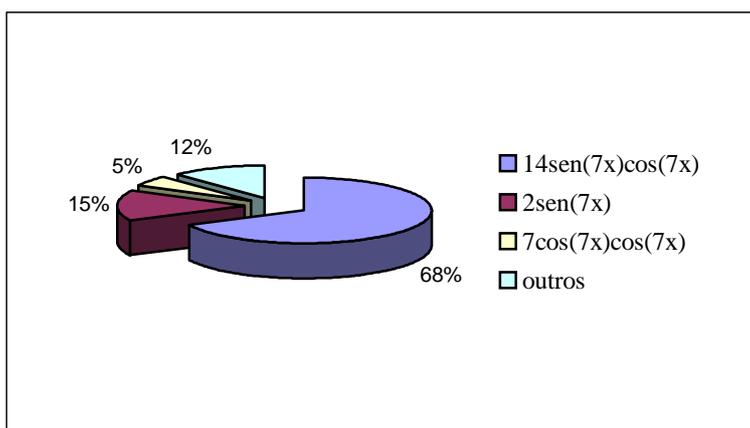


Figura 5 – Porcentagem relacionada à quinta questão.

A sexta questão refere-se a derivada da função logarítmica, $d(\ln(5x))/dx$, cuja regra a ser usada é:

9^a.) Seja $y = \ln(u)$ então $y' = \frac{u'}{u}$, $u > 0$.

A resposta obtida por 76% dos alunos estava correta, contudo 13% obtiveram como resposta o valor “5/x” e 4% o valor “5” derivando apenas o argumento da função logarítmica natural, conforme ilustrado na “Figura 6”.

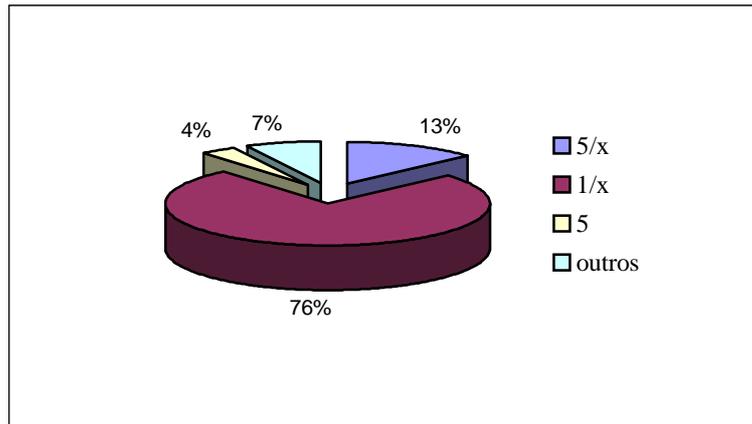


Figura 6 – Porcentagem relacionada à sexta questão.

A décima primeira questão apresentada refere-se ao cálculo de uma integral por partes indefinida $\int x \text{sen}(x) dx$. A regra para ser usada nesta questão era,

10^a.) Seja $\int f(x)g(x)dx$ a obtenção da solução para esta integral depende das funções $f(x)$ e $g(x)$, contudo na questão apresentada aos alunos a solução envolve a integração por partes para a sua solução que é $\int f(x)g(x)dx = \int u dv = uv - \int v du$

A integração por partes é uma das integrações menos “simpática” aos alunos, contudo as respostas obtidas foram surpreendentes, conforme “Figura 7”, que segue. Esta questão foi respondida apenas por alunos do 2^o. período, onde 84% obtiveram a resposta correta, 5% obtiveram a resposta $\frac{x^2}{2} \cos(x)$, integrando ambas as funções $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, generalizando a regra utilizada para a adição de duas funções onde $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, contudo esta regra não é válida para o produto de duas funções. A resposta $\cos(x)$ foi obtida por 5% dos alunos onde a função $f(x) = x$ foi esquecida no processo de integração.

Na décima segunda questão solicitava-se o cálculo da integral $\int x^3 dx$. A regra utilizada nesta questão é,

$$11^a.) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

A “Figura 8” ilustra os resultados obtidos para esta questão, onde 90% dos alunos do segundo período (semestre) obtiveram a resposta correta, já 4% derivaram a expressão x^3 no lugar de integrá-la e 3% dos alunos esqueceram do valor do denominador na expressão.

