UM APLICATIVO, COM FINALIDADES ACADÊMICAS, PARA A DETERMINAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E TENSÕES EM FIGURAS PLANAS

Newton Carlos Pereira Ferro – ferro@feb.unesp.br
Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia – Campus de Bauru
Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, s/n
17033-360 – Bauru – São Paulo
Mario Augusto Ferraz do Amaral – mariofamaral@yahoo.com.br
Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia – Campus de Bauru
Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, s/n
17033-360 – Bauru – São Paulo

***Resumo**: Dada a crescente importância que a informática vem adquirindo nas mais diversas áreas do conhecimento humano, tem-se empenhado em incorporar as ferramentas disponibilizadas por tão rápida evolução, como recursos que permitam integrá-las ao ensino de graduação, tornando o aprendizado mais eficiente, mais atraente e com maior interação docentes/alunos. O presente trabalho, que está inserido nesse contexto, tem como objetivo apresentar um aplicativo, em linguagem Delphi, com capacidade de determinar as características geométricas de figuras planas quaisquer ou de um conjunto delas a partir da aplicação do Teorema de Green. Para tanto, inicialmente realiza-se uma mudança de variáveis e a integral resultante é calculada numericamente por Gauss. Após essa análise inicial e estando tal seção sob a ação de esforços solicitantes é possível calcular as tensões em pontos dessa figura. Recursos gráficos foram implementados no pré e pós-processadores. Assim, na etapa de pré-processamento estará disponibilizada ao usuário a visualização da figura em análise, permitindo-se inclusive corrigir os dados fornecidos. Na fase de pós-processamento serão apresentadas graficamente as posições dos eixos principais de inércia, tensões principais, posição da linha neutra, etc. Este aplicativo será instrumento de grande alcance para auxiliar e estimular o aprendizado de alunos de graduação em inúmeras de disciplinas ministradas nos Cursos de Engenharia.*

***Palavras-chave:** Métodos Numéricos, Ensino de Engenharia, Resistência dos Materiais, Software Acadêmico, Matemática Aplicada.*

***Sub-Tema:** Novas Tecnologias e Metodologias no Ensino de Engenharia.*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento, nas últimas décadas, de microcomputadores e sistemas operacionais, especialmente o ambiente “MS-WINDOWS”, tem favorecido o aparecimento de programas que permitem resolver problemas de engenharia cada vez mais complexos, em menor tempo e com capacidade de gerenciar, manipular e apresentar rapidamente respostas tanto numéricas quanto gráficas.

A capacidade gráfica, característica do ambiente Windows, e conseqüentemente das linguagens orientadas a eventos tem permitido, além de uma forte interação usuário-programa, a oportunidade de aplicar tais recursos como ferramentas, no desenvolvimento de aplicativos educacionais, que possam proporcionar um salto de qualidade no ensino de graduação tornando-o mais eficiente e permitindo assimilação de conceitos, muitas vezes de difícil percepção com a utilização somente de recursos convencionais de ensino.

Tendo esses aspectos em foco, o presente trabalho, vem permitir aos alunos do curso de engenharia, a partir do Teorema de Green, um assunto em princípio árido, a vinculação da teoria e a solução de problemas de sua futura área de atuação, o que por vezes passa desapercebido, dificultando o aprendizado e a integração ao curso.

Trata-se, portanto, de uma ferramenta de grande alcance para auxiliar didaticamente estudantes de graduação em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Isostática, Resistência dos Materiais, Teoria de Estruturas, além de outras disciplinas correlatas, ministradas nos Cursos de Engenharia.

2. OBJETIVO

A partir da aplicação do Teorema de Green é possível a transformação de uma integral dupla no domínio em uma integral de linha (no contorno), o que torna mais fácil e rápido o cálculo em figuras de seção variada de sua área, baricentro, momento estático, posição de eixos, momentos principais de inércia e momentos de inércia para um sistema de eixos qualquer.

Após essas determinações, e estando a seção submetida a esforços solicitantes, será possível calcular as tensões em um ponto qualquer da figura, a posição da linha neutra, as tensões principais e as tensões em um ponto contido na figura em análise.

