

SOBRE O PRINCÍPIO D'ALEMBERT

Carvalho M.O. M. – e.mail: molavo@unb.br

Universidade de Brasília – UnB

Departamento de Engenharia Mecânica / FT

70910-900 - Brasília / DF - Brasil

CEP – 70910-900 – Brasília - DF

Resumo: *A abordagem didática feita do Princípio de D'Alembert no ensino de Engenharia, por grande parte dos livros texto de Mecânica, é freqüentemente equivocada, inadequada ou confusa. O presente trabalho busca rever a abordagem de D'Alembert como conceito essencial para o bom entendimento dos fundamentos da Mecânica. A interpretação apresentada nesse trabalho tem implicações fortes sobre a conceituação de Referencial Inercial, de Força de Inércia e de Força de Campo, possibilitando uma "releitura" de diversos problemas da Mecânica. A abordagem feita, busca ser didática, evitando conflitos filosóficos e ampliando as formas de se interpretar determinados problemas em Dinâmica, sem a incômoda necessidade do arbítrio de um referencial privilegiado: o Referencial Astronômico, impropriamente denominado de Inercial ou Absoluto.*

Palavras-chave: *Ensino de Mecânica, Dinâmica, Força de Inércia, Referencial Absoluto.*

Sub-Tema: Ciências Básicas e Engenharia.

1. INTRODUÇÃO

A Dinâmica é um dos ramos da Mecânica que trata do movimento dos corpos sob a ação de forças. No ensino de engenharia esse é um tema fundamental para a boa formação do engenheiro. O estudo da Dinâmica se sucede ao da Estática que considera os corpos em repouso. A Dinâmica se ramifica ainda em duas partes distintas: a Cinemática que estuda os movimentos dos corpos e a Cinética que relaciona esse movimento com suas causas. Historicamente os primeiros estudos sobre esse tema remontam a Galileu (1564-1642) com seus importantes trabalhos sobre os corpos em queda livre. Isaac Newton (1642-1727) apresentou uma formulação precisa das pesquisas de Galileu publicada em 1687 no seu famoso artigo intitulado "Principia" que é, reconhecidamente, um marco no desenvolvimento da Ciência.

O perfeito entendimento dos conceitos envolvidos em Dinâmica é essencial para a formação do engenheiro e o currículo dos cursos de engenharia deveria abordar o tema de forma clara e inequívoca. Embora exista no currículo das escolas de engenharia uma disciplina específica para tratar desse assunto, sob a denominação de Mecânica Racional, Dinâmica ou simplesmente Mecânica, infelizmente a maior parte dos livros-texto sobre o tema incorrem em uma abordagem equivocada, inadequada ou confusa.

O Princípio de D'Alembert, em particular, juntamente com a Segunda Lei de Newton, constitui um dos pilares fundamentais da Mecânica, de cuja compreensão trata esse artigo.

2. A SEGUNDA LEI DE NEWTON

Para uma partícula material, essa lei bastante conhecida postula a igualdade entre a taxa de variação do Momento Linear com o tempo $\frac{d \vec{p}}{dt}$ e a força resultante \vec{F} que atua sobre uma partícula material.

$$\vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt} \quad (1)$$

Essa equação é frequentemente apresentada em uma forma particular, muito adequada para aplicação em Mecânica Clássica, quando as velocidades habituais são muito menores que a da luz, permitindo que os efeitos relativísticos devido à variação da massa com a velocidade possam ser desprezados sem maiores implicações.

Assim, lembrando que o Momento Linear \vec{p} de uma partícula de massa m pode ser escrito como $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ e assumindo m como independente do tempo a equação nos leva a: $\vec{F} = m \frac{d \vec{v}}{dt}$ Ou ainda, na sua forma mais popular, a:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Essa lei cuja verificação é inteiramente experimental é intuitiva e, conforme sabemos, fundamenta grande parte dos desenvolvimentos da engenharia.

