



MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM TANQUE DE ARMAZENAMENTO

Emerson Martim – martim@rla01.pucpr.br

Departamento de Engenharia Química

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR

Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho

81611-970 - Curitiba, PR, Brasil

Viviana Cocco Mariani - mariani@rla01.pucpr.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR

Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho

81611-970 - Curitiba, PR, Brasil

Resumo: *As disciplinas de Matemática Aplicada à Engenharia Química I e II ministradas no curso de Engenharia Química da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), enfocam o estudo dos conteúdos de Cálculo Numérico. Com o objetivo de dinamizar as aulas e propiciar aos alunos aplicações práticas da área foram introduzidas as aulas de laboratório computacional utilizando o software Matlab e Excel para a solução dos problemas propostos. Assim, o objetivo principal deste trabalho é relatar a experiência vivenciada pelos autores do presente artigo ao apresentar o problema da modelagem matemática e solução numérica via Matlab e Excel de um tanque de armazenamento de um fluido.*

Palavras-chave: *Cálculo Numérico, Matlab, Excel, laboratório computacional, tanque de armazenamento de fluido.*

1. INTRODUÇÃO

Os cursos de Engenharia são caracterizados por currículos extensos e uma grande carga teórica de cálculos, matemática aplicada e física. Desde que a necessidade de realização de cálculos se tornou fundamental no desenvolvimento da sociedade moderna, instrumentos de medida têm sido desenvolvidos para auxiliar no uso e na aplicação do cálculo nas Engenharias. Esses equipamentos têm o objetivo de diminuir o tempo e melhorar a precisão dos cálculos realizados por engenheiros, matemáticos, físicos e astrônomos. Dentre os diversos equipamentos desenvolvidos como auxiliares de cálculo destacam-se a tábua de logaritmo, a régua de cálculo e o ábaco, precursores do computador e das calculadoras científicas e programáveis.

O maior avanço em termos de equipamentos de cálculos aplicados à Engenharia ocorreu na década de 90, com a popularização dos computadores pessoais. Hoje se compra um computador na mesma proporção com que se adquire um eletrodoméstico qualquer. O uso do computador se popularizou. Neste período também desenvolveram os pacotes computacionais voltados à área de engenharia tais como: Autocad, Reduce, Macsyma, Maple, Mathematica, Matlab, Derive, Mathcad, Axion, Mupad, Scilab, Hysys, Aspen, dentre outros. O uso de

pacotes computacionais, no ensino de Engenharia Química, tem se mostrado uma ferramenta bastante poderosa no desenvolvimento de novas metodologias de ensino para uma educação autônoma e centrada no aluno (ASSIS *et al.*, 2000).

Com a disponibilidade crescente de acesso à rede de computadores (Internet) vem se utilizando o computador como um recurso didático no processo educativo. Desta forma o potencial do computador é utilizado para: motivar, provocar discussões, fornecer resultados básicos, além de simular numérica e graficamente situações que são difíceis de serem simuladas num curso tradicional com quadro e giz. Porém, deseja-se usar as ferramentas tecnológicas para que o aluno seja um ser criativo e participativo e não um mero digitador de teclas programadas, deixando de ter uma atitude passiva.

Inúmeras pesquisas e trabalhos indicam que o uso do laboratório computacional pode se tornar um grande aliado para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, viabilizando a realização de novos tipos de atividades e de novas formas de pensar e agir (BALACHEFF e KAPUT, 1997). Entretanto, apesar das pesquisas enfatizarem a grande potencialidade do ambiente computacional, este potencial ainda não tem sido devidamente explorado e integrado ao cotidiano da prática escolar, ficando assim geralmente restrito a discussões teóricas e acadêmicas.

Os laboratórios computacionais apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. Segundo Hebenstreint (1987): "*o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais.*" Mesmo quando existe a possibilidade de ações sobre objetos físicos, a transposição destes objetos para "aplicativos computacionais" também apresenta vantagens: é a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a soberania da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a conseqüente construção de conjecturas.