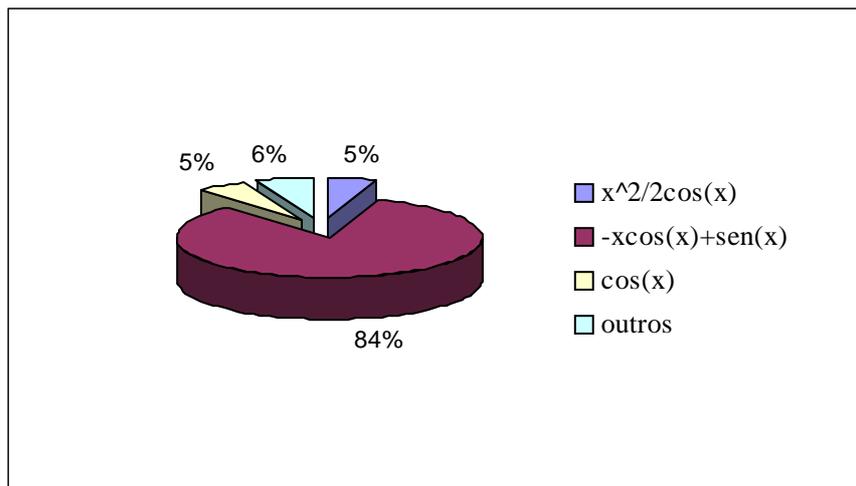


Figura 7 – Porcentagem relacionada à décima primeira questão.

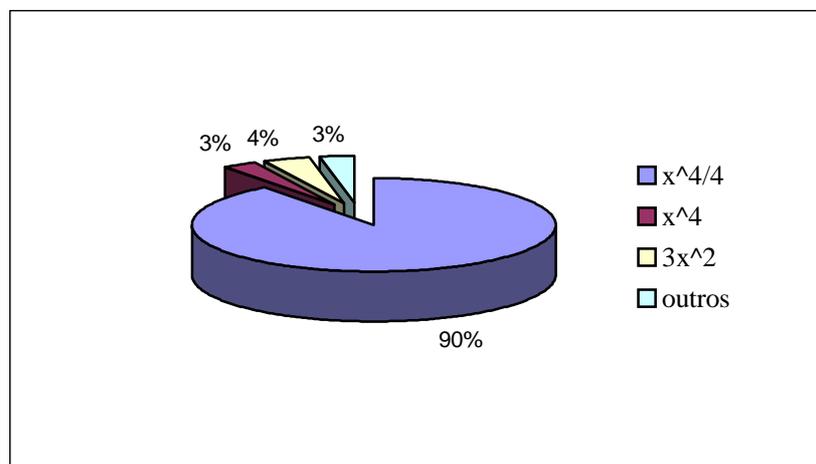


Figura 8 – Porcentagem relacionada à décima segunda questão.

3. ANÁLISE DOS ERROS

Ao pensar em perspectivas atuais para a análise de erros, deve-se levar em conta os pressupostos didático-pedagógicos seguidos pela Instituição de Ensino e pelo grupo de professores. Aos poucos é possível introduzir novas idéias, conceitos e um novo planejamento para o processo de ensino-aprendizagem, mas para isso é necessário executar experiências que venham ao encontro das necessidades e interesses de alunos e da sociedade, de uma forma geral. O uso da análise de erros em quaisquer circunstâncias é relevante, desde que algumas premissas básicas sejam levadas em consideração, que são (CURY, 2004):

- a) respeitar o aluno, devolvendo a ele a análise feita e discutindo os resultados, com o objetivo de explorar suas próprias potencialidades;
- b) planejar estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos;
- c) aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas, explorando habilidades de formular hipóteses, testá-las e discuti-las;
- d) para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem, com o grupo de alunos, para aproveitar todas as oportunidades de fazê-los pensar sobre seu próprio pensamento.

- e) construir com os alunos uma tabela com os principais erros obtidos, anotando a solução correta.

