

UMA UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO MATHEMATICA DESTINADA AO CÁLCULO DE CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE FIGURAS PLANAS PARA O ENSINO DE TEORIA DAS ESTRUTURAS

Antonio Carlos Rigitano – rigitano@feb.unesp.br
Faculdade de Engenharia de Bauru – UNESP, Departamento de Engenharia Civil
Av. Luis Edmundo C. Coube, sn. – Vargem Limpa
17033-360 – Bauru - SP

***Resumo:** O objetivo deste trabalho é apresentar metodologia para o cálculo de características geométricas de figuras planas, tópico clássico das disciplinas de Teoria das Estruturas, utilizando comandos específicos do ambiente computacional Mathematica. São explorados recursos gráficos e de integração analítico/numérica de funções, numa proposta bastante simples para possibilitar o desenvolvimento de atividades com ferramentas computacionais mais sofisticadas de matemática nos semestres iniciais do curso de Engenharia Civil. Observa-se na literatura consultada, que manobras de cálculo integral dificultam o aprendizado do tema e que elas podem ser realizadas de modo mais estimulante com o uso do mencionado aplicativo. O texto resume uma prática de ensino do autor, que tem levado a maior interesse em sala de aula, conduzindo ao melhor aproveitamento nas avaliações e conseqüente incentivo à formação profissional mais abrangente em informática. Sugere-se ao final um modelo de planilha para resolver o problema de figuras compostas.*

***Palavras-chave:** Características geométricas, Figuras planas, Mathematica, Ensino de Teoria das Estruturas*

1. INTRODUÇÃO

A utilização de aplicativos computacionais no ensino básico e profissionalizante das disciplinas ministradas nos cursos de Engenharia compreende desde as mais simples planilhas eletrônicas, até ambientes mais sofisticados, como, por exemplo, o Matlab, objeto das publicações JACHIE (2002), MARIANI e MARTIN (2003), apenas para citar trabalhos recentes no âmbito do Cobenge.

É incontestável que a utilização de programas contidos em pacotes fechados que acompanham tais produtos podem induzir a erros na avaliação dos resultados obtidos, sobretudo quando o profissional não possui uma sólida base teórica, matemática e capacidade de interpretação física do problema a resolver.

Nessa linha de raciocínio, tendo como finalidade motivar os alunos do curso de Engenharia Civil da UNESP - Bauru com respeito ao tema de Matemática Aplicada, expõe-se neste trabalho a utilização do software Mathematica, comercializado pela empresa Wolfram Research Inc., na solução de um problema bastante comum, que possibilita a criação de ambiente de trabalho adequado às disciplinas de Teoria das Estruturas.

Pois bem, no ensino de tais disciplinas, a obtenção de características geométricas de figuras planas é obrigatória e tradicionalmente apresentada através da utilização de tabelas e roteiros de cálculo, conforme se verifica em SCHIEL (1984), BEER (1994), SHAMES (2002)

e diversos outros autores, onde pode ser observada a necessidade da realização de operações de cálculo integral conduzidas em separado, impondo um obstáculo ao aprendizado.

Por esse motivo, o tema é tratado neste texto com o emprego do aplicativo Mathematica, pois a experiência no ensino tem mostrado que o objetivo principal de obter tais parâmetros se perde por conta das operações e manobras de cálculo envolvidas.

Tal problema, no qual insere-se traçado analítico de figuras geométricas e procedimentos clássicos do cálculo integral, foi escolhido para dar início ao tratamento mais refinado de temas da Teoria das Estruturas, no intuito de trabalhar com aplicações práticas de Engenharia Civil que utilizam conceitos ensinados nas disciplinas básicas do curso.

2. OBJETIVO

O objetivo principal deste texto é o de desenvolver a aprendizagem de ferramentas computacionais mais sofisticadas para utilização nas disciplinas de Teoria das Estruturas ministradas no curso de Engenharia Civil da UNESP – Bauru, procurando incentivar uma formação profissional mais abrangente em informática.

A meta é promover a aquisição de familiaridade com os ferramentais à disposição no mercado, de modo a incentivar o uso em atividades profissionalizantes.

É tratado o clássico problema da obtenção de características geométricas de figuras planas no ambiente Mathematica, aplicativo que permite o traçado gráfico de funções envolvidas e cálculo integral em linguagem simbólica, para obter fórmulas complementares às fornecidas nas publicações de Teoria das Estruturas que, na opinião do autor, restringem a possibilidade do estudante preparar suas próprias planilhas e levam somente a exercícios numéricos sem motivação.