Na disciplina Matemática Aplicada à Engenharia Química I e II na Pontifícia Universidade Católica do Paraná primeiramente, a parte teórica é apresentada em sala de aula através de exemplos de Engenharia Química. Como os alunos muitas vezes não conseguem resolver estes problemas analiticamente surge à necessidade de resolvê-los numericamente. Assim, os professores introduzem as "ferramentas" (conteúdos) necessárias para a solução dos mesmos, visto a necessidade de obter a solução destes problemas (CUTLIP e SHACHAN, 1999; VAN NESS *et al.*, 2000). Após esta etapa uma lista de exercícios aplicados a Engenharia Química são expostos aos alunos. Primeiramente os alunos modelam os problemas em sala de aula resolvendo alguns destes manualmente e/ou utilizando calculadora programável e em seguida são encaminhados para a aula de laboratório computacional onde resolvem os demais problemas presentes na listagem com o auxílio do aplicativo Matlab.

Observamos que para esta nova geração de jovens, que já convive com celulares, vídeo-games, controle remotos, eletrodomésticos programáveis e a Internet, o computador não os intimida. Eles conseguem se familiarizar com novos conceitos e principalmente aprender a programar, ou seja, eles assimilam bem as rotinas básicas do Matlab e as planilhas do Excel. Com ajuda, eles conseguem reconhecer no Matlab e Excel uma ferramenta de análise detalhada dos problemas de Engenharia. Nas aulas de laboratório estas ferramentas são utilizadas para análise criteriosa dos dados obtidos, para investigação e elaboração do relatório técnico sobre os dados obtidos. Com o uso destes aplicativos, pode-se evitar o desperdício de tempo com tarefas manuais exaustivas, fazendo com que o aluno se prenda mais ao entendimento físico dos problemas.

O objetivo principal do presente trabalho é relatar as experiências vivenciadas pelos autores nas aulas teóricas e de laboratório computacional na solução analítica e numérica do escoamento de um fluido em um tanque, isto é, em um processo de engenharia. No problema proposto são empregados conceitos da equação da conservação da massa, presente em processos químicos, e conceitos matemáticos envolvendo: métodos numéricos e analíticos de integração, de resolução de equações diferenciais ordinárias, obtenção de zeros, máximos e mínimos de funções.

O problema proposto é representado por um tanque com forma cilíndrica e seção transversal constante A , que armazena um fluido incompressível. Há uma alimentação constante de fluido neste tanque. A corrente de saída do tanque tem uma vazão que depende do tempo e da altura de fluido no tanque. Desta forma, o nível de fluido no tanque não é constante e deseja-se obter como é seu comportamento em função do tempo. A partir deste problema real, será necessário resolver uma equação diferencial analiticamente e comparar esta solução com a solução obtida por métodos numéricos, tais como Euler e Runge-Kutta. A solução analítica encontrada tem um valor cuja altura é mínima, sendo que este valor pode ser obtido aplicando-se a teoria de máximos e mínimos de uma função. Um outro procedimento desenvolvido é a obtenção do tempo necessário para que determinada altura seja alcançada, sendo que neste caso é necessário aplicar os conceitos de zeros de funções e utilizar métodos numéricos tais como Newton-Raphson, biseção etc. (

O presente trabalho é organizado da seguinte forma, nesta seção fez-se uma breve introdução, na seção 2 apresenta-se a descrição da modelagem de um tanque de armazenamento de fluido. Na seção 3 são apresentados os resultados obtidos analiticamente e numericamente com o auxílio do Matlab e Excel e a análise dos mesmos.

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O processo de ensino-aprendizagem deve estar em constante atualização. São inúmeras as alternativas, isto é, possibilidades para que isto ocorra, contudo o professor e aluno têm papel fundamental neste processo. Cabe a ambos buscarem novos problemas para que as aulas sejam mais dinâmicas e aplicadas. Com este objetivo nas disciplinas de Matemática Aplicada à Engenharia Química I e II na Pontifícia Universidade Católica do Paraná são apresentadas várias aplicações aos alunos envolvendo os conteúdos da disciplina. A presente seção descreve uma destas aplicações e apresenta a solução numérica obtida através da utilização do Matlab e Excel, em aulas de laboratório computacional. Este artigo enfatiza a importância das aplicações, se preparadas convenientemente são um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento (PENNY e LINDFIELD, 1999).