O objetivo é determinar para figuras planas de seções aleatórias, as características geométricas e as tensões na flexão geral, citadas anteriormente, por intermédio de um programa desenvolvido para microcomputadores que utilize um ambiente que permita tornar a interface com o usuário mais agradável. Fato este que nos levou a usar a linguagem de programação Delphi, disponibilizando ao usuário um ambiente de gráfico, compatível com o sistema Windows, o que é um facilitador para sua utilização.

Tal aplicativo, durante o pré-processamento, isto é, na etapa de aquisição de dados, permite que a figura em análise possa ser visualizada, possibilitando ao usuário efetuar as correções e alterações necessárias, antes da fase de processamento numérico.

A fase de pós-processamento, que é a etapa de apresentação dos resultados numéricos da análise, também possibilita a representação gráfica da posição da linha neutra, eixos principais de inércia e as tensões em cada um dos vértices.

A opção de geração de relatórios impressos que permitam análises posteriores e documentação da solução do problema tratado foi também contemplada no desenvolvimento do projeto.

3. METODOLOGIA

3.1 Aspectos gerais do Teorema de Green

Segundo o Teorema de Green, admitindo-se que D seja um domínio do plano xy e C uma curva simples, fechada, lisa por partes, contida em D e cujo interior também está em D. Sejam P(x,y) e Q(x,y) duas funções definidas e contínuas em R, possuindo derivadas parciais primeiras contínuas. Nessas condições vale:

$$\oint_c (Pdx+Qdy) = \iint_R \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dxdy$$

(1)

sendo R a região fechada limitada por C.

A partir da "equação (1)" foram deduzidas todas as expressões para cálculo das características geométricas de figuras planas, que foram implementadas ao aplicativo com a utilização de procedimentos numéricos.

Tomando-se como exemplo a aplicação do Teorema de Green para o momento de inércia em relação ao eixo das abscissas (Ix), que por definição, é expresso pela seguinte expressão integral:

$$\iint_R y^2 \, dxdy$$

(2)

Para que se possa representar a integral na forma de linha, tem-se que admitir, $Q=0$ e $P=-\frac{y^3}{3}$, na "equação (1)". Assim tem-se:

$$I_x = -\frac{1}{3} \oint_c y^3 \, dx$$

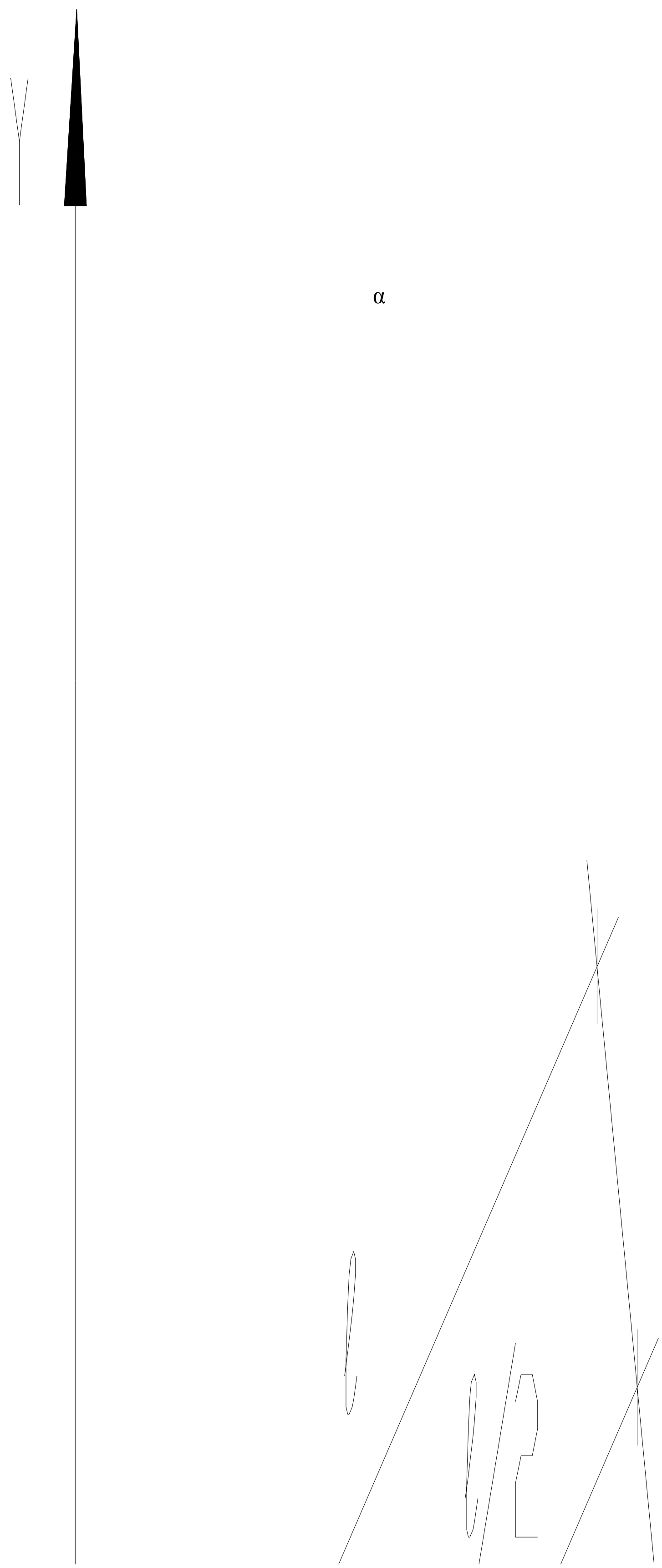
(3)