Deve-se observar que os comandos a serem utilizados são uma pequena parte dos recursos computacionais do software, sendo abordados somente os estritamente necessários, numa seqüência didática que se julgou apropriada aos alunos do segundo ano de Engenharia, conforme descrição mais detalhada nos itens que se seguem.

3. PROBLEMAS A RESOLVER

Como ponto inicial, para fixar conceitos pertinentes às disciplinas do curso básico de Engenharia, são propostas resoluções de diversos exercícios de traçado gráfico de funções e cálculo de áreas manualmente.

Em seguida, os mesmos problemas são tratados no aplicativo Mathematica, para a aprendizagem dos recursos mínimos fornecidos pelo software.

A partir desse aprendizado, trabalha-se o problema de cálculo das características geométricas de figuras planas por integração dupla, obtendo-se o centróide de áreas, momentos de primeira ordem, de segunda ordem e produtos de inércia, concomitantemente com o traçado gráfico das funções, procedimento simples e bastante motivador.

Para isso, são resolvidos três exemplos: a clássica figura retangular, que permite o entendimento mais simples da questão; uma figura elíptica, cujos procedimentos de cálculo são bastante trabalhosos quando realizados manualmente, encerrando-se a questão com uma figura composta desses dois casos.

Nas figuras constituídas por um só elemento, são obtidas fórmulas que permitem ampliar e complementar os resultados apresentados nas publicações de Teoria das Estruturas, pois o roteiro permite a solução de qualquer geometria e remove obstáculos presentes na bibliografia consultada quando da aplicação prática.

O texto encerra com o estudo de uma figura composta, para a qual indica-se um modelo de planilha apropriada para resolução no Excel ou em calculadoras portáteis, de modo a possibilitar ao aluno o estabelecimento de seu próprio estilo de trabalho.

4. ATIVIDADES PROPOSTAS

Conforme expresso anteriormente, as atividades propostas aos alunos consistem em obter as características geométricas no ambiente Mathematica, observando-se o desenho das figuras, cálculo analítico e numérico de integrais, iniciando-se com casos mais simples, onde são discutidos os procedimentos gerais para a aplicação em outras geometrias, conforme distribuição nas etapas descritas a seguir.

4.1 Desenho de figuras geométricas

O desenho de figuras geométricas através de expressões analíticas exige estudo dos comandos do Mathematica encontrados em WOLFRAM (2003). São utilizados neste trabalho o $\text{Plot}[f, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$, que desenha a função $f(x)$ entre os pontos x_{\min} até x_{\max} , o $\text{ListPlot}[\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots\}]$, que produz o gráfico de segmentos retilíneos entre pontos de coordenadas (x, y) e o $\text{Show}[g_1, g_2, \dots]$, que reúne funções g numa única imagem.

4.2 Cálculo de integrais

A obtenção de características geométricas de figuras planas pode ser realizada por integração dupla no domínio D de uma função qualquer $f(x, y)$, utilizando-se a expressão (PISKUNOV (1969)):

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

cujos limites de integração encontram-se ilustrados na Figura 1.

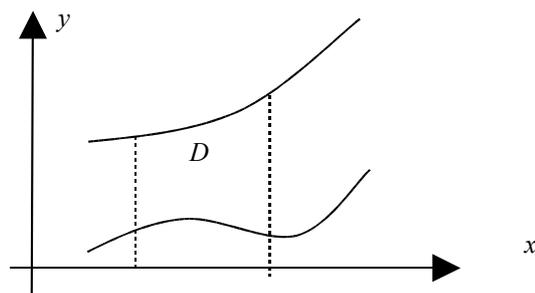


Figura 1 – Limites de integração no domínio D entre duas curvas ϕ_1 e ϕ_2

4.3 Cálculo de características geométricas de figuras planas

Para aplicações nas disciplinas de Teoria das Estruturas, as características geométricas de interesse são obtidas com o emprego das fórmulas:

$$A = \int dA \quad x_c = \left(\int x dA \right) / A \quad y_c = \left(\int y dA \right) / A$$

conforme se sabe, área e coordenadas do centróide da figura.

Complementarmente são utilizadas outras integrais, quais sejam:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA$$

conhecidas como momentos e produto de inércia em relação aos eixos cartesianos Oxy , em notação usual nas publicações que tratam do assunto.

Havendo interesse em determinar as características em relação a novos eixos $Ox'y'$ localizados no centróide das figuras, é prático lançar mão do conceito de translação de coordenadas para eixos paralelos, facilmente dedutíveis e dadas por:

$$I_x = I_{x'} + Ay_c^2 \quad I_y = I_{y'} + Ax_c^2 \quad I_{xy} = I_{x'y'} + Ax_c y_c$$

cuja utilização evita outra série de integrações analíticas mais trabalhosas.