O problema consiste em um tanque de armazenamento de um fluido, que tem forma cilíndrica e área de seção transversal A ($= 15 \text{ m}^2$). Há uma alimentação constante de fluido neste tanque de vazão volumétrica F_e (m^3/min). A corrente de saída do tanque tem uma vazão volumétrica F_s (m^3/min) que depende do tempo e da altura de fluido no tanque, conforme “equação (1)”, onde c_v ($= 0,2$) é uma característica da válvula da corrente de saída, fornecida pelo fabricante e B ($= 0,04$) e k ($= 1$) são constantes. O fluido de densidade ρ (kg/m^3) pode ser considerado incompressível. O nível inicial de fluido no tanque é $2,0 \text{ m}$.

Como a vazão de saída não é constante, o nível de fluido no tanque também não é constante e desta forma, deseja-se obter como é seu comportamento em função do tempo,

$$F_s = F_e + k + c_v h - Bt. \quad (1)$$

A modelagem matemática, em um primeiro momento, consiste em fazer o balanço de massa da “equação (1)”, ou seja, a massa que sai é igual a massa que entra menos o acúmulo mais o que reage. Como não há reação então esta componente é nula. Logo a massa que sai é igual a massa que entra menos o acúmulo. Substituindo as variáveis na “equação (1)” tem-se

$$\rho.F_s = \rho.F_e - \frac{dm}{dt}, \quad (2)$$

o acúmulo é representado matematicamente como a variação de massa por variação de tempo, como o fluido é incompressível então a densidade é constante, levando em consideração que o tanque possui seção uniforme, então

$$V = Ah, \quad (3)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho.V)}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{d\rho}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}, \quad (5)$$

substituindo a “equação (5)” na “equação (2)” tem-se

$$\rho.F_s = \rho.F_e - \rho.A \frac{dh}{dt}, \quad (6)$$

e portanto, dividindo a equação (6) por $\rho \neq 0$,

$$F_s = F_e - A \frac{dh}{dt}. \quad (7)$$

Substituindo F_s na “equação (7)” tem-se

$$F_e + k + c_v h - Bt = F_e - A \frac{dh}{dt}. \quad (8)$$

Organizando a “equação (8)” vem

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-k + Bt - c_v h}{A}. \quad (9)$$

A condição inicial, para o tempo inicial é $h(0) = h_0$.

A “equação (9)” pode ser resolvida analiticamente e por métodos numéricos, como Euler e Runge-Kutta, o que será descrito a seguir.

2.1 Solução analítica

A “equação (9)” pode ser organizada de outra forma, tornando-a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem,

$$\frac{dh}{dt} + \frac{c_v}{A} h = \frac{Bt - k}{A}, \quad (10)$$

cuja solução analítica é,

$$h = e^{-\int \frac{c_v}{A} dt} \left[\int e^{\int \frac{c_v}{A} dt} \left(\frac{Bt - k}{A} \right) dt + c \right], \quad (11)$$

onde c é uma constante de integração. Desenvolvendo a “equação (11)” tem-se,

$$h = e^{-\frac{c_v t}{A}} \left[\frac{B}{A} \int e^{\frac{c_v t}{A}} t dt - \frac{k}{A} \int e^{\frac{c_v t}{A}} dt + c \right]. \quad (12)$$

A primeira integral da “equação (12)” deve ser resolvida por partes. A solução da equação é dada por,

$$h = e^{-\frac{c_v t}{A}} \left[\frac{B}{A} \left(\frac{tA}{c_v} e^{\frac{c_v t}{A}} - \left(\frac{A}{c_v} \right)^2 e^{\frac{c_v t}{A}} \right) - \frac{k}{c_v} e^{\frac{c_v t}{A}} + c \right], \quad (13)$$

$$h = \frac{Bt}{c_v} - \frac{BA}{c_v^2} - \frac{k}{c_v} + ce^{-\frac{c_v t}{A}}. \quad (14)$$

Substituindo a condição inicial $h(0) = h_0$ na “equação (14)” tem-se

$$c = h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v}. \quad (15)$$

Substituindo o valor obtido para a constante c na “equação (15)” vem

$$h = \frac{Bt}{c_v} - \frac{BA}{c_v^2} - \frac{k}{c_v} + \left(h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v} \right) e^{-\frac{c_v t}{A}}. \quad (16)$$

A “equação (16)” fornece a altura de fluido no tanque em função do tempo.

