

## UMA METODOLOGIA DE ESTUDO DE CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO ANALOGIA ELETRÔNICA

**Ronilson Rocha\*** – rocha@em.ufop.br

**Luiz de Siqueira Martins-Filho\*\*** – luizm@iceb.ufop.br

**Karla Boaventura Pimenta\*** – karla@iceb.ufop.br

\*Depto de Controle e Automação – DECAT/EM

\*\*Depto de Computação – DECOM/ICEB

**Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP**

**35400-000 Ouro Preto MG Brasil**

***Resumo:** Este trabalho apresenta uma metodologia experimental para o estudo de controle de sistemas não lineares, utilizando o conceito de analogia eletrônica para a simulação de sistemas dinâmicos e estratégias de controle. Neste caso, as variáveis de estado são representadas por sinais elétricos obtidos em circuitos eletrônicos análogos especialmente projetados para reproduzir o comportamento dinâmico de um sistema. O uso desta metodologia apresenta várias características interessantes para o desenvolvimento de plataformas didáticas, uma vez que consiste em uma forma mais realista de realizar simulações de sistemas em tempo real, apresentando diversos aspectos experimentais difíceis de serem simulados computacionalmente. Entretanto, uma implementação direta pode tornar-se muito complicada devido à existência de limitações impostas pelos dispositivos eletrônicos relacionadas com a amplitude e a frequência dos sinais elétricos. Como exemplo, são desenvolvidos projetos e implementações de circuitos eletrônicos analógicos que reproduzem o comportamento dinâmico de sistemas caóticos e de controle de atitude de um satélite artificial.*

***Palavras-chave:** sistemas dinâmicos, simulação analógica, laboratório de ensino.*

### 1. INTRODUÇÃO

O conteúdo de um curso de engenharia envolve uma extensa teoria reformulada e unificada para aplicação a diversos problemas práticos. Devido ao alto grau de abstração envolvido em vários tópicos, não se pode negar que o ensino de engenharia pode se tornar altamente teórico, e até mesmo esotérico (Jayawant, 1988). Entretanto, um aspecto importante concernente à educação em engenharia consiste no contato do estudante com o processo real e o seu hardware associado (Saco et al., 2002), de forma que atividades práticas, além de proporcionarem uma melhor compreensão do conteúdo teórico (Rocha et al., 2003), despertam maior interesse e motivação dos estudantes para problemas reais onde podem aplicar os conhecimentos teóricos adquiridos (Abusleme et al., 2003). Desta forma, a educação em engenharia deve ser uma composição entre conceitos teóricos e experimentais (Coelho et al., 2001). Embora experimentos práticos ofereçam uma maneira de introduzir maior realismo na educação, favorecendo a assimilação por parte do estudante de diversos conceitos de engenharia, a implantação de um laboratório para o desenvolvimento de atividades experimentais implica em vários problemas, tais como limitação de espaço, suporte

financeiro, dificuldades de construir um sistema real, quantidade de estudante, tempo máximo de duração das aulas, etc.

Considerando que as atividades laboratoriais de ensino devem ter o propósito de demonstrar conceitos e idéias importantes (*Aström e Ostberg, 1986*), e que as características dinâmicas de um determinado sistema podem ser reproduzidas por outro sistema análogo cuja implementação prática é mais fácil (*Ogata, 1982*), o conceito de analogia entre sistemas pode ser de grande ajuda no desenvolvimento de um laboratório para o ensino experimental de sistemas dinâmicos não-lineares. De certa forma, um modelo matemático pode ser considerado como um análogo matemático de um sistema real (*Aguirre, 2000*). Em termos práticos, a implementação de sistemas elétricos e eletrônicos é relativamente mais simples do que outros sistemas físicos, de modo que os mesmos podem ser usados para simular o comportamento dinâmico de um sistema real. Este conceito é conhecido como simulação analógica e praticamente foi abandonado com o desenvolvimento de computadores digitais rápidos e eficientes softwares de simulação, tal como o Matlab/Simulink. Entretanto, esta técnica representa uma interessante solução prática para o ensino de sistemas dinâmicos, uma vez que a implementação de um sistema real pode ser muito difícil e cara. Em relação a tradicional simulação computacional, o uso da analogia eletrônica apresenta as seguintes vantagens:

- Um protótipo eletrônico consiste em uma implementação experimental e, embora não reproduza completamente o comportamento de um sistema real, incorpora vários aspectos práticos, cuja reprodução em simulações computacionais é pouco convincente, tais como: ruídos aleatórios, problemas de medição, variação de parâmetros, falhas de operação, etc.
- Além de ser uma montagem simples, os circuitos eletrônicos são robustos, compactos, versáteis e baratos, permitindo a implantação a um custo relativamente baixo de um laboratório funcional e didático para estudo de sistemas dinâmicos, processamento e controle de processos.
- Durante a reprodução do comportamento dinâmico de um sistema, o equivalente eletrônico permite variar facilmente os parâmetros do sistema durante a simulação (*Dianese, 1984*), bem como alterar a velocidade da resposta dinâmica.
- Os sinais de tensão representam as variáveis do sistema e suas derivadas, e o seu comportamento dinâmico pode ser diretamente observado em osciloscópios e/ou sistemas de aquisição, evitando o uso de sensores caros.