5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste item são apresentados exemplos escolhidos em seqüência didática para permitir um melhor aprendizado do tema em conjunto com o uso do aplicativo.

5.1 Primeiro exemplo: Superfície retangular

Seja obter fórmulas genéricas das características geométricas de uma superfície retangular em relação ao centróide, conforme ilustra a Figura 2, para a qual a área e coordenadas do mencionado centróide são bem conhecidas.

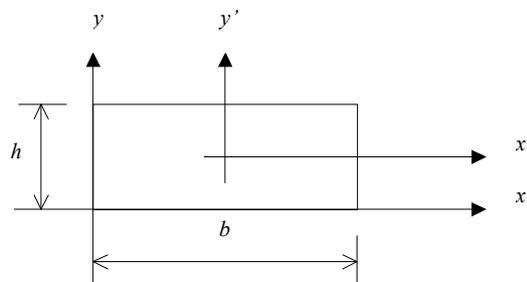


Figura 2 - Superfície retangular com eixos $(x' y')$ localizados no centróide

Neste caso, não há necessidade do emprego das expressões , bastando apenas estabelecer as funções delimitadoras do contorno do retângulo conforme convenção da Figura 1, ou sejam:

$$x'_0 = -\frac{b}{2} \quad x'_1 = \frac{b}{2} \quad \varphi_1(x') = -\frac{h}{2} \quad \varphi_2(x') = \frac{h}{2}$$

sendo as características geométricas em relação aos eixos do centróide dadas pela integração das funções pertinentes às expressões , a saber:

$$f(x', y') = y'^2 \quad f(x', y') = x'^2 \quad f(x', y') = x' y'$$

Resolvendo as integrais no aplicativo segundo a expressão são obtidos:

$$I_{x'} = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} y'^2 dy' \right) dx' = \frac{bh^3}{12} \quad I_{y'} = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} x'^2 dy' \right) dx' = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{x'y'} = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} x'y' dy' \right) dx' = 0$$

É importante ressaltar que o procedimento utilizado evita o artifício usual das publicações de Teoria das Estruturas que empregam elementos de área infinitesimal constituídos de tiras verticais ou horizontais, bem como transformações para coordenadas curvilíneas, conforme se observa em SCHIEL (1984), BEER e JOHNSTON (1994), SHAMES (2002) e outros autores.

5.2 Segundo exemplo: Superfície elíptica

Seja obter as características geométricas da superfície constituída por um quarto de elipse em relação aos eixos (x' y') localizados no centróide, conforme ilustra a Figura 3.

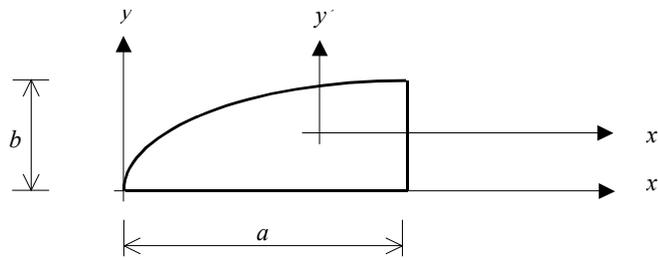


Figura 3 – Superfície elíptica com eixos (x' y') localizados no centróide

Neste caso, é mais prático trabalhar a figura em relação aos eixos (x y), descrevendo-a pelos limites de integração mostrados na Figura 1, ou sejam:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = a \quad \varphi_1(x) = 0 \quad \varphi_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{-x^2 + 2ax}$$

Definido o domínio, a localização do centróide é obtida através das expressões, redigidas de acordo com a expressão, na qual as funções a integrar são:

$$f(x, y) = 1 \quad f(x, y) = x \quad f(x, y) = y$$

Resolvendo pelo Mathematica, tem-se para a primeira das funções:

$$A = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{-x^2 + 2ax}} dy \right) dx = \frac{ab\pi}{4}$$

e respeitados os limites de integração da expressão, obtêm-se para as demais funções:

$$x_c = \frac{a(-4 + 3\pi)}{3\pi} \quad y_c = \frac{4b}{3\pi}$$

As características em relação aos eixos (x, y) são dadas pelas integrais de:

$$f(x, y) = y^2 \quad f(x, y) = x^2 \quad f(x, y) = xy$$

que levam respectivamente a:

$$I_x = \frac{ab^3\pi}{16} \quad I_y = \frac{a^3b(-32+15\pi)}{48} \quad I_{xy} = \frac{5a^2b^2}{24}$$