2.2 Solução numérica

As equações diferenciais como a “equação (17)” com uma condição inicial podem ser resolvidas por métodos numéricos como Euler, “equação (18)”, ou método Runge-Kutta de quarta ordem, “equação (19)” (RUGGIERO e LOPES, 1996),

$$\frac{dh}{dt} = f(t, h); h(t_0) = h_0, \tag{17}$$

$$h_{n+1} = h_n + Lf(t_n, h_n), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 h_{n+1} &= h_n + \frac{L}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}) \\
 k_{n1} &= f(t_n, h_n) \\
 k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{L}{2}, h_n + \frac{1}{2}Lk_{n1}\right) \\
 k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{L}{2}, h_n + \frac{1}{2}Lk_{n2}\right) \\
 k_{n4} &= f(t_n + L, h_n + Lk_{n3})
 \end{aligned} \tag{19}$$

onde L é o incremento dado na variável independente $L = t_{n+1} - t_n$.

3. DISCUSSÃO E RESULTADOS

Os métodos foram implementados no programa Excel e Matlab. Na “Tabela 1” são apresentados alguns valores da altura obtida analiticamente (h analítico) e numericamente pelos métodos de Euler (h Euler) e Runge-Kutta (h RK). São apresentados também os erros de cada um dos métodos numéricos.

Tabela 1 – Altura em função do tempo obtida analiticamente e pelos métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta com passo 2,5.

| Tempo | h analítico | h Euler | h RK | erro Euler | erro RK |
|-------|-------------|----------|----------|------------|-----------------------|
| 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2,5 | 1,778754 | 1,766667 | 1,778754 | 0,012088 | $7,5 \cdot 10^{-09}$ |
| 5 | 1,581154 | 1,557778 | 1,581154 | 0,023376 | $1,45 \cdot 10^{-08}$ |
| 7,5 | 1,406423 | 1,372519 | 1,406423 | 0,033905 | $2,11 \cdot 10^{-08}$ |
| 10 | 1,253813 | 1,210101 | 1,253813 | 0,043712 | $2,72 \cdot 10^{-08}$ |
| 12,5 | 1,122598 | 1,069765 | 1,122598 | 0,052833 | $3,28 \cdot 10^{-08}$ |
| 15 | 1,012077 | 0,950772 | 1,012077 | 0,061304 | $3,81 \cdot 10^{-08}$ |
| 17,5 | 0,92157 | 0,852413 | 0,921571 | 0,069157 | $4,3 \cdot 10^{-08}$ |
| 20 | 0,850423 | 0,774 | 0,850423 | 0,076424 | $4,75 \cdot 10^{-08}$ |
| 22,5 | 0,798001 | 0,714866 | 0,798001 | 0,083135 | $5,17 \cdot 10^{-08}$ |
| 25 | 0,763689 | 0,674371 | 0,763689 | 0,089318 | $5,56 \cdot 10^{-08}$ |
| 27,5 | 0,746894 | 0,651892 | 0,746894 | 0,095002 | $5,91 \cdot 10^{-08}$ |
| 30 | 0,747041 | 0,646829 | 0,747041 | 0,100212 | $6,24 \cdot 10^{-08}$ |

Tabela 2 – Altura em função do tempo obtida analiticamente e pelos métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta com passo 1,25.

| Tempo | h analítico | h Euler | h RK | erro Euler | erro RK |
|-------|-------------|----------|----------|------------|-----------------------|
| 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1,25 | 1,886372 | 1,883333 | 1,886372 | 0,003039 | $2,35 \cdot 10^{-10}$ |
| 2,5 | 1,778754 | 1,772778 | 1,778754 | 0,005976 | $4,62 \cdot 10^{-10}$ |
| 3,75 | 1,677047 | 1,668231 | 1,677047 | 0,008816 | $6,82 \cdot 10^{-10}$ |
| 5 | 1,581154 | 1,569594 | 1,581154 | 0,011559 | $8,95 \cdot 10^{-10}$ |
| 6,25 | 1,490977 | 1,476768 | 1,490977 | 0,014209 | $1,1 \cdot 10^{-09}$ |
| 7,5 | 1,406423 | 1,389655 | 1,406423 | 0,016768 | $1,3 \cdot 10^{-09}$ |
| 8,75 | 1,327399 | 1,308161 | 1,327399 | 0,019238 | $1,49 \cdot 10^{-09}$ |
| 10 | 1,253813 | 1,232191 | 1,253813 | 0,021622 | $1,67 \cdot 10^{-09}$ |

Na “Tabela 1” para o tempo de 10 minutos, por exemplo, o método de Euler apresentou um erro de $4,4 \cdot 10^{-2}$, enquanto que o método de Runge-Kutta apresentou um erro de $2,7 \cdot 10^{-8}$. Observa-se que o método de Runge-Kutta é mais elaborado, no entanto, apresentou um erro sensivelmente menor, mostrando a eficiência deste método para o passo de 2,5.