3. REFERENCIAL NEWTONIANO

Os estudos da Cinemática mostram que, a aceleração é uma grandeza vetorial, precisa estar referida a um sistema de coordenadas e, portanto, a um referencial. Se mudarmos o referencial do qual observamos a aceleração esta poderá também mudar. Nos deparamos, então com o paradoxo: Como manter a validade da equação (2) se, alterando o referencial, modificamos apenas o segundo membro da mesma?

A resposta é que, da forma como Newton formulou a sua Segunda Lei, se fazia necessário referir todas as acelerações ao mesmo referencial. Postulou-se assim a existência de um Referencial Absoluto ou Referencial Astronômico. Esse referencial, também denominado por Referencial Newtoniano, estaria ligado a um **Sistema Inercial Primário** que seria um referencial privilegiado, “fixo” no espaço. A rigor, a Segunda Lei de Newton, da forma como foi formulada originalmente, só vale para ele. E, como sugerem impropriamente alguns livros-texto, para a Terra que, por uma coincidência bastante suspeita, tem uma aceleração muito pequena em relação àquele.

É pouco provável que o estudante de engenharia perspicaz passe por essas explicações sem se sentir desconfortável, ou ao menos se perguntar: O que se quer dizer com “fixo no espaço”?!

A interpretação adequada do Princípio de D’Alembert fornece os elementos para responder a essas perguntas.

4. A NATUREZA DAS FORÇAS

Embora o mecanismo segundo o qual uma força se manifesta à distância seja ainda mal compreendido e objeto de pesquisas, podemos classificar as forças por sua natureza em dois grandes grupos:

- Forças de campo, também chamadas forças de corpo ou forças de ação à distância. Essas forças atuam sobre toda a massa de um corpo, isto é, sobre cada partícula que o constitui.

- Forças de contato, de superfície ou de ação a curta distância. Essas forças atuam sobre a superfície de um corpo de forma distribuída.

A Segunda Lei de Newton se aplica à resultante de todas as forças dos dois grupos acima mencionados, indistintamente de sua natureza.

4.1. A experiência de Einstein com o elevador

Com o brilhantismo que lhe era peculiar Albert Einstein (1879-1955) descreve a sua “experiência hipotética” com um elevador da seguinte forma:

Suponha que estejamos na Terra em um elevador parado sobre o solo. De dentro dele, fechado, sem ter acesso ao meio exterior, fazemos uma bateria de experimentos: Subimos em uma balança, balançamos um pêndulo, penduramos um Fio de Prumo, deixamos um corpo cair e medimos a pressão a certa profundidade em um fluido. Registrados os resultados, levamos esse elevador para longe do campo gravitacional da Terra e impomos a ele uma aceleração “vertical”, isto é no sentido do piso para o teto do elevador. Se essa aceleração tiver o valor de g (aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$), ao repetirmos a bateria de experimentos realizados na Terra, encontraremos exatamente os mesmos resultados. Em outras palavras, de dentro do elevador não temos como distinguir se estamos em uma situação ou na outra.

A força de campo sentida pelo observador do elevador na experiência realizada longe da Terra é denominada Força de Inércia. A hipótese formulada por Einstein foi de que as forças de campo (no caso gravitacional) bem como as forças de inércia responsáveis pela experiência longe da Terra, têm a mesma natureza e são, portanto, indistintas.

Figura 1 A Experiência do elevador de Einstein

A conclusão mais impressionante da experiência, no entanto, acontece quando se acrescenta à bateria de experimentos mencionada anteriormente, a observação de um feixe de luz se propagando de uma parede à outra do elevador. Na Terra seríamos induzidos a dizer que o feixe se desloca em linha reta na horizontal. No entanto no espaço, durante o ínfimo espaço de tempo que dura o transcurso de uma parede à outra, o elevador acelerado na “vertical” se moveria e, portanto, o feixe de luz tocaria a parede oposta numa altura ligeiramente superior.