Com mais praticidade, os parâmetros em relação ao centróide podem ser obtidos por translação de coordenadas com o emprego das fórmulas, que resolvidas no ambiente do aplicativo, conduzem a:

$$I_{x'} = -ab^3 \left(\frac{4}{9\pi} + \frac{\pi}{16} \right)$$

$$I_{y'} = a^3b \left[-\frac{(-4+3\pi)^2}{36\pi} + \frac{(-32+15\pi)}{48} \right]$$

$$I_{x'y'} = a^2b^2 \left[\frac{5}{24} - \frac{(-4+3\pi)}{9\pi} \right]$$

5.3 Terceiro exemplo: Superfície composta

Resolver o caso de uma superfície composta de $\frac{1}{4}$ de círculo e um retângulo, aproveitando os resultados dos exemplos precedentes e atribuindo valores numéricos para as coordenadas do contorno.

A solução inicia-se pela Tabela 1, onde $p1$, $p2$, $p3$ e $p4$, são os trechos da figura composta, cujo traçado no software permite a visualização dos subdomínios de integração.

Tabela 1 - Comandos do Mathematica para desenho da figura composta

<p>“Coordenadas e comando para plotagem de trecho circular”</p> $a := 4; \quad b := 4;$ $p1 = \text{Plot}\left[\frac{b}{a}\sqrt{-x^2 + 2ax}, \{x, 0, a\}\right];$

Continua na página seguinte

Continuação da Tabela 1

“Coordenadas e comando para plotagem de trecho retilíneo vertical”

```
c := 4; d := 4; e = 4; f := 12;
```

```
p2 = ListPlot[{{c, d}, {e, f}}, PlotJoined → True];
```

“Coordenadas e comando para plotagem de trecho retilíneo horizontal”

```
g := 12; h := 4; i := 8;
```

```
p3 = Plot[g, {x, h, i}];
```

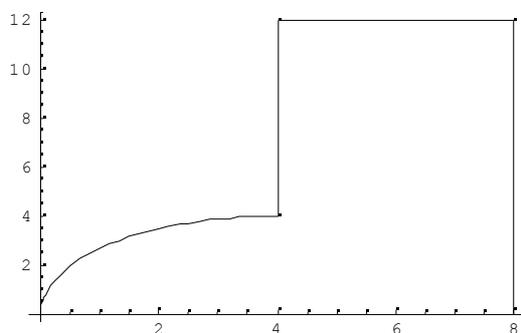
“Coordenadas e comando para plotagem de trecho retilíneo vertical”

```
j := 8; k := 0; l := 8; m := 12;
```

```
p4 = ListPlot[{{j, k}, {l, m}}, PlotJoined → True];
```

“Comando e resultado da junção dos gráficos”

```
Show[{p1, p2, p3, p4}];
```



Após o traçado da figura, conforme Tabela 1, as integrais são resolvidas no aplicativo, obtendo-se os seguintes resultados:

$$x_c = 5,233 \text{ cm} \quad y_c = 5,107 \text{ cm}$$

$$I_{x'} = 774,390 \text{ cm}^4 \quad I_{y'} = 214,220 \text{ cm}^4 \quad I_{x''} = 162,652 \text{ cm}^4$$

Cumpra-se observar que o roteiro pode ser estabelecido para qualquer geometria, de modo a resolver problemas mais específicos pertencentes às diversas disciplinas do curso.

6. SUGESTÃO DE PLANILHA PARA A SOLUÇÃO DE FIGURAS COMPOSTAS

Nos itens anteriores, as características geométricas foram obtidas no ambiente do Mathematica de modo analítico e numérico. Todavia, em literatura de Teoria das Estruturas é bastante comum encontrar a solução do problema com a utilização de planilhas, nas quais as figuras compostas são desmembradas em partes com propriedades conhecidas.

O problema é tratado em diversas publicações, como, por exemplo, BEER e JOHNSTON (1994), SHAMES (2002), em procedimentos que, segundo a experiência de ensino do autor, levam a erros numéricos em grande parte por desatenção em consequência do processo ser enfadonho.

A partir dessa observação, é possível resolver o problema aplicando o conceito geométrico de translação de coordenadas, adotando-se o procedimento bastante simples de posicionar a figura nos eixos cartesianos (x, y) de modo a obter coordenadas positivas dos centróides, o que facilita o entendimento e minimiza a desatenção.

Para isso, sugere-se o modelo de planilha ilustrada na Tabela 2, indicada para o Excel, que vem apresentando bons resultados quando da utilização nas disciplinas que ministramos no Curso de Engenharia Civil da FE – Unesp - Bauru, na qual as células destacadas com hachuras contêm informações estritamente necessárias das figuras individuais, sendo os detalhes da utilização discutidos em sala de aula.