3.2 Integração numérica no contorno

A "equação (3)" permite o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo x, de um segmento retilíneo ***ij***, do contorno de uma figura plana qualquer. Esta equação deverá receber tratamento adequado para que a integração possa ser realizada numericamente.

Contornos retilíneos

Para permitir a utilização da técnica da integração numérica ao longo de cada trecho retilíneo ***ij*** do contorno, faz-se necessário uma mudança de variável. Tal procedimento será realizado, utilizando-se um sistema de coordenadas naturais, que a seguir se apresenta.



Y
α
l
l/2

Figura 1 – Trecho ij representado por um sistema de coordenadas naturais.

Utilizando-se o sistema acima e a “equação (3)”, tem-se:

$$I_{(ij)x} = -\frac{1}{3}\frac{\ell}{2}\int_{-1}^{1}\left[y_i + \frac{\ell}{2}(1+\xi).sen\alpha\right]^3 .\cos\alpha .\; d\xi$$

(4)

Todos os procedimentos descritos acima tiveram como objetivo representar a integral analítica de maneira a permitir a sua fácil representação em uma formulação integral numérica do tipo Gaussiana, como a seguir se apresenta:

$$I_{(ij)x} = -\frac{\ell}{6}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[y_i + \frac{\ell}{2}(1+\xi_i)sen\alpha\right]^3 \cos\alpha\right\} w_i$$

(5)

sendo:
$\xi_i \Rightarrow$ os pontos de Gauss;
$w_i \Rightarrow$ os pesos de Gauss.
Admitindo-se dois pontos de Gauss, que para os trechos retilíneos resulta exata a integração numérica. Tais pontos estão localizados em $\xi_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ e $\xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ com os pesos $w_1 = w_2 = 1$, respectivamente, tem-se:

$$I_{(ij)x} = -\frac{\ell}{6}\cos\alpha .\left\{\left[y_i + \frac{\ell}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).sen\alpha\right]^3 + \left[y_i + \frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).sen\alpha\right]^3\right\}$$

(6)

Por analogia, obtêm-se as demais características geométricas para segmentos retilíneos.

Contornos circulares

Para contornos circulares foi desenvolvida a seguinte formulação baseada no Teorema de Green. Na Figura 2 está representado um segmento circular e as respectivas notações que serão empregadas nas deduções a seguir.

