

## A UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE NO ENSINO DE CÁLCULO

**Dandolini, Gertrudes A.** – [gtude@ufpel.tche.br](mailto:gtude@ufpel.tche.br)

Universidade Federal de Pelotas/Departamento de Matemática, Estatística  
Rua Senador Carlos Barbosa, 241, Três Vendas

96020-240 – Pelotas - RS

**Vanini, Lucas** – [jartur@ufpel.tche.br](mailto:jartur@ufpel.tche.br)

Universidade Federal de Pelotas/Departamento de Matemática, Estatística  
Rua Senador Carlos Barbosa, 241, Três Vendas

96020-240 – Pelotas - RS

**Souza, João Artur** – [jartur@ufpel.tche.br](mailto:jartur@ufpel.tche.br)

Universidade Federal de Pelotas/Departamento de Matemática, Estatística  
Rua Senador Carlos Barbosa, 241, Três Vendas

96020-240 – Pelotas - RS

***Resumo:** Um dos grandes problemas apresentados pelos discentes é a visualização da representação gráfica de funções de mais de uma variável no estudo do cálculo avançado. O uso de softwares é uma proposta metodológica, que busca um ensino integrado com alternativas inovadoras. Neste processo de estruturação de conceitos mesmo que intuitivos e poucos formais, o software Maple<sup>®</sup>, poderá ser de grande valia. Neste sentido abordaremos tópicos importantes deste recurso matemático, os quais serão analisados neste artigo. Além disso sabe-se que a tecnologia computacional tem mostrado que pode trazer benefícios ao ensino-aprendizagem de vários conteúdos matemáticos. É importante ressaltar também que o presente trabalho não busca simplesmente o uso de comandos de um determinado programa, mas sim uma análise de conceitos através do software.*

***Palavras-chave:** Ensino integrado, Cálculo, Ensino-Aprendizagem, Software Maple<sup>®</sup>.*

### 1. INTRODUÇÃO

A sociedade atual vive o desenvolvimento tecnológico na área de informática o que vem causando uma revolução na criação e exploração de novas metodologias de ensino. A universidade é um espaço de produção e divulgação de conhecimentos ao mesmo tempo em que é um espaço de formação de profissionais para a nossa sociedade. O ensino do Cálculo para as diversas áreas ainda vem se desenvolvendo de uma tal forma onde o mais importante é a exposição excessiva, isto é, a repetição, a memorização dos conteúdos de modo que ensinar tem um significado de somente informar, onde na maioria das vezes as aulas estão totalmente desprovidas de significados. A precariedade do sistema vigente, nos cursos de cálculo tanto para as Engenharias como para as diversas áreas das exatas, tem uma conseqüência seriíssima para o futuro profissional do aluno (NASCIMENTO e NASSER, 1997).

Outro problema que acontece é que nos currículos dos cursos (como as engenharias) as disciplinas básicas, estão dissociadas das disciplinas profissionalizantes (“é como construir o alicerce de um edifício num lugar e o restante da edificação em um lote vizinho” (LAUDARES e LACHINI, 2004)) e isso é um fator evidente na desmotivação tanto de alunos

como de professores. Os cursos de cálculo, desde cálculo diferencial ao avançado e numérico, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso (PALIS, 1995).

Esses fatores apontam para a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, juntamente com outros meios, possam vir a afastar esse problema que, desde muito tempo reside nas universidades. Neste sentido os educadores precisam trabalhar no sentido de usar o que a Informática tem de melhor a oferecer e trabalhar os aspectos negativos no sentido de neutralizá-los ou revertê-los quando possível. O que não podem é perder a oportunidade de aproveitar as infinitas possibilidades que a informática dispõe, cabendo a eles inseri-las com responsabilidade no contexto escolar.

O cálculo desenvolveu-se numa interação múltipla com vários ramos da ciência e, sobretudo com a Física. Logo é um instrumento fundamental de físicos, engenheiros, químicos, biólogos, estatísticos, economistas, sendo utilizado nos mais variados ramos da ciência e da tecnologia. Seus conceitos são fundamentais, profundos e sutis. Desta forma é necessário uma devida apreciação desses conceitos que só serão adquiridos gradualmente e por via intuitiva (HUGHES-HALLETT et al. 1997).