Entretanto, uma implementação eletrônica direta de um sistema físico é relativamente difícil por que os sinais de tensão são geralmente sujeitos a algumas limitações visando assegurar a integridade física dos dispositivos eletrônicos e a correta reprodução da dinâmica do sistema. Se necessário, o modelo original deve ser modificado para restringir as amplitudes e frequências dos sinais elétricos presentes no circuito eletrônico. Também seria desejável obter uma versão eletrônica simples, usando um mínimo de componentes, uma vez que circuitos eletrônicos complexos são difíceis de montar e aumentam a possibilidade de incertezas e erros.

Este artigo apresenta uma metodologia para projetar e implementar circuitos eletrônicos a partir de modelos matemáticos. Estes circuitos podem reproduzir o comportamento dinâmico de um determinado sistema não linear, o qual pode ser mecânico, elétrico, químico, térmico, hidráulico, econômico, biológico, etc. Um estudo de casos é apresentado, onde esta metodologia é aplicada no projeto de circuitos que reproduzem o comportamento dinâmico de alguns sistemas físicos não lineares.

## 2. ANALOGIA ELETRÔNICA

A implementação eletrônica para a reprodução do comportamento dinâmico de qualquer sistema consiste de um conjunto de circuitos eletrônicos básicos que executam operações matemáticas usando sinais de tensão analógicos. Quando estes circuitos são adequadamente interligados, a implementação final é capaz de reproduzir o modelo matemático do sistema considerado.

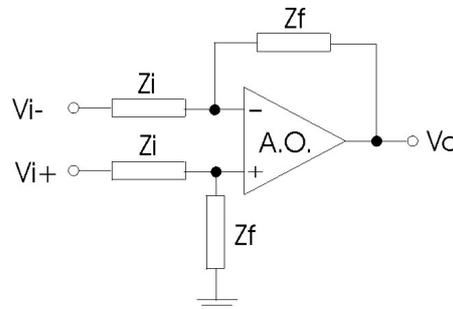


Figura 1. Configuração genérica de um circuito com amplificador operacional.

O principal dispositivo eletrônico utilizado nestas implementações é o amplificador operacional, cujas características permitem realizar varias operações matemáticas envolvendo sinais de tensão quando associado com estruturas elétricas e/ou eletrônicas específicas. O amplificador operacional consiste em um amplificador de vários estágios com entrada diferencial. Devido a sua alta impedância de entrada e sua baixa impedância de saída, circuitos com amplificadores operacionais podem ser diretamente conectados sem interferência entre blocos. A configuração genérica de um circuito com amplificador operacional (A.O.) é mostrada na figura 1. Se as impedâncias  $Z_i$  e  $Z_f$  são resistências  $R_i$  e  $R_f$ , respectivamente, a configuração resultante é conhecida como subtrator, uma vez que:

$$V_o = \frac{R_f}{R_i} (V_{i+} - V_{i-}) \quad (1)$$

Se a multiplicação por uma constante é desejada, basta conectar  $V_{i+}$  (a entrada não inversora) ao terminal terra, resultando no amplificador inversor. Outra configuração é o somador ponderado inversor, o qual é obtido conectando múltiplas resistências na entrada inversora do amplificador operacional. Neste caso, a tensão de saída é a soma ponderada de todas as entradas. Considerando três entradas, a função de transferência do somador ponderado é dada por:

$$V_o = -R_f \left( \frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} \right) \quad (2)$$

Desde que um modelo dinâmico é um conjunto de equações diferenciais, o integrador ponderado consiste na célula mais importante para implementações análogas de sistemas reais. Esta configuração é obtida a partir do somador ponderado, trocando a resistência  $R_f$  por uma capacitância  $C$ . A função de transferência do integrador ponderado é dada por:

$$V_o = -\frac{1}{C} \int \left( \frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} \right) dt \quad (3)$$

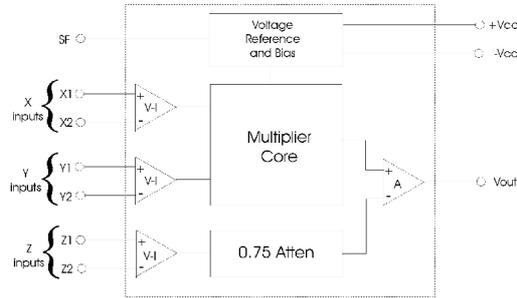


Figura 2. Diagrama esquemático do multiplicador analógico.