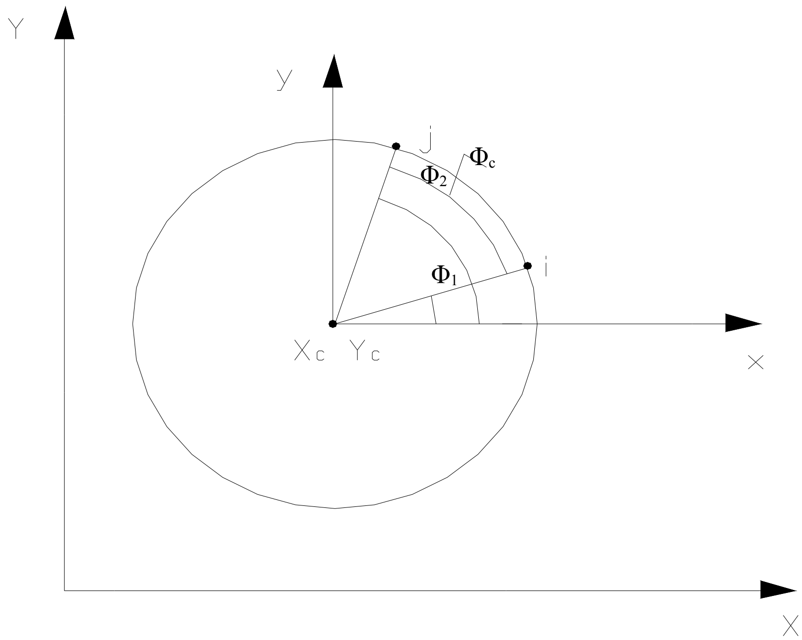


Figura 2 – Seção plana circular.

A partir da observação da Figura 2 e da “equação (3)”, pode-se escrever:

$$Ix=\frac{1}{3}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\left(Y_i-r\ .sen\varphi_1+r\ .sen\varphi\right)^3.r\ .sen\varphi\ .\ d\varphi \qquad (7)$$

Para permitir a implementação da integração numérica Gaussiana far-se-á uma mudança de variável, mudando-se assim o intervalo de integração de -1 a 1, podendo-se escrever a “equação (7)”, na forma de integração numérica por Gauss. Tal equação toma a forma:

$$Ix=\frac{\left(\varphi_2-\varphi_1\right)}{6}\sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-r\ .\mathrm{sen}\,\varphi_1+r\ .\mathrm{sen}\left[\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}+\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right).\xi_i\right]\right\}^3.r\ .\mathrm{sen}\left[\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}+\left(\varphi\right.\right. \qquad (8)$$

Utilizando-se de 24 pontos e os respectivos pesos de Gauss, obtém-se uma excelente precisão nos cálculos das características geométricas de segmentos circulares, como ficou comprovado por inúmeras análises efetuadas.

Por analogia, determinam-se as demais características geométricas para segmentos retilíneos.

Somando-se as parcelas correspondentes aos NL trechos retilíneos e curvilíneos do contorno obtêm-se as características geométricas buscadas.

3.3 Tensões

De posse das características geométricas e estando a figura submetida a esforços como momentos e forças, pode-se calcular a tensão em qualquer ponto da seção a partir da seguinte equação:

$$\sigma_Z = \left(\frac{I_X \, My - I_{XY} \, Mx}{I_X I_Y - I_{XY^2}} \right) X + \left(\frac{I_Y \, Mx - I_{XY} \, My}{I_X I_Y - I_{XY^2}} \right) Y + \frac{FN}{S}$$

(9)

Esta equação também serviu como base para a apresentação gráfica da linha neutra.

O aplicativo elaborado, fundamentado nas expressões apresentadas, está dotado de ferramentas gráficas que possibilitam uma maior interação com o usuário e, assim, tornando-o mais amigável. Para se implementarem os procedimentos gráficos foram desenvolvidas equações, para se adequar a posição dos eixos na tela, a escala de representação, etc.

4. ANÁLISE E RESULTADOS

A seguir apresenta-se a utilização do aplicativo, seus formulários e todos os recursos gráficos a partir de um exemplo, extraído dos exercícios 3 e 4 de TIMOSHENKO & YOUNG (1979), Anexo 1 pg. AE11, em que solicita o cálculo do momento de inércia da área hachurada, apresentada na figura 3, em relação ao eixo X e a um eixo paralelo a X que passa pelo centro de gravidade.