As “Tabelas 1 e 2” apresentam os resultados para os passos 1,25 e 2,5; respectivamente. Comparando-as nota-se que para um tempo de 10 minutos o erro encontrado pelo Método de Euler foi de $2,16 \cdot 10^{-2}$ no passo menor e de $4,37 \cdot 10^{-2}$ para o passo maior, logo quanto menor o passo menor o erro. No Excel uma vez implementados os métodos é simples obter resultados com maior precisão, bastando para isto trabalhar com um pequeno passo. A mesma análise em relação ao passo se observa para o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

O perfil de altura em função do tempo obtido analiticamente na “equação (16)” é apresentado na “Figura 1”. Como pode-se observar este perfil passa por uma altura mínima.

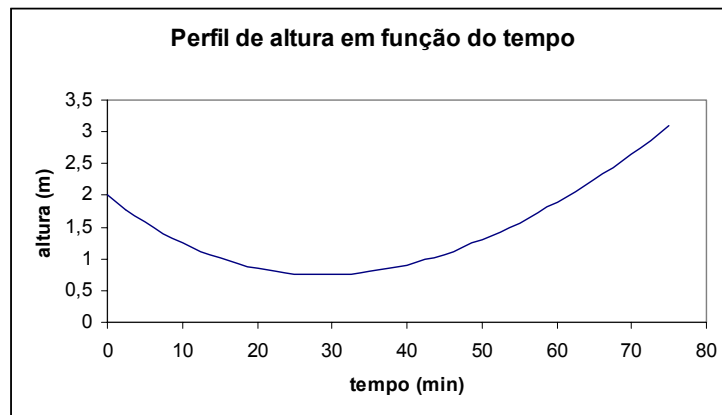


Figure 1 – Perfil de altura de fluido no tanque em função do tempo

A próxima questão é saber em que tempo isso ocorre e qual é a altura correspondente. Para se obter isto matematicamente, é necessário derivar a solução analítica, “equação (16)”, em relação ao tempo e igualar a zero. O valor encontrado será o tempo em que a altura de fluido atinge valor mínimo. Para obter esta altura basta substituir este tempo na “equação (16)”, logo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{B}{c_v} + \left(h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v} \right) e^{\left(\frac{-c_v t}{A} \right)} \left(\frac{-c_v}{A} \right) = 0. \quad (20)$$

Isolando o tempo t na “equação (20)” obtém-se

$$t = -\frac{A}{c_v} \ln \left(\frac{\frac{BA}{c_v^2}}{h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v}} \right), \quad (21)$$

Na “equação (21)” todos os parâmetros são conhecidos, substituindo-os, obtém-se um tempo de 28,7244 minutos. Este é o tempo de mínimo da função apresentada na “Figura 1” e a altura correspondente a esse tempo é de 0,744884 m.

Outra questão estabelecida é em quanto tempo o nível do tanque atingirá a capacidade máxima permitida (h_{\max}), que corresponde a uma altura de 3,0 m. Como a “equação (16)” não é explícita em t , é necessário utilizar um dos métodos numéricos de obtenção de zeros de funções para se obter o tempo, onde a altura é 3,0 m.

$$f(t) = \frac{Bt}{c_v} - \frac{BA}{c_v^2} - \frac{k}{c_v} + \left(h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v} \right) e^{\frac{-c_v t}{A}} - h_{\max} \quad (22)$$

A raiz da “equação (22)” pode ser obtida por diversos métodos numéricos, entre os quais o método de Newton-Rhapon (FAIRES e BURDEN, 2000),