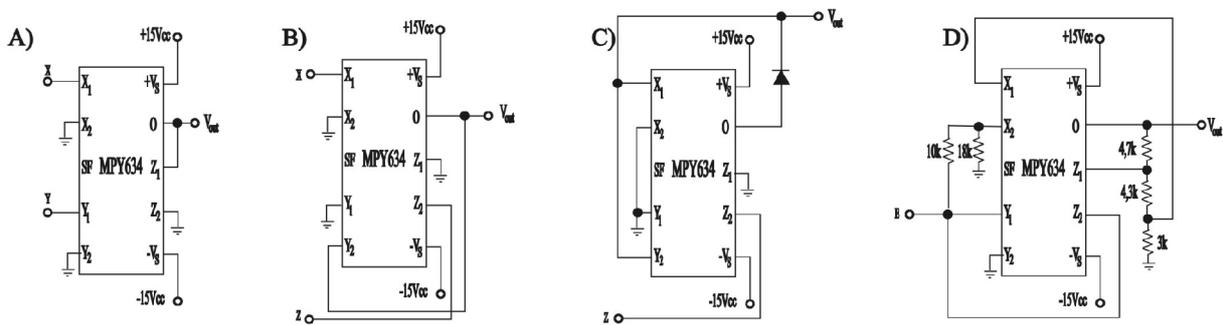


Figura 3. Configurações do MPY634: A) Multiplicador, B) Divisor, C) Extrator de raiz quadrada, D) gerador de função seno.

Funções não lineares podem ser geradas dividindo a curva da função em diversos segmentos de linha, os quais podem ser gerados por circuitos com diodos polarizados (*Dianese, 1984, Figini, 1982*). Outra forma gerar funções não lineares para o processamento analógico de sinais é a utilização de dispositivos eletrônicos específicos, tais como o amplificador logarítmico e o multiplicador analógico. Um exemplo de multiplicador analógico é o MPY634 da Texas Instruments, cujo diagrama esquemático é mostrado na figura 2. A configuração básica do multiplicador analógico com o MPY634 é obtida conectando a entrada  $Z_1$  a saída  $V_{out}$  (figura 3a). Entretanto, com algumas modificações, o MPY634 pode executar várias funções não lineares, tais como divisor (figura 3.b), extrator de raiz quadrada (figura 3.c), funções trigonométricas (figura 3.d) (*Burr-Brown, 1995*). A funções de transferência para os circuitos mostrados na figura 3 são, respectivamente:

$$V_{out} = \frac{XY}{10} \quad (4)$$

$$V_{out} = 10 \frac{Z}{X} \quad (5)$$

$$V_{out} = \sqrt{10Z} \quad (6)$$

$$V_{out} = 10 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \frac{E}{10} \right) \quad (7)$$

### 3. PROJETO DE CIRCUITOS ELETRÔNICOS ANÁLOGOS

O primeiro procedimento para se projetar um circuito eletrônico análogo é obter as equações de estados do sistema dinâmico em questão, as quais serão implementadas basicamente utilizando o integrador ponderado. Uma vez que a saída de um circuito integrador é invertida, é interessante adotar termos negativos de maior ordem para sistemas de ordem ímpar visando simplificar a implementação final do circuito eletrônico. Circuitos eletrônicos com o MPY 634 são utilizados para implementar as relações não lineares entre as variáveis e entradas do sistema.

Para o dimensionamento dos resistores, é necessário considerar que os circuitos eletrônicos estão sujeitos a severas limitações operacionais, tal como a tensão máxima admissível por um dispositivo eletrônico. Este limite geralmente é imposto pela fonte de alimentação e caso seja ultrapassado, além da possibilidade de comprometer a integridade física dos dispositivos eletrônicos, introduz não linearidades indesejadas na operação do circuito análogo, afetando a correta reprodução do comportamento dinâmico do sistema. O valor mínimo de tensão consiste em uma segunda limitação a ser observada na implementação prática, uma vez que sinais de pequena amplitude podem ser corrompidos e/ou mascarados por ruídos e erros gerados pelo próprio circuito eletrônico. Estas limitações podem ser contornadas alterando o modelo original do sistema através do escalamento de amplitude, o qual consiste na aplicação de fatores para obter uma condição operacional de meia escala, onde as variações de amplitudes ocorram dentro de uma faixa adequada que assegure a correta reprodução da dinâmica do sistema. Para isso, é necessário determinar o valor da amplitude máxima que cada variável de estado pode atingir, e caso seja necessário, determinar um fator de escala apropriado para realizar o escalamento de amplitude. Os valores normalizados dos resistores de entrada do integrador são o inverso dos parâmetros do modelo escalado em amplitude.

As frequências dos sinais analógicos também representam outra limitação de projeto, uma vez que os dispositivos utilizados na implementação do circuito eletrônico e os instrumentos de medição apresentam uma velocidade de resposta que não deve ser excedida. Por outro lado, o tempo real para observar o comportamento dinâmico de um sistema lento pode ser desnecessariamente muito extenso. A solução para estes problemas é aplicar um fator de escala de tempo com o objetivo de aumentar ou diminuir a velocidade de operação do circuito em relação ao tempo real. Na implementação do circuito eletrônica, o escalamento de tempo afeta somente o valor do capacitor do integrador, o qual deve ser escolhido de acordo com a dinâmica desejada para a versão eletrônica análoga do sistema original.