O ensino da matemática apresenta problemas que precisam ser resolvidos. Desde os anos 80 existem propostas que tem a intenção de resolver estes problemas mas é preciso mais que intenções e propostas para que o ensino da matemática melhore de qualidade e contribua para a construção de um conhecimento matemático reconhecido como necessário ao exercício da cidadania.

Segundo MURPHY (1999), desde a década de 80, estão acontecendo inúmeros movimentos de reforma do cálculo aliadas às reformas curriculares. Objetivando enfatizar, em seus conteúdos, o que é realmente essencial e buscar maneiras novas e criativas para poder melhorar o desempenho dos estudantes na compreensão desses conteúdos. As reformas enfatizam, ainda, o uso do computador.

O entendimento do Cálculo passa pelo entendimento de funções (domínio ao qual a mesma está definida, imagem que ela define e o gráfico), e dos conceitos de limite, derivada e integral. Um software de matemática pode auxiliar no processo de ensino/aprendizagem das disciplinas de cálculo de várias variáveis, mas a construção destes conhecimentos é um processo de natureza interdisciplinar que necessita de parceria, cumplicidade, cooperação e interatividade para obter resultados positivos (DANDOLINI, 2003).

Utilizando esta análise, fica evidente que a utilização de programas computacionais, tais como Maple<sup>®</sup>, MatLab<sup>®</sup>, Scilab e outros, de uma maneira eficiente, pode ser de extrema importância no sentido de promover o desenvolvimento do pensamento matemático, integrando aspectos geométricos, numéricos e analíticos tornando o entendimento de alguns conceitos do cálculo mais imediato e de melhor compreensão.

O artigo tem como objetivo propor sugestões de como utilizar o software Maple<sup>®</sup> no ensino de cálculo de duas variáveis e também relatar como foi utilizados esse software no ensino de cálculo e os resultados obtidos.

## **2. ALGUMAS APLICAÇÕES DO MAPLE<sup>®</sup> NO CÁLCULO**

Para mostrar a utilidade do software nas disciplinas de Cálculo são apresentados, nesta seção, exemplos onde o Maple poderá auxiliar o aluno a entender melhor os conteúdos e também poderá facilitar o processo dos cálculos.

No cálculo de volumes os alunos mostram grande dificuldade em esboçar o gráfico do sólido. O Maple poderá ajudar o aluno na visualização do sólido o que facilitará o aluno no momento de definir a integral que deve ser calculada e também no momento de calcular a integral. Além disto, muitas vezes o professor deixa de dar exemplos de aplicações envolvendo problemas reais pois as integrais resultantes são muito difíceis de calcular qual deseja calcular o volume, o que dificulta o entendimento do processo de, neste caso mais uma vez o Maple poderá ser de grande importância.

Outro recurso importantíssimo deste software é a programação, pois o Maple nos permite, mesmo que de maneira limitada e pouco rebuscada, elaborar programas básicos.

## 2.1 Cálculo de Volume

Nesta subseção apresentam-se exemplos do cálculo do Volume de um sólido de várias formas, utilizando sistema cartesiano e coordenadas polares. Também se mostra como obter o volume de um sólido, obtido pela rotação de uma curva em torno de um eixo fixo ou uma reta dada.

Primeiramente, mostra-se como calcular o volume de um sólido cujas equações são dadas em coordenadas cartesianas. Estes cálculos são feitos utilizando a integração tripla.