Tabela 2 – Planilha para cálculo de características geométricas de figuras compostas

Elemento	Centróide do elemento no sistema (x, y)		Área	Momentos Estáticos dos elementos		Coordenadas do Centróide do elemento no sistema global (x', y'), por translação		Características geométricas em relação ao Centróide dos elementos			Características geométricas transladadas para os eixos globais (x', y') pelo Teorema dos eixos paralelos		
	(cm)	(cm)		(cm ³)	(cm ³)	(cm)	(cm)	(cm ⁴)	(cm ⁴)	(cm ⁴)	(cm ⁴)	(cm ⁴)	(cm ⁴)
	x	y		$\int x dA$	$\int y dA$	$x' = x - x_c$	$y' = y - y_c$	$(Ix')_e$	$(Iy')_e$	$(Ix'y')$	$Ix' = (Ix')_e + A(y')^2$	$Iy' = (Iy')_e + A(x')^2$	$Ix'y' = (Ix'y')_e + A(x'y')$
¼ Círculo	2,302	1,698	12,566	28,932	21,334	-2,930	-3,410	14,049	14,049	-4,217	160,143	121,967	129,780
Retângulo	6	6	48	288	288	0,767	0,893	576	64	0	614,247	92,253	32,872
SOMAS			60,566	316,932	309,334						774,390	214,220	162,652

Coordenadas do Centróide	$x_c = 316,932/60,566 = 5,233 \text{ cm}$	$y_c = 309,334/60,566 = 5,107 \text{ cm}$
--------------------------	---	---

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema de cálculo de características geométricas de figuras planas é resolvido com o uso do aplicativo Mathematica, em metodologia complementar à tradicionalmente encontrada na literatura técnica e em ambiente que permite ampliar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas básicas, incentivando uma formação profissional mais abrangente em informática.

O objetivo de melhor compreender os casos tratados em publicações de Teoria das Estruturas, que geram dúvidas quando da aplicação prática, parece estar atendido com as sugestões apresentadas, pois a conduta simplifica sobremaneira as manobras de cálculo integral, com resultados computacionais obtidos na forma de expressões analíticas em conjunto com respostas numéricas e recursos gráficos, o que é bastante motivador.

O texto resume uma prática de ensino que tem levado a um maior interesse em sala de aula, conduzido ao melhor aproveitamento nas avaliações, e está colocado numa seqüência didática para evitar o uso de programas prontos, procedimento não recomendável para o aprendizado nos semestres iniciais do curso de Engenharia.

Agradecimentos

O autor expressa seus agradecimentos à FUNDUNESP, pelo auxílio destinado à participação no evento e à FAPESP, pelo financiamento de projeto de pesquisa sobre outro tema, no qual o aplicativo Mathematica foi adquirido e que viabilizou o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F. P.; JOHNSTON Jr., E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

JACHIE, J. Um aspecto do Matlab no ensino da física para estudantes de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 30., 2002, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba:UNIMEP, 2002. 1CD-ROM.

MARIANI, V. C. MARTIN, E. Aplicações do Matlab no ensino de disciplinas básicas nos cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro:IME, 2003. 1CD-ROM.

PISKUNOV, N. **Calculo diferencial e integral**. Moscou: MIR, 1969.

SCHIEL, F. **Introdução à resistência dos materiais**. São Paulo: HARBRA, 1984.

SHAMES, I. H. **Estática: mecânica para engenharia**. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

WOLFRAM, S. **The Mathematica book**. 5th ed. USA: Wolfram Media, 2003.

USING THE MATHEMATICA SOFTWARE DESTINATED TO CALCULUS OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF PLANE AREAS IN TEACHING STRUCTURES THEORY

Abstract: *The aim of this paper is show a methodology of calculus of geometric characteristics of plane areas in the scope o teaching themes in the Structures Theory, by using specifics commands in the software Mathematica. Some graphics and numerical/analytical sources are exploited, in a very simple way of developing activities in more sophisticated computational mathematical environment in the second year of the Civil Engineering course. It is well known in technical literature, that approaches of integral calculus must be done, bringing obstacles in learning that can be removed by using a appropriate software. The paper resumes the author's practice that leaded to best profits in teaching, learning and evaluation the results and, at the same time, a better improvement in informatics applications, and broad professional capacities. At the end, it is suggested a model of spreadsheet to solve composed figures.*

Key words: *Geometric characteristics, plane figures, Mathematica, structures theory*