## 4. EXEMPLOS

### 4.1 Sistema Forçado de Duffing

O sistema forçado de Duffing representa um sistema massa-mola não linear, excitado por uma força externa periódica. A equação diferencial que descreve as *vibrações forçadas* da massa  $m$  é dada por:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t)$$

(8)

onde  $x$  é a posição da massa em relação a seu ponto de equilíbrio e o termo  $kx+\beta x^3$  representa a força exercida na massa por uma mola não linear. Se  $\beta=0$ , então o sistema de Duffing resulta em uma equação linear com soluções periódicas estáveis. Para ilustrar o comportamento totalmente diferente de um sistema não linear, os parâmetros serão admitidos como  $k=-1$  e  $m=c=\beta=\omega=1$ , de maneira que o modelo de estados do sistema de Duffing pode ser descrito como:

$$\ddot{y} + \dot{x} - x^3 + F_o \cos(t) = 0 \quad (9)$$

O objetivo é examinar a dependência da resposta  $x(t)$  com a amplitude  $F_o$  da força externa periódica de período  $2\pi$  aplicada ao sistema. A figura 4 mostra os planos de fase obtidos através de simulação numérica quando a amplitude da força externa  $F_o$  é variada na faixa 0.6 a 0.8, admitindo as condições iniciais  $x(0)=1, x'(0)=0$ . A figura indica uma simples oscilação em torno de um ponto crítico se  $F_o=0.60$ , e oscilações com "período dobrado" se  $F_o = 0.70$ . Se  $F_o=0.80$ , o sistema de Duffing se comporta de maneira caótica. Tal comportamento comumente observado em sistemas mecânicos *não lineares*, de acordo com uma escolha apropriada dos parâmetros da equação 9 (tais como  $m, c, k, \beta, F_o$  ou  $\omega$ ).

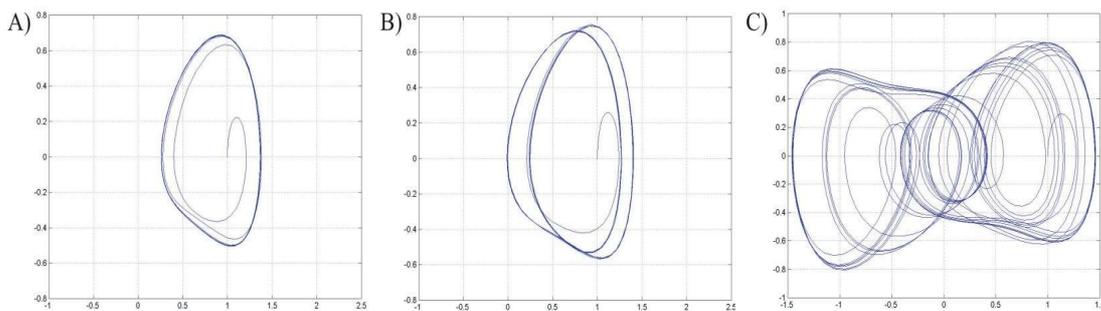


Figura 4. Planos de fase para o sistema forçado de Duffing: (A)  $F_o=0.6$ ; (B)  $F_o=0.7$ ; (C)  $F_o=0.8$ .

Embora uma implementação eletrônica direta do sistema de Duffing seja possível, uma vez que os valores máximos das variáveis de estado são  $|x_{max}| = 1.5$  e  $|y_{max}| = 0.8$ , o escalamento de amplitude será aplicado para aumentar o nível do sinal para a faixa de  $-6$  a  $+6$ . Este objetivo é obtido redefinindo as variáveis de estado como  $u = 4x, v = 8y$ . O sistema de Duffing escalado em amplitude é dado por:

$$\ddot{v} + 2\dot{u} - \frac{25}{2} \left[ \frac{w^3}{100} \right] + 8F_o \cos(t) = 0 \quad (10)$$

Para facilitar a implementação final, o termo  $w^3/100$  é colocado em evidência. Com o objetivo de evitar amplificações intermediárias, todas equações do sistema foram divididas por 8 (o parâmetro de maior valor). Isto implica em uma redução da dinâmica do sistema em relação ao original, sendo necessário reduzir a frequência do sinal externo por um fator de 12,5 para adaptar o sinal de entrada às novas condições dinâmicas. Considerando  $F_o=0.8$ , o sistema de Duffing a ser implementado eletronicamente é dado por:

$$\frac{\dot{i}}{12.5} \dot{i} = -\frac{2}{25} v + \frac{4}{25} u - \left[ \frac{u^3}{100} + \frac{64}{125} \cos\left(\frac{2}{25} t\right) \right] \dot{i} \dot{i} \dot{i} \quad (11)$$

A implementação eletrônica exata da equação (12) é mostrada na figura 5, sendo utilizados somente dez componentes: 2 CI's MPY634 (multiplicador analógico), 1 CI TL074 (amplificador operacional quádruplo), 2 capacitores e 5 resistores. Os valores dos resistores são apresentados na forma normalizada em p.u. (por unidade) e os capacitores são escolhidos conforme a dinâmica desejada para o sistema análogo. Na implementação experimental, foram utilizados resistores de precisão cujo valor base é de 10 kΩ e todos os capacitores são de 470pF em styroflex com o propósito de assegurar a exatidão da reprodução do sistema forçado de Duffing. O sinal de excitação externa foi obtido a partir de um gerador de sinais eletrônico, adotando uma frequência de excitação de cerca de 2,7kHz para reproduzir o sistema original. A figura 6 mostra os planos de fase obtidos experimentalmente para  $V_o=0.7V$ , 0.8V e 1.1V, os quais foram observados em um osciloscópio analógico de 20 MHz operando no modo X-Y. Como se pode perceber pelos resultados obtidos com esta implementação, o projeto proposto obteve sucesso na reprodução do comportamento dinâmico do sistema forçado de Duffing original.

