

AMBIENTE DIGITAL PARA DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES ANALÓGICOS

Leandro H.C – leandro.h.c@bol.com.br

Universidade Federal de Juiz de Fora

R. Benjamin Constant, 790 – Centro

36016.400 – Juiz de Fora – MG

Resumo: *Este projeto trata do desenvolvimento de um ambiente computacional que possibilita simular a discretização dos controladores analógicos. O ambiente foi desenvolvido com características interativas, permitindo ao usuário selecionar a função de transferência desejada, escolher o método que vá discretizar esta função e assim poder comparar qual dos métodos será mais eficaz para aquela função de transferência escolhida. Poderão também analisar a aproximação de Equivalentes Discretos de Sistemas Contínuos. Com interface amigável, o ambiente possibilita ao usuário o acompanhamento da forma de onda filtrada, ganho de fase e magnitude, podendo ser utilizado como uma ferramenta didática para alunos de graduação e também no auxílio de projetos de controladores digitais que diretamente controlam os sistemas discretizados.*

Palavras – chave: Novas Técnicas para Educação em Engenharia, Automação e Controle, Modelagem de Processos.

1. INTRODUÇÃO

A enfoque tradicional de se projetar controladores digitais para plantas contínuas é inicialmente, efetuar o projeto de um controlador analógico de um sistema contínuo, efetua – se então uma transformação para o espaço discreto buscando a máxima aproximação entre os dois sistemas.

Este enfoque é particularmente útil quando este estiver substituindo tudo ou parte de um controlador analógico existente com um controlador digital. Porém, até mesmo para intervalos de amostragem reduzidos, o sistema digital é executada normalmente, mas nunca terá o mesmo desempenho do controlador analógico do qual foi derivado.

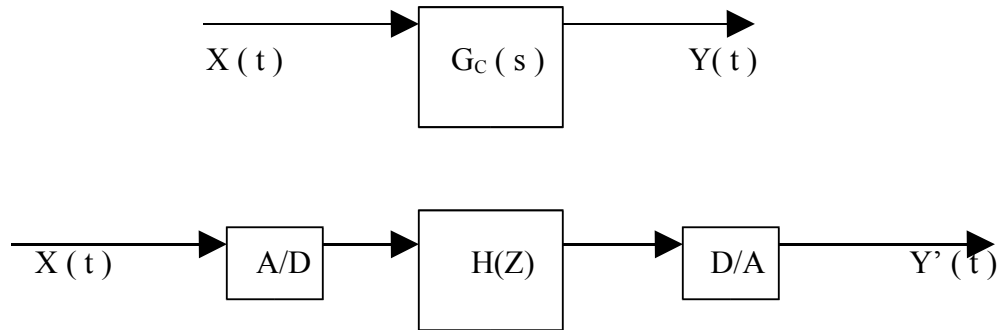
O outro enfoque tradicional de se projetar controladores digitais para plantas contínuas é primeiro derivar um equivalente discreto de uma planta contínua e então projetar diretamente um controlador digital para controlar o sistema discretizado

Atualmente esses controladores analógicos são freqüentemente projetados em sistemas de tempo contínuo, eles geralmente devem ser discretizados para implementação em computadores digitais e processadores embutidos. Logo este artigo irá mostrar alguns dos métodos mais importantes para a discretização desses controladores analógicos.

2. METODOLOGIA

Seja a situação da figura abaixo, onde um compensador digital deve ser projetado, com o mesmo desempenho do controlador analógico, $G_c(s)$. O símbolo “ ’ ” denota valor aproximado.

Figura 1 – Discretizando um Controlador Analógico



O controlador digital consiste em um conversor A/D que ligado a um equivalente discreto descrito pela transformada Z, $[H (Z)]$ seguido por um conversor D/A com sample hold. Logo esta configuração é chamada de FILTRO DIGITAL.

Portanto, dado $G_c (s)$ qual é o correspondente $H(Z)$ tal que a saída do sistema se aproxima a do sistema analógico? Respondendo essa pergunta, existem vários métodos para a discretização dos controladores analógicos e alguns serão apresentados agora.

2.1. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O procedimento, neste caso consiste na conversão da função $G_c (s)$, do controlador analógico, em uma equação diferencial e obter uma aproximação numérica par sua solução mediante integração ou diferenciação.