Seja  $T$  uma região qualquer no plano  $xyz$ . Projeta-se a região  $T$  sobre o plano  $xy$  e obtemos a região plana  $R$  limitada por

$$R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

Se a região  $T$  é limitada por  $z_1 = g_1(x, y)$  e  $z_2 = g_2(x, y)$ . Então o volume da região  $T$  é dado por

$$V = \iiint_T dx \, dy \, dz \quad (2)$$

ou,

$$V = \int_a^b \left[ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[ \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \right] dy \right] dx \quad (3)$$

Utilizando três vezes o comando “int”, a fórmula dada acima é representada da seguinte maneira no Maple:

**>int(int(int(1,z=g1(x..y)..g2(x,y)),y=f1(x)..f2(x)),x=a..b);**

Na Figura 1 mostra-se o gráfico do sólido limitado superiormente por  $z = x + 2y + 1$ , inferiormente por  $z = -x - 2y + 2$  e lateralmente pela superfície definida pelo contorno da região  $D$ , limitada pela curva  $y = x^2 - 1$  e  $y = 5x^2 - 5$  visto por dois ângulos diferentes. Uma vantagem do Maple é que após gerar o gráficos tridimensional é possível (apenas utilizando o “mouse”) girar o gráfico em qualquer direção o que facilita a visualização e o entendimento do gráfico.

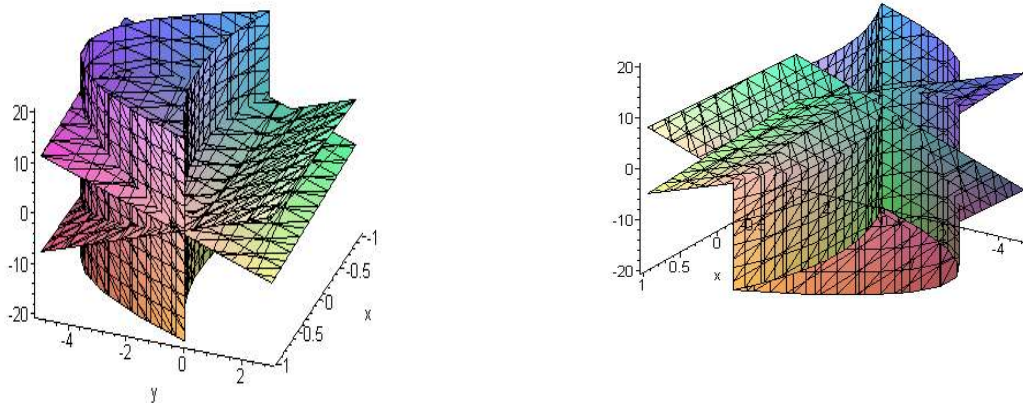


Figura 1: Gráfico do limitado superiormente por  $z = x + 2y + 1$ , inferiormente por  $z = -x - 2y + 2$  e lateralmente pela superfície definida pelo contorno da região D, limitada pela curva  $y = x^2 - 1$  e  $y = 5x^2 - 5$  gerada no Maple com o seguinte comando “> implicitplot3d({x + 2\*y + 1=z, -x - 2\*y + 2=z, y=x^2-1, y=5\*x^2-5}, x=-1..1, y=-5..3, z=-20..20);”.

Para calcular o volume deste sólido necessitamos calcular os limites de integração. Com auxílio do Maple pode-se determinar os limites de integração da variável  $x$ , usando o comando “solve” (“> solve(x^2-1, 5\*x^2-5, x);”). Assim, encontram-se os valores -1 e 1, donde conclui-se que a variação de  $x$  é de -1 a 1. A variação de  $y$  é definida pela desigualdade,  $x^2 - 1 \leq y \leq 5x^2 - 5$ . Visualizam-se essas duas curvas através da Figura 2. A variação de  $z$  é de  $-x - 2y + 2$  a  $x + 2y + 1$ .