A conclusão foi que, se as forças são de mesma natureza, a luz deveria ser curva. Isto é, a luz deveria seguir uma trajetória curva. Tal desvio da trajetória poderia ser medido de um feixe de luz que viajaria próximo a uma estrela (o sol). Por essas razões, Einstein denominou esse resultado de força fictícia para refutar a denominação de força atribuída por alguns autores para a Força de Inércia, ERDMAN (1991) e BEER (1999).

4.2. A Força de Inércia

Como decorrência do modelo proposto por Einstein, podemos afirmar que fenômenos observados de referenciais situados na mesma posição e no mesmo instante e que tenham acelerações distintas estarão sujeitos a forças de campo distintas. A Força de Inércia nada mais é do que a diferença entre as forças de campo sentidas em dois referenciais distintos situados na mesma posição, devida à aceleração relativa entre os mesmos.

Como decorrência, qualquer referencial pode, arbitrariamente, ser definido como absoluto ou “Inercial Primário”. Basta para tanto assumir ou arbitrar que as forças de campo observadas dele não se devam a sua aceleração que é assumida como sendo nula. A Força de Inércia para uma tal escolha seria nula e qualquer referencial poderia ser assumido como Inercial, distintamente do que sugerem MERIAM (1997), BEDFORD (1996) e HIBBELER (1999).

Assim, se arbitramos a Terra como sendo um referencial absoluto, ao observarmos um avião decolando na pista, descreveremos a dinâmica de um passageiro da seguinte forma:

A força peso (única Força de Campo existente), somada com a força de contato (reações no assento) é igual à massa do passageiro vezes a aceleração do avião.

Se arbitrarmos o avião como sendo o referencial absoluto, ao observarmos o mesmo passageiro de um assento vizinho, descreveremos a dinâmica deste da seguinte forma: A nova força de campo experimentada por todos a bordo do avião será a força peso (sentida por observadores externos ao avião), somada à Força de Inércia (sentida apenas pelos passageiros do avião). A essa força de campo resultante deve ser adicionada a força de contato de tal forma que para a resultante total possamos aplicar a Segunda Lei de Newton. Essa resultante total será igual à massa do passageiro vezes a aceleração deste em relação ao novo observador também passageiro do avião, isto é, nula.

Tudo se passa para o passageiro, como se ele estivesse em outro planeta onde a força de campo resultante fosse a força gravitacional local. Cabe lembrar que, embora os fenômenos físicos sejam indiferentes ao observador, só temos acesso a eles através de um referencial ao qual estamos atrelados em um determinado ponto do espaço e em um determinado instante. Assim, trazemos conosco, em nossas observações, o vício de sermos observadores particulares.

Essa estratégia de mudar de referencial, de forma a observar um problema dinâmico como sendo de equilíbrio estático, é às vezes confundido como o Princípio de D'Alembert, TOMSON (1978) e ERDMAN (1991), quando seria apenas uma decorrência dele. De qualquer forma podemos identificar aplicações interessantes para esse resultado. Um exemplo interessante é descrito a seguir:

Sabemos da estática que o diagrama de Momento Fletor em uma viga uniforme bi-apoiada de massa m e comprimento L , devido ao seu peso próprio é dado por:

$$M(x) = \frac{m \cdot g \cdot x}{2} \cdot (L - x) \quad (3)$$

A figura 2 mostra esse resultado. O Momento Fletor máximo será então alcançado no meio da viga e dado por:

$$M_{\max} = \frac{m \cdot g \cdot L^2}{8} \quad (4)$$

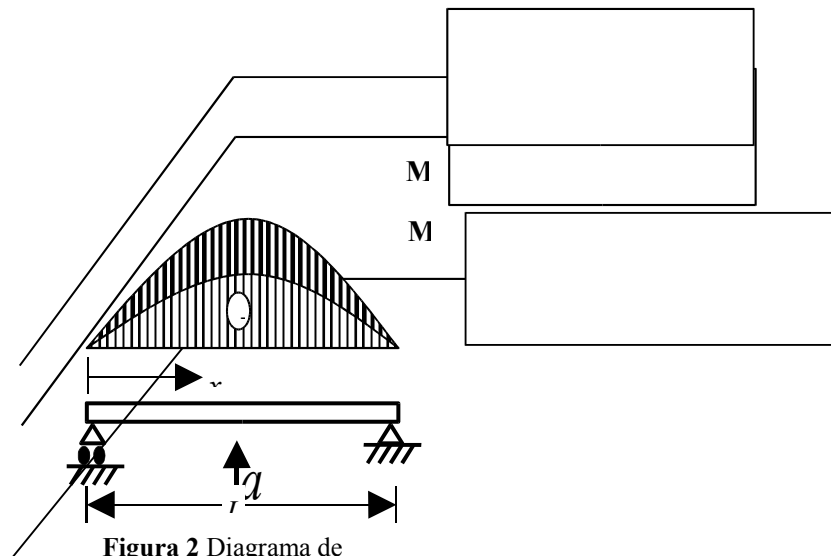


Figura 2 Diagrama de Momento Fletor em uma viga

Podemos assegurar baseado no Princípio de D'Alembert, que se mudarmos o observador para um referencial preso à viga, sujeita a uma aceleração a uniforme para cima na vertical, o novo momento máximo será:

$$M_{\max 2} = \frac{m \cdot (g + a) \cdot L}{8} \quad (5)$$

Esse resultado permite avaliar o Momento Fletor Máximo ocorrido em uma viga se ela sofrer uma aceleração uniforme durante a montagem, por exemplo. Tudo se passa como se o peso da viga observado de um referencial preso a ela fosse P_2 ampliado na proporção:

$$P_2 = P_1 \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (6)$$

Ou seja, tudo se passa como se a viga estivesse em repouso em um outro planeta cuja aceleração da gravidade fosse $(g + a)$.

5. PRINCÍPIO D'ALEMBERT

Diferentemente do que alguns reducionistas afirmam, o Princípio de D'Alembert não se restringe a mudar de membro o termo de aceleração da Segunda Lei de Newton e chamá-lo de Força de Inércia ($\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$). Assim interpretado, o Princípio de D'Alembert transforma um problema de Dinâmica em um outro de Estática através da criação da Força de Inércia simplesmente como o artifício matemático ($\vec{F} - \vec{F}_i = 0$). Por essa razão, alguns autores, equivocadamente denominam a Força de Inércia de força fictícia, SYMON (1990).

A Força de Inércia nada tem de fictícia, conforme afirma STRELKOV (1978). A Força de Inércia tem a mesma natureza da força de campo. E uma vez escolhido um referencial para observação, é virtualmente impossível distingui-las.

5.1. Gravidade na Terra

Tal como no elevador de Einstein, qualquer referencial pode ser considerado absoluto se assumirmos todas as forças de corpo como sendo devidas a um campo. Se considerarmos o planeta Terra como um referencial inercial sujeito apenas a forças de Campo gravitacional P dada pela Lei de Newton da Gravitação Universal, ver equação (7), não conseguiremos explicar, por exemplo, a razão pela qual essa não aponta em direção ao centro da Terra para a latitude de 45° , ver Figura 3.

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_{Terra}}{r^2} \quad (7)$$

Quando penduramos o fio de prumo para erguer uma parede, não nos perguntamos qual a contribuição da Força Gravitacional (atração de massas) e qual a contribuição da Força de Inércia (centrífuga devida à rotação da terra) para que a resultante tenha aquela direção. Chamamos simplesmente a direção do fio de prumo de vertical local, mesmo que não aponte para o centro gravitacional da Terra utilizado pela equação (7).