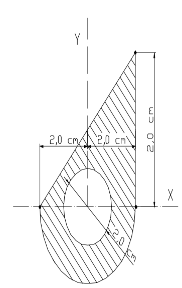


Figura 3 – Seção transversal hachurada em análise.

O primeiro passo é identificar os vértices da seção plana em análise. No exemplo temos três para a seção principal (contorno da figura) e um para abertura. Neste caso definiu-se a origem do sistema de eixos no centro do círculo interno.

Os passos para a execução desse exemplo, com o aplicativo estão descritos a seguir:

ü Inicia-se o aplicativo;

ü Lê-se com atenção o primeiro aviso, pois nele constam algumas configurações importantes a serem observadas para um bom funcionamento do aplicativo. Pressina-se “*Fechar*” para encerrar o aviso;

- A seguir surge um aviso informando que: "A implementação dos vértices da seção principal e das aberturas terão que obedecer ao sentido anti-horário";
- Escolhe-se um nome para o projeto, no nosso caso será Exemplo 1;
- Informa-se a presença de aberturas, neste caso clica-se em "*possui aberturas*";
- Informa-se o número de vértices da seção principal, na caixa "*Seção Principal*", no exemplo são três;
- Pressiona-se o botão "*coordenadas*";
- Abrir-se-á o formulário "*Coordenadas da Figura Principal*". Este formulário indica o número do vértice para os quais o usuário deverá digitar as coordenadas. Neste exemplo, o primeiro vértice terá as coordenadas (-2,0), e como o segmento é curvo entre este vértice e o seguinte (o de número 2) estes dados serão fornecidos na palheta "*curva*", para isso é preciso informar o centro (0,0) e o ângulo (180º). Observe que esse ângulo é positivo pois o segmento de curva percorre o vértice de 1 para 2 no sentido anti-horário, caso contrário tal ângulo seria negativo;
- Aperta-se o botão "*avançar*". Com isso o formulário muda para o vértice 2 (2,0), cujas coordenas já estão apresentadas pois foram calculadas pelo aplicativo em razão dos dados fornecidos no segmento anterior. Como a ligação com o terceiro vértice é retilínea, muda-se a palheta para "*reta*";
- Aperta-se novamente o botão "*avançar*". Com isso o formulário muda para o vértice 3, cujas coordenas são (2,4), lembrando sempre que se percorre a figura no sentido anti-horário. Como a ligação com o primeiro vértice é retilínea, este será posto na palheta "*reta*". Apertando-se o botão "*Avançar*", como este é o último vértice, este formulário se fecha voltando-se para o formulário principal;
- Informa-se o número de aberturas na caixa "*Aberturas*", neste exemplo é um. Pressiona-se o botão "*Coordenadas*";
- Abrir-se-á o formulário "*Coordenadas das Aberturas*", informa-se o número de vértices da abertura um, neste exemplo como é um círculo, terá, portanto 1 vértice. Aperta-se o botão "*OK*", imediatamente o formulário fica com a palheta "*círculo*" ativa e 360º no ângulo interno. Informa-se, portanto, apenas as coordenadas do centro, no exemplo (0,0), e do vértice 4 que está no limite da circunferência, (1,0);
- Aperta-se o botão "*avançar*" e este formulário se fecha, voltando ao formulário principal;
- Clica-se em "*Visualizar*", "*Figura*", para checar se não houve erros nos dados de entrada, que no caso são os vértices;
- Se houver algum erro, os vértices podem ser corrigidos em "*Visualizar*", "*Vértices*";
- Caso contrário, clica-se em "*arquivo*", "*calcular*", "*características geométricas*";
- Abrir-se-á o formulário "*Apresentação dos Resultados*", com os resultados dos cálculos. Para sair deste formulário clica-se em "*OK*";
- Pode-se salvar esta seção, em "*Arquivo*", "*Salvar*";
- Podem-se também criar relatórios, bastando clicar em "*Relatórios*" e escolher o relatório desejado.

As figuras abaixo ilustram alguns passos descritos acima.