A tarefa de ensinar é uma tarefa profissional que, no entanto, exige amor, criatividade, competência científica e exige a capacidade de brigar pela liberdade sem a qual a própria tarefa fenece. Programar e avaliar não são momentos separados, um a espera do outro. São momentos em permanentes relações. A programação inicial de uma prática de ensino, às vezes, é refeita a luz das primeiras avaliações que a prática sofre. Avaliar implica, quase sempre, em re-programar, retificar. A avaliação, por isso mesmo, não se dá no momento que nos parece ser o final de certa prática (FREIRE, 2003).

4. CONCLUSÕES

A avaliação é um processo contínuo que envolve muitas variantes, tanto relativas aos conteúdos avaliados quanto às concepções do professor sobre os fins da avaliação e também quanto às diversas habilidades que os alunos disponibilizam na resolução de uma questão. O processo de ensino-aprendizagem deve estar em constante atualização. São inúmeras as alternativas, isto é, possibilidades para que isto ocorra, contudo o professor e o aluno têm papel fundamental neste processo. Vale ressaltar que, no processo de ensino, a prática da sala de aula é provida da experiência do professor cabendo a ele explorar os significados e a diversidade de registros de representação dos conceitos estudados.

O presente artigo descreveu e analisou alguns erros que surgiram na solução de questões de Cálculo Diferencial e Integral I e II na aplicação de um questionário em alguns cursos de Engenharia na PUCPR. Notou-se que os erros apresentados pelos alunos estão relacionados a falsas generalizações das regras de derivação e integração. Assim, indica-se para novas pesquisas a busca de abordagens de ensino que favoreçam a aprendizagem do conceito de derivada e integral, com a proposta de otimizar a articulação entre os registros de representação desses conceitos nas diferentes situações que envolvem seus significados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALDIN, Y. Y. e BALDIN, N., Calculadoras Gráficas como Auxiliar Didático no Ensino de Matemática para as Engenharias. In: XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Anais Eletrônicos, Porto Alegre, pp. 112-118, 2001.
- CURY, H. N., Análise de Erros em Educação Matemática, In: **Veritati**, Salvador, v.3, n.4, p. 95-107, jun. 2004.
- DANDOLINI, G. A., VANINI, L. e SOUZA, J. A., A utilização de Software no Ensino de Cálculo. In: XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Anais Eletrônicos, Brasília, 2004.
- DEWEY, J., **Experiência e Educação**, São Paulo, Nacional, 1971.
- FRANCHI, R. H. ° L., Utilização de Softwares nas Aulas de Matemática para Engenharia: Reflexão a partir de Atividades Desenvolvidas. In: XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Anais Eletrônicos, Porto Alegre, pp. 552-560, 2001.
- FREIRE, P., **Medo e Ousadia**, Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1986.
- FREIRE, P., **Pedagogia do Oprimido**, Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1987.
- FREIRE, P., **Professora sim tia não – cartas a quem ousa ensinar**, São Paulo, Olho D'água, 14^a. ed., 2003.
- LÉVY, P., **As tecnologias da Inteligência**, Rio de Janeiro, 34^a. ed., 1993.
- SAVIANI, D., **Escola e Democracia**, São Paulo, Cortez, 1991.

SESTOKAS-FILHO, B., Castanheira, A. M. P. e Antunes, G. S., O Ensino de Cálculo e a Construção do Conhecimento. In: XXX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2002.

ERRORS ANALISYS IN DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS IN THE ENGINEERING CURSES

Abstract: *This work presents some notions on the error analysis committed in the solution of questions of Differential and Integral Calculus I and II, referring the calculations of derivatives and integrals of functions of one variable and the use of these errors to improve the instruction of these disciplines. The disciplines of Differential and Integral Calculus I and II are common to courses of Exact Sciences, being present in all the courses of Engineering. For this the necessity and importance to verify some of the responsible factors for the errors in the obtainment of derivatives and immediate integrals, used to a large extent of the questions of tests and exercises lists, thus leading the high indices of reprovig in the first semesters of these courses, causing a great number of evasion. The article starts with one brief communication on the existing pedagogicals forms for the instruction of Calculus or any another discipline. After is presented analysis statistics obtained through of the application of a questionnaire in the PUCPR, considertions about errors obtained are made, and explored the forms of work to try to prevent.*

Key-Words: Differential and Integral Calculus, errors, Engineering.