Da mesma forma, um motorista ao frear seu carro sente, de seu referencial, uma força de campo que o empurra para frente. Todos os demais passageiros do carro sentirão a mesma força de campo que pode, eventualmente, espreme-los de encontro ao cinto de segurança. Certamente, neste caso, os ocupantes do veículo não vão chamar esta força de força fictícia.

Tudo se passa para os passageiros do carro como se ele estivesse em outro planeta onde a força de campo resultante fosse a força gravitacional local. De fato é isso que fazemos aqui em nosso planeta quando dizemos que a força peso é decorrente da atração gravitacional. Em verdade, ela incorpora como força de campo, a Força de Inércia centrífuga da equação (8), devida à rotação da Terra.

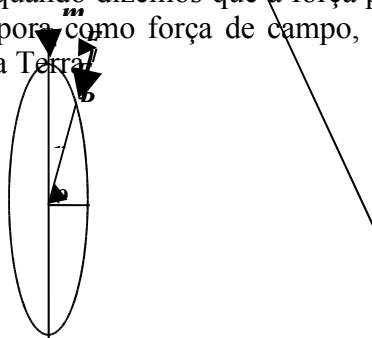


Figura 3 Peso de um corpo na Terra

$$F_i = -m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \quad (8)$$

Não interessa ao pedreiro que levanta uma parede se a força de campo que estica o fio de prumo é devida à atração de massa, ou a uma Força de Inércia, ou ainda a uma mistura das duas. A vertical local considera apenas a resultante das mesmas. Na Figura 3 a força resultante peso é dada por $\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_i$. Como pode ser observada, a resultante não aponta para o centro da Terra em qualquer latitude. Tampouco seu valor é constante.

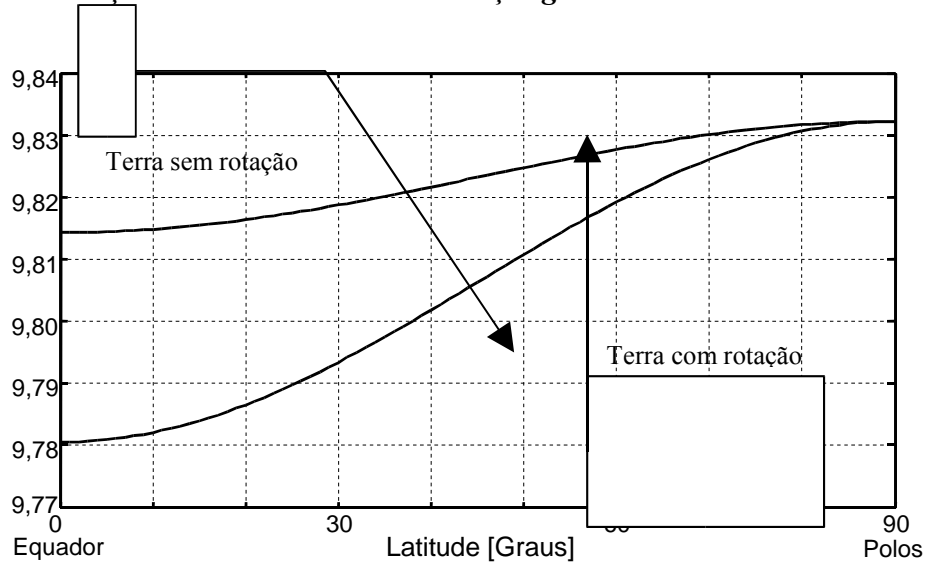
Por essa razão é que, ainda que a terra fosse perfeitamente esférica (ela é um geóide) e homogênea, a relação entre o peso e a massa de um corpo, denominada aceleração da gravidade g , variaria em função da latitude. A Figura 4 apresenta esse resultado para a Terra calculando a variação de g em função da latitude, para duas situações:

- a) Para a Terra sem rotação, isto é, sem o efeito da Força de Inércia centrífuga. Nesse caso podemos atribuir a variação de g exclusivamente à não esfericidade da Terra.
- b) Para a Terra com rotação. Nesse caso, em função da variação do afastamento do eixo de rotação com a latitude e por consequência da Força de Inércia centrífuga devido à rotação da Terra, ocorre uma variação mais acentuada da aceleração g .