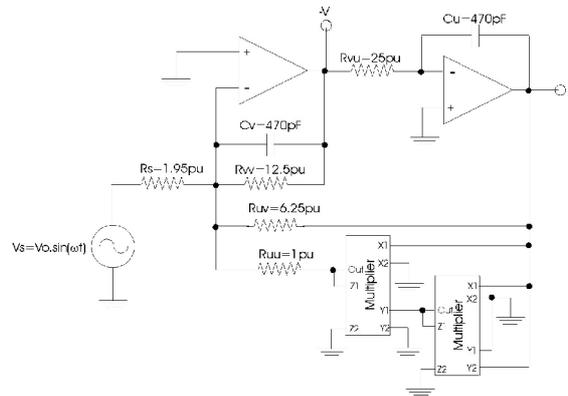


Figura 5. Circuito eletrônico baseado no sistema forçado de Duffing

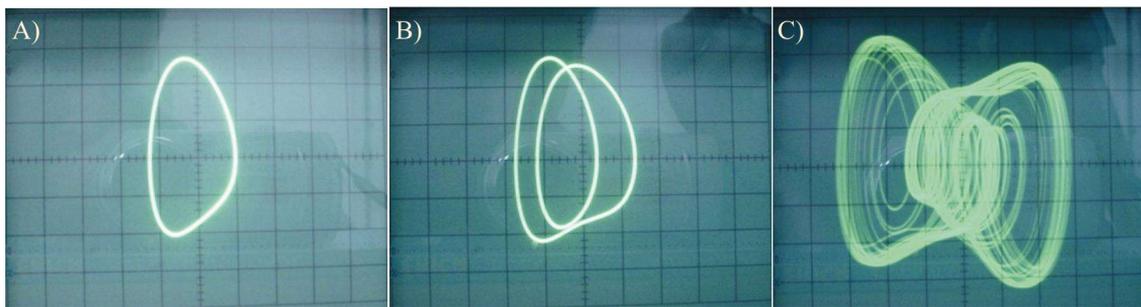


Figura 6. Planos de fase observados no osciloscópio (CH X = 1V/div and CH Y = 1V/div) para a implementação experimental análoga do sistema forçado de Duffing: (A)  $V_o=0.7$ ; (B)  $F_o=0.8$ ; (C)  $F_o=1.1$ .

## 4.2 Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz é um exemplo clássico de um sistema autônomo com comportamento caótico. Este sistema foi inicialmente estudado pelo meteorologista Edward N. Lorenz em 1963, sendo derivado de um modelo extremamente simplificado da convecção

na atmosfera terrestre. Este sistema é normalmente expresso como um sistema de três equações diferenciais não lineares acopladas:

$$\dot{z} = xy - bz \quad (12)$$

onde  $x, y$  e  $z$  são as variáveis de estado e  $s, r$  e  $b$  representam os parâmetros do sistema.

A solução no tempo do sistema de Lorenz foi obtida a partir de integração numérica de  $t=0$  a  $t=30$  com  $s=10, r=28$  and  $b=8/3$  e condições iniciais  $x(0)=-8, y(0)=8$  and  $z(0)=27$ , sendo esta mais bem visualizada através de suas projeções nos planos  $xy$  e  $xz$ , como mostra a figure 7. Como a projeção nesta figura é traçada em "tempo real", o movimento do ponto solução  $P(t)$  parece experimentar oscilações randômicas a direita seguidas por oscilações randômicas a esquerda e vice e versa. Um exame mais profundo destas projeções mostra que o ponto solução  $P(t)$  vaga segundo uma dinâmica imprevisível e extremamente sensível as condições iniciais dentro de um espaço fechado denominado atrator estranho.