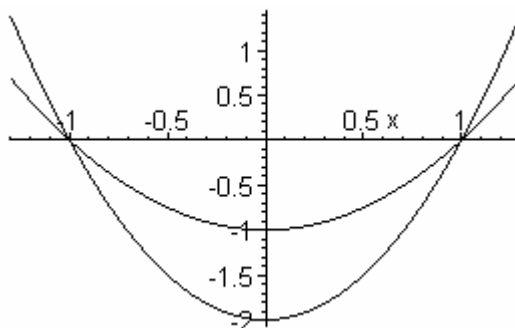


Figura 2: Gráfico da região limitada pelas curvas  $y = x^2 - 1$  e  $y = 5x^2 - 5$  gerada no Maple com o seguinte comando “plot({x^2-1, 5\*x^2-5}, x=-1..1)”

Logo, o volume do sólido é dado pela integral conforme equação (4).

$$V = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2-1}^{5x^2-5} \left[ \int_{-x-2y+2}^{x+2y+1} dz \right] dy \right] dx \quad (4)$$

A fórmula para o cálculo de volume de um espaço representado em coordenadas polares é dada por

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r, \theta) r \, dr \, d\theta \quad (5)$$

onde  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

A Equação (5) é a mesma utilizada no cálculo de volume em coordenadas cartesianas para integração dupla com  $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$  e  $dx dy = r dr d\theta$ . Utilizando o comando “int”, a fórmula acima é dada no Maple por

```
>int(int(g(r,theta),r=0..a),theta=0..2*Pi);
```

Para encontrar o volume da esfera  $x^2+y^2+z^2=a^2$  usando as coordenadas polares substitui-se  $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ , e considerando somente o valor positivo de z, obtem-se  $z=g(x,y)=g(r,\theta)=\sqrt{a^2-r^2}$ . As variações de r e  $\theta$  são dadas por  $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Substituindo estes valores na Equação (5), obtem-se  $V=2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta$ , onde multiplica-se por 2, pois considerou-se somente o valor positivo de z. Utilizando o comando “int” duas vezes, tem-se

```
>V:=2*Int(Int(r*sqrt(a^2-r^2),r=0..a),theta=0..2*Pi)=2*int(int(r*sqrt(a^2-r^2),r=0..a),theta=0..2*Pi);
```

onde o Maple fornece o seguinte resultado

$$V := 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a r \sqrt{a^2-r^2} dr d\theta = \frac{4}{3} (a^2)^{(3/2)} \pi \quad (6)$$

Observando a equação (6) vê-se que o comando “Int” com I maiúsculo não resolve a integral, mas apenas apresenta a forma simbólica da integral.

O volume do sólido de revolução obtido pela revolução da região limitada pelo gráfico de  $y=f(x)$ , onde x varia de a até b, e o eixo x, em torno do eixo x é dado por  $V=\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ , e em torno do eixo y é dado por  $V=2\pi \int_a^b x [f(x)] dx$ . No

Maple essa fórmula é dada por

```
>V := Pi*int(f(x)^2,x=a..b);
```

E em torno do eixo y é dada por

```
> V := 2*Pi*int(x*f(x),x=a..b);
```

Para calcular o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região entre o gráfico da função  $y = \sin(x)$  e o eixo x, de 0 a  $2\pi$ , inicialmente constrói-se o gráfico (Figura 4) do sólido, onde pode-se utilizar a seguinte a seqüência de comandos:

```
> restart
> f:=(x)->sin(x);
> plot(f,0..2*Pi);
> plot3d([x,f(x)*cos(theta),f(x)*sin(theta)],x=0..2*Pi,theta=0..2*Pi);
```

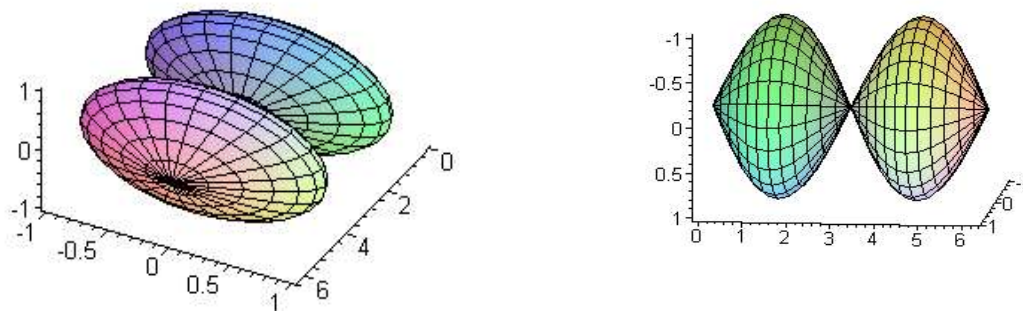


Figura 4: Gráfico do sólido de revolução vistos de dois ângulos diferentes

A seguir, calcula-se o volume da Figura 4 com o seguinte comando:

```
> V := Pi*Int((sin(x))^2,x=0..2*Pi)=Pi*int((sin(x))^2,x=0..2*Pi);
```

onde o Maple fornece o resultado  $V = \pi^2 u \cdot v$ .