6. TRANS

A Força
fenômeno, c
propôs uma
STRELKOV
Tomam
equações (9
distâncias e

$$x_A =$$



$$t_A = t_B - \frac{v \cdot x_B}{c^2} \quad (10)$$

Bem mais tarde essas relações foram questionadas pelo físico e matemático Lorentz (1853 - 1928). As equações (11) e (12), conhecidas como Transformações de Lorentz, foram propostas em substituição, para relacionar medições de grandezas feitas de dois referenciais distintos. As Transformações de Lorentz buscam tornar as equações da Física invariantes na forma em relação aos sistemas de coordenadas e são base para a Teoria da Relatividade de Einstein¹, STRELKOV (1978).

$$x_A = \frac{x_B - v \cdot t_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11)$$

$$t_A = \frac{t_B - \frac{v \cdot x_B}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12)$$

¹ Tal abordagem foge ao escopo deste trabalho.

Quando a velocidade v for nula ou muito pequena comparada à velocidade da luz c , nós recuperamos as Transformações de Galileu, utilizadas na física newtoniana.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado, o Princípio de D'Alembert pode ser reinterpretado de forma a facilitar o entendimento do estudante de engenharia sobre os conceitos básicos utilizados em Mecânica, mais especificamente em Dinâmica.

O Referencial Inercial, Primário ou Astronômico passa a ser dispensável na nova formulação, evitando-se assim a necessidade deste referencial privilegiado no universo para a aplicação das equações de Newton.

A Força de Inércia e a Força de Campo são conceituadas de forma a caracterizá-las como sendo de mesma natureza e, portanto reais e não fictícias.

O Princípio de D'Alembert é definido de forma mais abrangente onde a transformação de um problema de Dinâmica em um outro de Estática é apenas uma das possibilidades de aplicação decorrente do mesmo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BEDFORD, A. and FOWLER, W. **Dynamics - Engineering Mechanics**, England, Addeson – Wesley, 1996.
2. BEER, F.P. e JOHNSTON, E.R.Jr. **Mecânica Vetorial para Engenheiros – Dinâmica**, 5ª edição, Rio de Janeiro: Mc Graw Hill, 1999.
3. ERDMAN, A.G. and SANDOR, G.N. **Mechanism Design – Analysis and Synthesis**, 2ª Edição, USA, Prentice Hall, 1991.
4. HIBBELER, R.C. **Mecânica – Dinâmica**, 8ª edição, Rio de Janeiro: LTC., 1999.
5. MERIAM, J. L. e KRAIGE, L.G. **Dinâmica**, 4ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 1997.
6. STRELKOV, S. **Mecânica**, Moscou, Editora Mir., 1978.
7. SYMON, K.R. **Mecânica**, 2ª Edição, Rio de Janeiro, Ed. Campus Ltda, 1986.
8. TOMSON, W.T. **TEORIA DA VIBRAÇÃO**, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1978.

ABOUT D'ALEMBERT'S PRINCIPLE

Abstract: *The didactic approach presented by most of the books about D'Alembert's Principle in engineering teaching is often misunderstood, not clear or mistaken.*

This work aims to review D'Alembert's Principle, which is an essential concept in the background of Mechanic's teaching. It tackles important concepts, such as Inertial Frames, Inertial Forces and Field Forces, through a didactic approach. That way, some Mechanical problems are reinterpreted avoiding philosophic conflicts and enabling a wider understanding of D'Alembert's Principle. Therefore, concepts of Inertial or Astronomic Frames are unnecessary.

Key-words: *Mechanics Teaching, Dynamics, Inertial Forces, Inertial Frames*