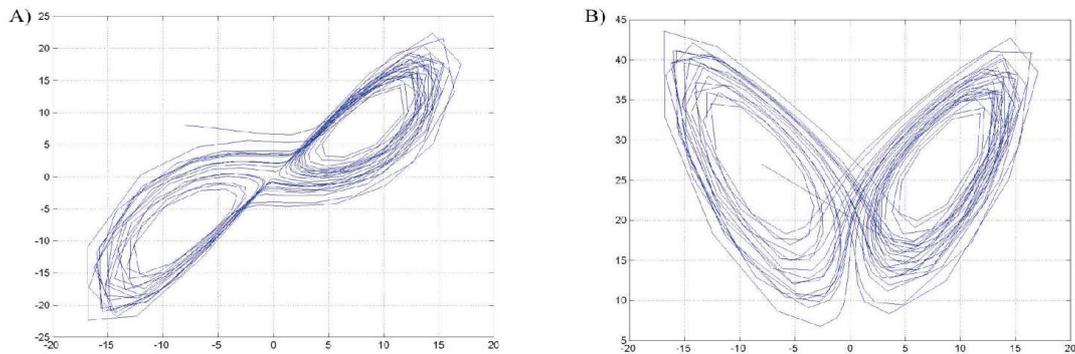


Figura 7. Atrator caótico de Lorenz: (A) projeção no plano  $xy$ ; (B) projeção no plano  $xz$

Uma vez que as amplitudes das variáveis de estado para o sistema de Lorenz em questão alcançam valores elevados ( $|x_{max}| = 18, |y_{max}| = 24$  e  $|z_{max}| = 45$ ), uma implementação eletrônica direta é tecnicamente inviável, de forma que é necessário o escalamento em amplitude. Redefinindo as variáveis de estado como  $u = x/3.6, v = y/4.8$  and  $w = z/9$ , as amplitudes dos sinais ficam restritas a faixa de  $-5$  a  $+5$ , e o sistema de Lorenz escalado é dado por:

$$\dot{w} = 1.92 \left( \frac{uv}{10} \right) - 0.2667 w \quad (13)$$

O produto entre variáveis de estado é colocado em evidência para auxiliar na implementação final. Embora as variáveis de estado do sistema de Lorenz escalado permaneçam dentro de uma faixa aceitável, é recomendável dividir todo sistema de equações pelo valor do maior parâmetro visando evitar amplificações intermediarias de sinal. Desta forma, o sistema de Lorenz a ser implementado é dado por:

$$\frac{\dot{w}}{6.75} = 0.2844 \left( \frac{uv}{10} \right) - 0.0395 w \quad (14)$$

A implementação eletrônica exata do sistema de equações (14) é mostrada na figura 8. São necessários 3 CI's (2 multiplicadores analógicos MPY 634 e um amplificador operacional quádruplo TL074), 3 capacitores e 7 resistores. Os valores dos resistores são apresentados na forma normalizada em p.u. (por unidade). A dinâmica do sistema é determinada pelos valores do resistor base e do capacitor. Os parâmetros  $s$ ,  $r$  e  $b$  podem ser ajustados independentemente através de  $C_u$ ,  $R_{uv}$  e  $R_{ww}$ , respectivamente, com o objetivo de observar outros atratores. Na implementação experimental, utilizou-se um valor de resistência base de  $10\text{ k}\Omega$  e todos os capacitores de  $470\text{pF}$ . As projeções do atrator de Lorenz observadas em um osciloscópio operando no modo X-Y são mostrados na figura 9, onde pode ser notado que as amplitudes dos sinais permanecem restritas dentro da faixa de  $\pm 5\text{V}$ , indicando que a implementação eletrônica analógica teve sucesso na reprodução do comportamento dinâmico do sistema de Lorenz original.

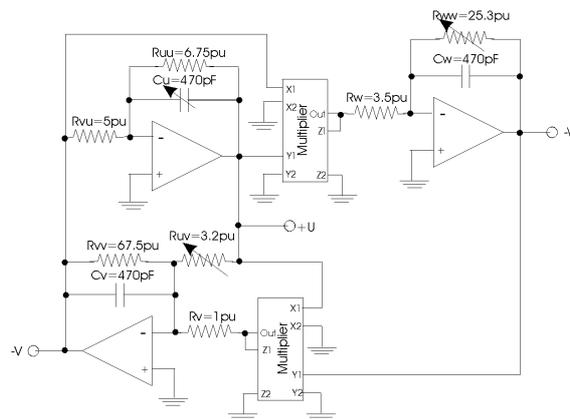


Figure 8. Circuito baseado no sistema caótico de Lorenz

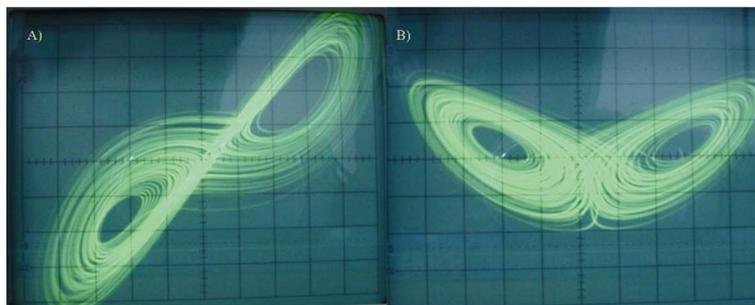


Figura 9. Atrator caótico de Lorenz observado no osciloscópio (CH X =  $1\text{V/div}$  e CH Y =  $1\text{V/div}$ ): (A) projeção no plano  $uv$ ; (B) projeção no plano  $uw$ -plane

Vários estudos demonstram que os sistemas caóticos podem ser controlados (*Mahla and Torres, 2001, Jiang, 2002*) e algumas vezes apresentam propriedades de auto-sincronização (*Cuomo et al, 1993, Corron and Hahs, 1997*), fenômenos estes com aplicação real em diversas áreas do conhecimento, tais como comunicação, epidemiologia, química, etc. Desta forma, esta implementação eletrônica do sistema de Lorenz pode ser usada para gerar sinais caóticos e verificar aspectos de controle e sincronização de sistemas caóticos em experimentos didáticos.