Segundo (Stewart, 2001) a família de superfícies geradas pela equação em coordenadas esféricas  $\rho = 1 + 0.2 \sin(m\theta) \sin(n\phi)$  onde  $m$  e  $n$  são constante foi sugerida como modelo para tumores. Estas superfícies são chamadas esferas protuberâncias ou esferas enrugadas. A Figura 5 ilustra estas superfícies.



Figura 5: Gráfico de esferas enrugadas geradas no Maple com o comando “plot3d(1+0.2\*sin(m\*t)\*sin(n\*p),t=0..2\*Pi,p=0..Pi,coords=spherical,scaling=constrained)”. No lado direito com  $m = 1$  e  $n = 3$  e o lado esquerdo com  $m = 6$  e  $n = 5$

Para calcular o volume deste sólido usando coordenadas esféricas usa-se o comando Tripleint<sup>1</sup>, ou seja:

```
> with(student);
> V:=Tripleint(r^2*sin(p),r=0..1+0.2*sin(6*t)*sin(5*p),p=0..Pi,t=0..2*Pi);
> value(V);
```

Usando a seqüência de comandos acima, obtém-se que o volume da esfera enrugada é aproximadamente de 4,31 u.v.

## 2.3 Programação

<sup>1</sup> Para calcular integrais duplas e tripas pode-se também utilizar os comandos Doubleint e Tripleint respectivamente. Mas neste caso deve-se carregar o pacote student e utilizar o comando value para resolver a integral.

Outro recurso importantíssimo deste software é a programação, pois o Maple nos permite, mesmo que de maneira limitada e pouco rebuscada, elaborar programas básicos. Como exemplo pode-se citar pesquisa de raízes reais de uma função em dado intervalo.

Pode-se estudar um exemplo tipicamente acadêmico. O problema é o cálculo da raiz quadrada via aproximações sucessivas. O algoritmo, baseado no Método de Newton, é muito simples. Supondo que se deseja calcular a raiz quadrada de  $a$ . Então, a partir de um valor inicial  $r_0$  (arbitrário) a raiz quadrada de  $a$  é o limite da seqüência  $r_k$  onde,

$r_k = 0,5 \left( r_{k-1} + \frac{a}{r_{k-1}} \right), \quad k = 1, 2, 3 \dots$	(7)
---	-----

Para obter o valor aproximado de uma raiz do polinômio  $x^2 - 11,3 = 0$  usando o Método de Newton com  $r_0 = 1$ , com somente 5 iterações pode-se utilizar o algoritmo

```
> rr:=1;
> for k from 1 to 5 do
> rr:= 0.5 * (rr + 11.3/rr)
> od;
```

### 3. RELATO DE EXPERIÊNCIAS

Os exemplos acima descritos ilustram parte do potencial do software Maple. Porém o uso eficaz de qualquer software no ensino de cálculo não depende apenas da qualidade do software que será utilizado, mas principalmente da forma como ele será explorado em sala de aula e da motivação dos alunos.

O uso do Maple nas disciplinas de Cálculo foi realizado em laboratórios de informática, onde os alunos, na maioria das vezes, trabalham em grupo pois o número de microcomputadores é pequeno. As aulas de modo geral são conduzidas de forma que primeiramente o professor expõe os conteúdos e conceitos, e depois apresenta uma lista de exercícios e os comandos básicos do Maple que poderão ser utilizados para resolver os problemas propostos. Porém, esta metodologia não tem apresentado bons resultados.