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \quad (23)$$

Substituindo a “equação (23)” na “equação (24)” tem-se,

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\left(\frac{Bt_n}{c_v} - \frac{BA}{c_v^2} - \frac{k}{c_v} + \left(h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v} \right) e^{\left(\frac{-c_v t_n}{A} \right)} - h_{\max} \right)}{\frac{b}{c_v} + \left(-\frac{c_v}{A} \right) \left(h_0 + \frac{BA}{c_v^2} + \frac{k}{c_v} \right) e^{\left(\frac{-c_v t_n}{A} \right)}} \quad (24)$$

O método de Newton-Rhapon foi implementado no Excel e Matlab, com uma estimativa inicial, $t_0 = 70$ minutos. Na área de engenharia química este método é bastante eficaz, uma vez que os problemas reais da área normalmente apresentam funções que atendem aos requisitos deste método numérico. É um método iterativo que mostrou uma convergência bastante rápida para a solução, sendo necessárias apenas três iterações para se obter um erro da ordem de $2 \cdot 10^{-10}$, conforme descrito na “Tabela 3”. O tempo para atingir a altura de 3,0 m foi de 73,978 minutos.

Tabela 3 – Método de Newton-Rhapson.

| k | t_k | t_{k+1} | Erro |
|---|----------|-----------|----------|
| 0 | 70 | 74,11939 | 4,119393 |
| 1 | 74,11939 | 73,97829 | 0,1411 |
| 2 | 73,97829 | 73,97813 | 0,00016 |
| 3 | 73,97813 | 73,97813 | 2,06E-10 |
| 4 | 73,97813 | 73,97813 | 1,42E-14 |
| 5 | 73,97813 | 73,97813 | 1,42E-14 |
| 6 | 73,97813 | 73,97813 | 1,42E-14 |

Para encontrar a solução da “equação (22)”, outros métodos podem ser aplicados, tais como o método da bisseção. Para este método numérico, é necessário um intervalo $[a, b]$ no qual deve haver pelo menos uma raiz real. Tomou-se como intervalo inicial $[70,75]$ porque neste intervalo há pelo menos uma raiz real. Os resultados estão apresentados na “Tabela 4”. O valor de t_k é a média aritmética entre a e b. Constata-se que para chegar-se a um erro menor que 1.10^{-4} foram necessárias 16 iterações, mostrando que o método de Newton-Raphson foi mais eficiente na obtenção do zero da função.

Tabela 4 – Método da Bisseção

| k | a | b | t_k | f(a) | f(b) | f(t_k) | f(a).f(t_k) | erro |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|------------|-----------------|----------|
| 0 | 70 | 75 | 72,5 | -0,3487 | 0,093348 | -0,13233 | 0,046143 | 5 |
| 1 | 72,5 | 75 | 73,75 | -0,13233 | 0,093348 | -0,02063 | 0,00273 | 2,5 |
| 2 | 73,75 | 75 | 74,375 | -0,02063 | 0,093348 | 0,036074 | -0,00074 | 1,25 |
| 3 | 73,75 | 74,375 | 74,0625 | -0,02063 | 0,036074 | 0,007649 | -0,00016 | 0,625 |
| 4 | 73,75 | 74,0625 | 73,90625 | -0,02063 | 0,007649 | -0,00651 | 0,000134 | 0,3125 |
| 5 | 73,90625 | 74,0625 | 73,98438 | -0,00651 | 0,007649 | 0,000566 | -3,7E-06 | 0,15625 |
| 6 | 73,90625 | 73,98438 | 73,94531 | -0,00651 | 0,000566 | -0,00297 | 1,94E-05 | 0,078125 |
| 7 | 73,94531 | 73,98438 | 73,96484 | -0,00297 | 0,000566 | -0,0012 | 3,58E-06 | 0,039063 |
| 8 | 73,96484 | 73,98438 | 73,97461 | -0,0012 | 0,000566 | -0,00032 | 3,84E-07 | 0,019531 |
| 9 | 73,97461 | 73,98438 | 73,97949 | -0,00032 | 0,000566 | 0,000123 | -3,9E-08 | 0,009766 |
| 10 | 73,97461 | 73,97949 | 73,97705 | -0,00032 | 0,000123 | -9,8E-05 | 3,13E-08 | 0,004883 |
| 11 | 73,97705 | 73,97949 | 73,97827 | -9,8E-05 | 0,000123 | 1,25E-05 | -1,2E-09 | 0,002441 |
| 12 | 73,97705 | 73,97827 | 73,97766 | -9,8E-05 | 1,25E-05 | -4,3E-05 | 4,2E-09 | 0,001221 |
| 13 | 73,97766 | 73,97827 | 73,97797 | -4,3E-05 | 1,25E-05 | -1,5E-05 | 6,49E-10 | 0,00061 |
| 14 | 73,97797 | 73,97827 | 73,97812 | -1,5E-05 | 1,25E-05 | -1,3E-06 | 2,02E-11 | 0,000305 |
| 15 | 73,97812 | 73,97827 | 73,9782 | -1,3E-06 | 1,25E-05 | 5,58E-06 | -7,4E-12 | 0,000153 |
| 16 | 73,97812 | 73,9782 | 73,97816 | -1,3E-06 | 5,58E-06 | 2,12E-06 | -2,8E-12 | 7,63E-05 |
| 17 | 73,97812 | 73,97816 | 73,97814 | -1,3E-06 | 2,12E-06 | 3,94E-07 | -5,3E-13 | 3,81E-05 |
| 18 | 73,97812 | 73,97814 | 73,97813 | -1,3E-06 | 3,94E-07 | -4,7E-07 | 6,27E-13 | 1,91E-05 |