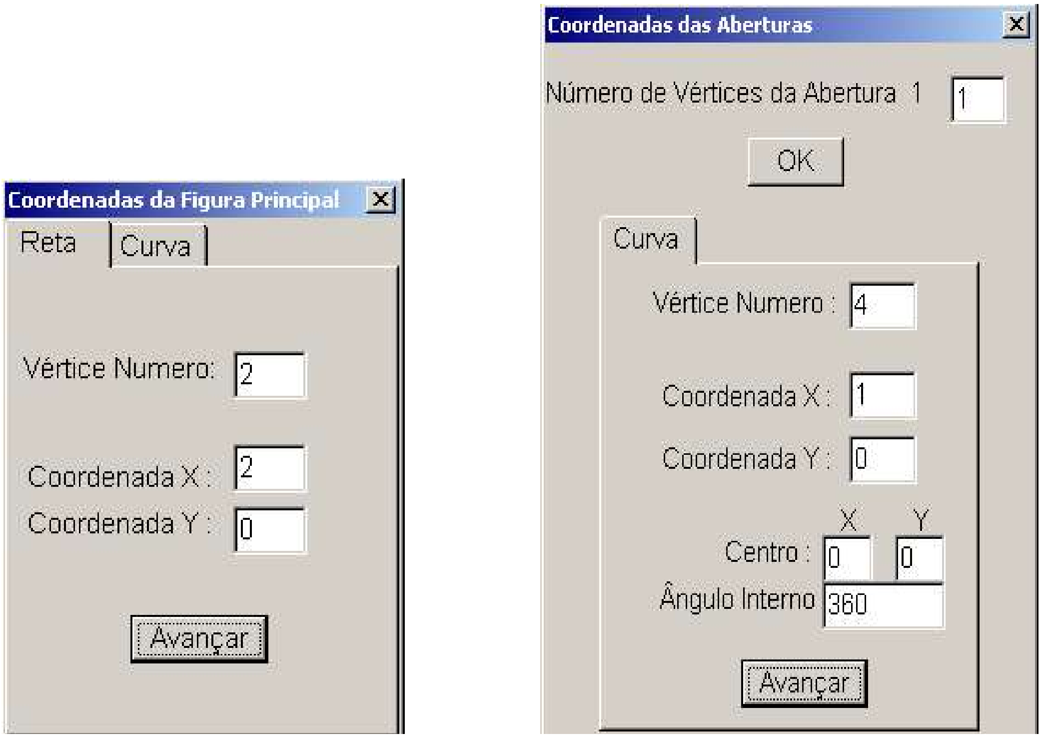


Figura 4 – Formulários para entrada de dados dos vértices da figura.