As experiências têm mostrado que os alunos, nas primeiras aulas mostram-se bastante interessados em aprender a utilizar o Maple, principalmente quando se trabalha com a elaboração de gráficos de funções. Mas quando se começa a utilizar o Maple para a resolução de problemas mais complexos e também para demonstrar certos resultados, o interesse começa a diminuir, principalmente quando o computador é compartilhado entre dois e três alunos. Os alunos não discutem entre si e solicitam o auxílio do professor para resolver problemas de utilização do software e não se preocupam com o conteúdo da disciplina. Eles querem resultados prontos e não buscam entender os resultados fornecidos pelo software. O uso do software no ensino de cálculo não tem representado nenhuma grande inovação do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo pois não está fornecendo formas alternativas para o aluno entender os conceitos de matemática, que são fundamentais para os alunos entenderem as ligações do cálculo com outras disciplinas (principalmente da engenharia e da física). Da forma como está sendo explorado, está simplesmente facilitando a visualização de gráficos de funções e a resolução de cálculos.

Isto não significa que o software não possa ser explorado ou que não tenha potencial no sentido de auxiliar o aluno no entendimento dos conceitos matemáticos, mas que se deve estudar formas de utilização do software que proporcionem de fato subsídios para esta compreensão. Estas experiências mostraram que se necessita de um estudo mais profundo de como utilizar os software nas aulas de Cálculo. Não basta simplesmente solicitar aos alunos

para utilizarem o software para fazer gráficos e resolver integrais. O professor deve criar situações de ensino aprendizagem, que com o auxílio do software, o aluno possa construir e entender os conceitos de Cálculo.

#### 4. CONCLUSÕES

O problema das reprovações nas disciplinas de cálculo indica que é necessária uma renovação urgente da atual metodologia de ensino. Por esses motivos e também pelo demasiado crescimento na área tecnológica tem-se a necessidade de se habituar às novas metodologias de ensino-aprendizagem e seu uso correto. A utilização de um software nas aulas de cálculo deve ser explorada de forma a auxiliar os alunos a construírem os conceitos matemáticos que darão base para o aluno aplicar estes conceitos.

Nos trabalhos futuros pretende-se desenvolver metodologias e estratégias de utilização de softwares de matemática com o objetivo de proporcionar aos alunos meios para que eles construam os principais conceitos do Cálculo de forma clara.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DANDOLINI, G. A.;VANINI, L.; SOUZA, J. A. Ensino integrado nas aulas e cálculo de várias variáveis. XXXI COBENGE. **Anais**. Rio de Janeiro, 2003.
- HUGHES-HALLET, D., GLEASON, A. M., et. al. **Calculo**. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1997.
- LAUDARES, J. B. e LACHINI, J. O uso do computador no ensino de Matemática na Graduação. Disponível em <http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1931T.PDF> (em 10/06/2004).
- MURPHY, L. D., Computer Algebra Systems in Calculus Reform. Disponível em: <http://www.mste.uiuc.edu/murphy/papers/CalcReformPaper.html> (em 20/09/1999).
- NASCIMENTO, J. L. e NASSER, L. A reprovação em Cálculo I: investigações de Causas. XXV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. **Anais**. V.2. Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 1997.
- PALIS, G. L. R. Computadores em Cálculo. Uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas & Debates**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, Ano VII, n. 6, p. 22-37, 1995.
- STEWART, J. **Cálculo**. Vol. II São Paulo: Ed. Pioneira, 2001.

### THE SOFTWARE USE IN THE CALCULUS TEACHING

**Abstract:** *Among the many difficulties for teaching several variables calculus, there is leading pupils to visualize two variables functions graphic representations. It is well known that computational technologies can represent many benefits to teaching-learning processes of mathematical concepts. Mathematics softwares, specifically Maple© software, can help the task of leading students to perceive geometric relations between variables in two variables real functions. Some mathematical concepts are better understood this way. In this text we analyse some of the possibilities of using this software in calculus classes.*

**Key-words:** *Multi-ways of teaching, Teaching-learning, Software Maple®, Calculus*