4. CONCLUSÕES

Os sistemas de computação algébrica e simbólica estão sendo cada vez mais utilizados para resolver problemas nas áreas de engenharia, devido à característica de combinar diferentes ferramentas em um único *software*. Entre estes aplicativos está o Matlab que é um ambiente computacional integrado de modelagem de sistemas e configuração apropriada e robusta de algoritmos. Além disso, o Matlab pode ser usado eficientemente para a implementação de projetos complexos, e por esta razão é adotado como ferramenta padrão em várias universidades.



Este trabalho mostrou que os diferentes conceitos matemáticos aprendidos em diferentes disciplinas de Cálculo em um curso de Engenharia estão interligados e podem ser aplicados na solução analítica ou numérica de um mesmo problema. Na solução da equação diferencial os resultados analíticos e numéricos mostraram-se adequados, sendo que o método Runge-Kutta de quarta ordem foi o que mais se aproximou do resultado analítico. Na obtenção do tempo máximo para atingir a altura de 3,0 metros no tanque cilíndrico o método de Newton foi superior ao método da bisseção, obtendo a convergência com menos iterações e mais rápido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, A J., RODRIGUES, S. e LONA BATISTA, L. M. F. Utilização de Pacotes Computacionais como Apoio Didático ao Ensino de Engenharia Química. In: XIII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA QUÍMICA, Águas de São Pedro. **Anais**, 2000.

BALACHEFF, N., Kaput, J. **Computer-Based Learning Environments in Mathematics**. In: Bishop A. (ed.) International Handbook in Mathematics Education. p. 469-501, 1997.

CUTLIP, M. B., SHACHAN, M. **Problem Solving in Chemical Engineering with Numerical Methods**, Editora Prentice Hall, 1999.

FAIRES, J. D.; BURDEN, R. L. **Numerical Analysis**, 7^a ed., Editora Brooks/Cole Pub Co, 2000.

HEBENSTREINT, J. **Simulation e Pédagogie, une Rencontre du Troisième Type**, Gif Sur Yvette: École Supérieure d'Électricité, 1987.

PENNY, J., LINDFIELD, G. R. **Numerical Methods Using Matlab**, 2^a ed., Editora Prentice Hall, 1999.

RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, Rio de Janeiro, Makron, 2^a. ed., 1996.

VAN NESS, H. C., ABBOTT, M. e SMITH, J. M. **Introdução à Termodinâmica da Engenharia Química**, Livros Técnicos e Científicos, 2000.

MATHEMATICAL MODELING OF A STORAGE TANK

***Abstract:** The discipline of Mathematics Applied to Chemical Engineering I and II given in the Chemical Engineering course at the Pontifical Catholic University of Parana (PUCPR) focus the contents study of the Numerical Calculus. With the objective of improve the lessons and propitiate to the undergraduate students several practical applications, the lessons of computational laboratory had been introduced using Matlab and Excel computational environments for the problems solution. The main idea of this work is to explain the experience lived by authors of this paper when presenting the mathematical modeling and numerical solution of a storage tank of a fluid for the students using Matlab and Excel.*



Comissão Editorial

Key-words: *Numerical calculus, Matlab, computational laboratory, storage tank of a fluid.*