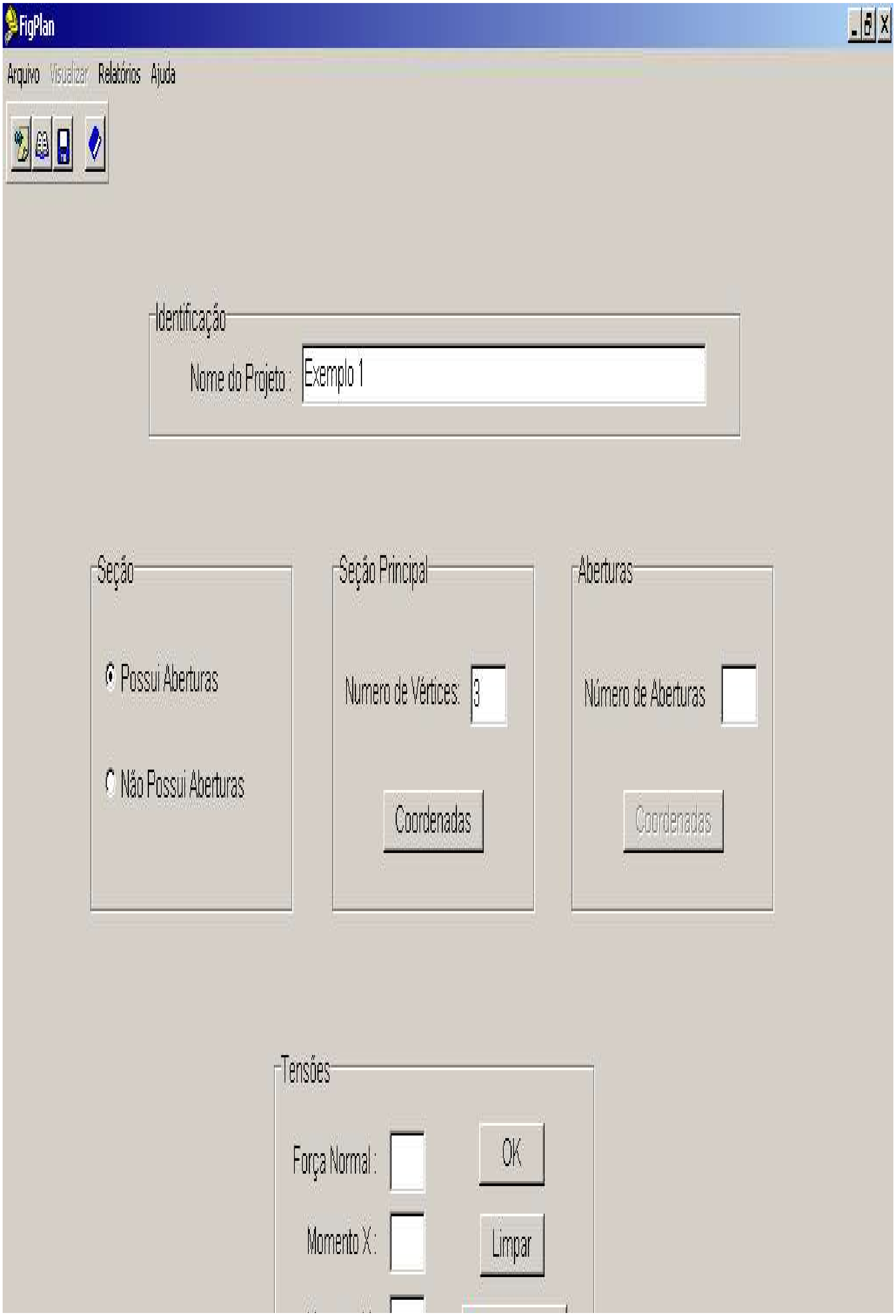

FigPlan
Arquivo
Visualizar
Relatórios
Ajuda
Identificação
Nome do Projeto :
Exemplo 1
Seção
Possui Aberturas
Não Possui Aberturas
Seção Principal
Numero de Vértices:
3
Coordenadas
Aberturas
Número de Aberturas
Coordenadas
Tensões
Força Normal :
OK
Momento X :
Limpar

Figura 5 – Formulário principal.

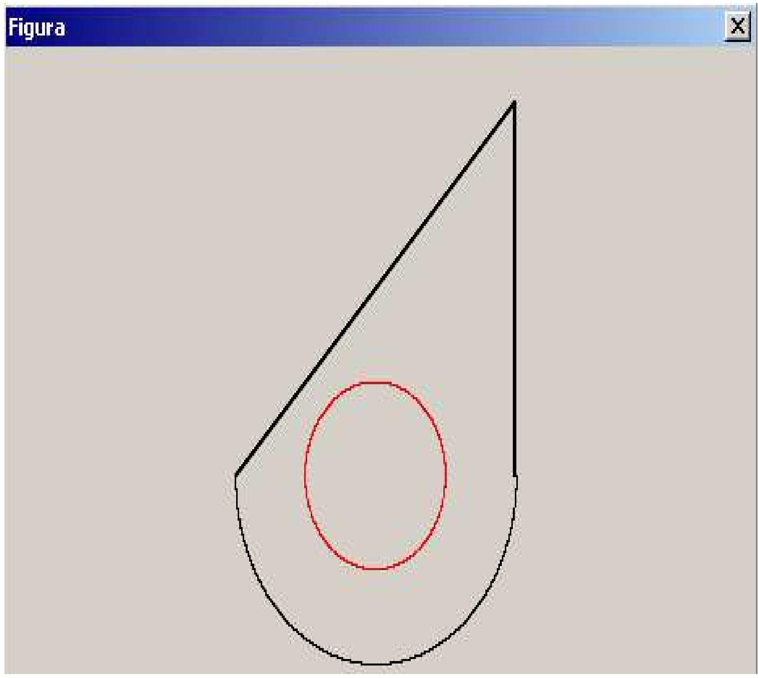


Figura 6 – Apresentação da figura em análise, desenhada pelo aplicativo.