#### 4.3 Controle de atitude de satélites artificiais

Um problema clássico de sistemas não lineares que apresenta um desafio interessante para a síntese de leis de controle é o problema de controle de atitude de satélites artificiais. O

grande interesse pelo problema vem da importância econômica das aplicações de satélites artificiais (telecomunicações, sensoriamento remoto, meteorologia, sistema de posicionamento global, etc). Trata-se do controle de orientação espacial de um corpo rígido através de pares de jatos de gás capazes de aplicar torques em três eixos ortogonais (Byrnes e Isidori, 1991; Crouch, 1984; Isidori, 1989; Martins-Filho, 1996). A validação das estratégias de controle propostas fica restrita às simulações numéricas que, mesmo sendo um recurso muito importante e útil, não conseguem simular com realismo completo uma aplicação num sistema físico. Por outro lado, uma simulação física desse sistema requer dispositivos sofisticados somente encontrados em grandes laboratórios de pesquisa aeroespacial, i.e., são inviáveis na prática. Uma abordagem de simulação física alternativa é a utilização de analogia entre sistemas dinâmicos (ROCHA et al., 2003).

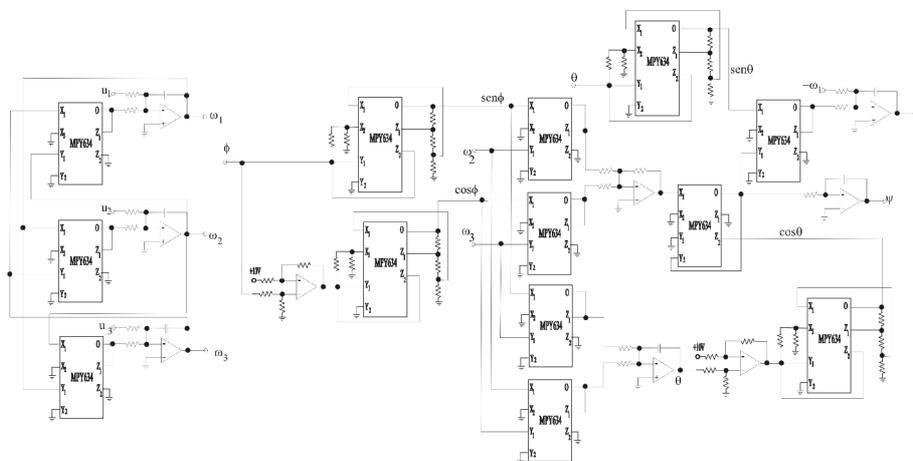
A atitude de um satélite é definida pela posição de seus três eixos principais de inércia em relação a um referencial ortonormal, cuja origem coincide com o centro de gravidade do satélite. Em outras palavras, a atitude representa o apontamento espacial do satélite com relação a um referencial absoluto (SHUSTER, 1994). Na tecnologia aeroespacial os referenciais inercial e horizontal local (fixado no plano local tangente à geodésica) são geralmente utilizados para a descrição da atitude. Nesse projeto, adotamos o referencial inercial. O modelo cinemático de atitude do satélite é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \omega_1(t) + \omega_2(t) \sin \theta(t) \tan \theta(t) + \omega_3(t) \cos \theta(t) \tan \theta(t) \\ \dot{\phi}(t) &= \omega_2(t) \cos \theta(t) - \omega_3(t) \sin \theta(t) \\ \dot{\psi}(t) &= \omega_2(t) \sin \theta(t) \sec \theta(t) + \omega_3(t) \cos \theta(t) \sec \theta(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Quando o referencial considerado coincide com os eixos principais de inércia, e dado que os torques externos aplicados correspondem à ação de controle ( $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ ), as equações dinâmicas são expressas por:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= a_1 \omega_2(t) \omega_3(t) + u_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= a_2 \omega_3(t) \omega_1(t) + u_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) &= a_3 \omega_1(t) \omega_2(t) + u_3(t) \end{aligned} \quad (16)$$

onde os eixos (1,2,3) correspondem a (x,y,z), e  $a_1=(I_2-I_3)$ ,  $a_2=(I_3-I_1)$  e  $a_3=(I_1-I_2)$ . O circuito analógico que reproduz o comportamento dinâmico de um satélite pode ser visto na figura 10.