Podem-se comparar os resultados obtidos, com as respostas do livro, que são:

Para o momento de inércia relativo ao eixo X, Ix = 26,83 cm^4 e para o momento de inércia relativo a um eixo paralelo a X que passa pelo centro de gravidade, Ix = 24,30 cm^4.

Os valores encontrados pelo aplicativo, Ix = 26,8311 cm^4 e Ixcg = 24,2781 cm^4, são idênticos à resposta do livro.

Um outro valor de fácil comparação é a área, que calculada pelas equações convencionais de geometria plana, resulta um valor idêntico ao do aplicativo.

Para o cálculo de tensões, bastando entrar com os esforços atuantes na figura, na caixa "*Tensões*" do formulário principal, e após isso apertar "*Arquivo*", "*Calcular*", "*Tensões*" e informar as coordenadas dos pontos em que o valor das tensões. Para visualizar a linha neutra e os eixos principais de inércia, clica-se em "*Visualizar*", "*Linha Neutra*".

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tem como principal objetivo desenvolver um aplicativo computacional, educacional, em linguagem Delphi, baseado na aplicação do Teorema de Green, com a finalidade de calcular características geométricas de figuras planas, com contorno qualquer e o cálculo de tensão normal em qualquer ponto da figura.

Este trabalho auxiliará as disciplinas de Matemática, ministradas nos primeiros anos do curso a ampliar os horizontes dos alunos recém-ingressos, permitindo uma maior assimilação dos conhecimentos a eles transmitidos e a conscientizar da inter-relação e integração entre as disciplinas ministradas nos Cursos de Engenharia.

Portanto, nos é muito claro os inegáveis ganhos que este aplicativo educacional trará para a formação dos alunos dos Cursos de Engenharia.

Agradecimentos

Os autores querem nesta oportunidade externar seus agradecimentos à FAPESP pela concessão de bolsa de iniciação científica, que possibilitou o desenvolvimento do aplicativo aqui apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F. P. , JOHNSTON, JR, E. R. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1995.

CANTÙ, M. **Dominando o delphi 5.0**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2000.

CARVALHO, C. A. T. **Isostática**. Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia e Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Bauru , SP, 1996. 103p.

MANZANO, A. N. G. ,MENDES,S. S. V. **Estudo dirigido de delphi 5.0 (coleção P.D.).** São Paulo: Érica Ltda, 1999.

SAVASSI, V. **Formulações para cálculo (programável) de características de figuras geométricas planas**. Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Estruturas, São Carlos, SP, 1987. 39p.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica (volume 2).** São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994.

TIMOSHENKO, S. YOUNG, D. H. **Mecânica Técnica (Estática).** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

A SOFTWARE, WITH ACADEMIC PURPOSES, FOR THE DETERMINATION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS AND TENSIONS IN PLANE ILLUSTRATIONS

Abstract: *Due to the increasing importance that computer science has been attaining in most areas of the human knowledge, there is an impel to incorporate the available tools for such fast evolution, as resources that allow to integrate them to the graduation teaching, providing a learning more efficient, more attractive and with larger interaction between docents and students. This search, which is inserted in this context, aims to present a software, in Delphi language, with capacity of determining the geometric characteristics of any plane illustrations or of a group of them beginning from the application of the Green's Theorem. For that, initially there is a change of variables and the resulting integral is calculated numerically by Gauss. After this primary analysis, and being such section under the action of solicitor efforts, it is possible to calculate the tensions in points of that* *illustration. Graphic resources were implemented in the precedent and post-processors. Thus, in the precedent-processing stage the visualization of the illustration in analysis will be available to the user, being permitted, besides, to correct the supplied data. In the post-processing phase, the positions of the main axes of inertia, main tensions, position of the neutral line, etc., will be presented graphically. This software will be instrument of great reach to aid and stimulate the learning of graduation students in countless disciplines taught in the Engineering Courses.*

Key-words: *Numerical Methods, Engineering Teaching, Material Resistence, Academic Software, Applied Mathematics.*