## **Figura 10. Circuito eletrônico para reprodução do comportamento dinâmico de uma satélite**

### **5. Conclusões**

O propósito deste artigo é mostrar a potencialidade do uso da analogia eletrônica para a implementação de laboratórios para o estudo de sistemas dinâmicos. Uma implementação eletrônica análoga, embora não reproduza completamente sistemas reais, permite visualizar o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, elétricos, químicos, térmicos, hidráulicos, econômicos ou biológicos, utilizando protótipos robustos, compactos, versáteis e baratos se comparados com a implementação real, representando uma interessante alternativa para o ensino experimental de sistemas não lineares. Os resultados obtidos em dois exemplos demonstraram a eficiência da reprodução de um comportamento dinâmico utilizando a analogia eletrônica. Vale dizer que não existe nenhuma intenção em “ressuscitar” a computação analógica como método de simulação, mas apenas sugerir uma forma de implementar aulas práticas que permita o contato dos estudantes com sistemas não lineares que não envolvam necessariamente a simulação em computadores.

### ***Agradecimentos***

Os autores agradecem o suporte financeiro proporcionado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), bem como a Texas Instruments pela doação dos componentes que permitiram as implementações experimentais.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ABUSLEME, A., CIPRIANO, A.; GUARINI, M. – A low-cost altitude control system for the kadet senior radio-controlled airplane – **IEEE Transaction on Education**, vol.46, N 1, February, 2003.

AGUIRRE, L.A. - **Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**, Ed. UFMG, Belo Horizonte, Brazil, 554p., 2000

ASTRÖM, K.J., OSTBERG, A.-B. - A Teaching Laboratory for Process Control - **IEEE Control System Magazine**, Vol.6, N.5, pp 37-42, 1986.

BYRNES, C.I; ISIDORI, A. - On the attitude stabilization of a rigid spacecraft - **Automatica**, v. 27, n. 1, pp 87-95, 1991.

BURR-BROWN CORPORATION - Wide Bandwidth Precision Analog Multiplier - USA, 9p., 1995

CORRON, N.J., HAHS, D. W. - A New Approach to Communications Using Chaotic Signals - **IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications**, Vol. 44, n.o 5, pp 373-382. , 1997

CUOMO, K. M., OPPENHEIN, A. V., STROGATZ, S. H. - Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications - **IEEE Trans. on Circuits and Systems –II: Analog and Digital Signal Processing**, Vol. 40, n.o 10, pp 626-633, 1993.

COELHO, A.A.R., ALMEIDA, O.M., SANTOS, J.E.S. e SUMAR, R.R. - Laboratório de Simulação no Ensino de Sinais e Sistemas Lineares - **COBENGE'2001**, Porto Alegre, Brazil, pp. 154-161., 2001.

CROUCH, P.E. Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models **IEEE Trans. on Automation and Control**, v. AC-29, pp 321-331, 1984.

DIANESE, A. - **Computação e Simulação Analógica e Híbrida** -, Ed. Guanabara 2, Rio de Janeiro, Brazil, 251p., 1984.

FIGINI, G.-**Eletrônica Industrial – Circuitos e Aplicações** - Ed. Hemus, São Paulo, Brazil, 336p., 1982

ISIDORI, A. **Nonlinear Control Systems**. New York: Springer-Verlag, 1989.

JAYAWANT, B.V.- Are we in control? – **IEE Proceedings**, vol. 135, Pt. D, no. 1, January 1988.

JIANG, Z.-P. - Advanced Feedback Control of Chaotic Duffing Equation -, **IEEE Trans on Circuits and Systems – I**, Vol. 49, n.o 2, pp. 244-249. , 2002

MAHLA, A. I., TORRES, L. - Control of Chaotic Behavior by Parameter Commutation Methodology - 8<sup>th</sup> IEEE International Conference on Electronics, Circuits and System, ICECS2001, vol.1, pp 465-468, 2001.

MARTINS-FILHO, L.S.; MARTINS-NETO, A.F.. Attitude stabilization for a satellite in failure mode. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 1996, São Paulo. **Anais**. São Paulo: SBA/USP. 1996.

OGATA K. - **Engenharia de Controle Moderno** - Ed. Prentice Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro, Brazil, 929p., 1982,

ROCHA, R.; MACHADO, R.F; MARTINS-FILHO, L.S.. Development of electronic circuits to teach dynamic systems and process control. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 17, 2003, São Paulo. **Anais**. São Paulo: USP/ABCM. 2003.

SHUSTER, M.D. Spacecraft attitude determination and control, in: PISACANE, V.L.;

## **A METHODOLOGY FOR THE NONLINEAR CONTROL SYSTEMS STUDY USING ELECTRONICS ANALOGY**

**Abstract:** *This paper presents an experimental methodology to study of nonlinear control systems, using the concept of electronic analogy to simulate dynamic systems and control strategies. In this case, the state variables are represented for electric signals obtained on analog electronic circuits designed to reproduce the dynamic behavior of a system. The use of this methodology presents many interesting characteristics for development of didactic platforms, once they it consists on a more realistic form to perform real time simulations, presenting several experimental aspects whose are difficult to reproduce on computer simulations. However, a direct implementation can became very complicated due to any limitations imposed by electronic devices related with amplitudes and frequencies of electrical signals. As example, analog electronic circuits are designed implemented to reproduce the dynamic behavior of chaotic systems and satellite control*

**Keywords:** *dynamic system, analog simulation, teaching laboratory.*