As três técnicas mais comuns para se obter uma aproximação numérica para sua solução mediante a integração são:

$$\text{para } (k - 1)T < \tau \leq kT$$

1) Euler em avanço: $x(t) \approx x[(K - 1)T] \Rightarrow$ aproxima o integrando pelo valor à esquerda de cada sub - intervalo T, multiplicando - o pelo valor deste sub - intervalo.

2) Euler em atraso: $x(t) \approx x[KT] \Rightarrow$ aproxima o integrando pelo valor à direita de cada sub - intervalo T, multiplicando - o pelo valor deste sub - intervalo.

3) Tustin (Bilinear): $x(t) \approx \frac{1}{2}(x[KT] + x[(K - 1)T]) \Rightarrow$ aproxima o integrando por uma linha reta.

$$\text{Euler em avanço: } y_k = y_{k-1} + Tx_{k-1} \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\text{Euler em atraso: } y_k = y_{k-1} + Tx_k \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Tz}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\text{Tustin (Bilinear): } y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2} [x_{k-1} + x_k] \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{T}{2}(z+1)}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

Verifica – se assim que o equivalente discreto do controlador será obtido substituindo – se “ s “ em $G_c(s)$ por “ z “, ou seja

$$\text{Euler em avanço: } s \simeq \frac{z-1}{T} \Leftrightarrow z \simeq 1 + Ts$$

$$\text{Euler em atraso: } s \simeq \frac{z-1}{Tz} \Leftrightarrow z \simeq \frac{1}{1-Ts}$$

$$\text{Tustin (Bilinear): } s \simeq \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \Leftrightarrow z \simeq \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

2.2. TUSTIN (BILINEAR) COM PRÉ – COMPENSAÇÃO EM FREQUENCIA:

Na maioria das aplicações de controle digital e processamento de sinais é necessário projetar um filtro digital $G(z)$ que aproxime a resposta de seu equivalente analógico $G(s)$ em uma determinada região de frequências

$$\text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

$$G(Z = e^{j\omega T}) \simeq G(s = j\omega)$$

Este método pode ser utilizado com algumas modificações, se a resposta em frequência do filtro digital $G(z)$ deve aproximar a resposta em frequência do controlador analógico $G(s)$, então:

$$(1) \quad G(Z) = G\left(s = \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{2}{T} \text{Tang} \frac{\omega_d T}{2}}$$

onde:

$\omega_c =$ frequência contínua

$\omega_d =$ frequência discreta

Para pequenos valores de ω_d , comparado à frequência $\frac{\pi}{T}$, então

$$j\omega_c \approx j \frac{2}{T} \omega_d \frac{T}{2} = j\omega_d$$

Neste caso o comportamento do filtro discreto se aproxima da resposta em frequência do equivalente contínuo, se a frequência se aproxima da frequência $\frac{\pi}{T}$

$$j\omega_c = j \frac{2}{T} \text{Tang} \frac{\omega_d T}{2} \Rightarrow j \infty$$

e a frequência contínua tende a infinito, tornando – se evidente uma distorção. Contudo, se a transformação bilinear foi aplicada considerando a equação (1) a distorção pode ser reduzida consideravelmente.

Pode corrigir –se a distorção para uma frequência particular ω_c (frequência crítica), assim modificando a aproximação de Tustin deixando – a :

$$S = \frac{w_c}{\text{Tang} w_c T / 2} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

A frequência crítica corrige a aproximação de Tustin automaticamente. Note que como T se põe pequeno esta aproximação chega à aproximação do Tustin regular.

5) Mapeamento de Pólos e Zeros:

Outro método de discretização do controlador é mapear os pólos e zeros da função de transferência analógica $G_c(s)$ aos correspondentes da função digital $H(z)$:

$$S \rightarrow Z = e^{ST}, \text{ assim}$$

$$(s+a) \rightarrow z - e^{-aT}$$

para raízes reais, e

$$(s+a \pm jb) \rightarrow (z - e^{-aT} e^{+2btT})(z - e^{-aT} e^{-2btT})$$

$$(z^2 - 2e^{-aT} \cos bTz + e^{-aT})$$

para raízes complexas.

Portanto polos e zeros no $s = \infty$ do controlador analógico mapeiam polos e zeros finitos em $z = -1$, no equivalente digital. A função de transferência $H(z)$ terá sempre o número de polos igual ao de zeros.

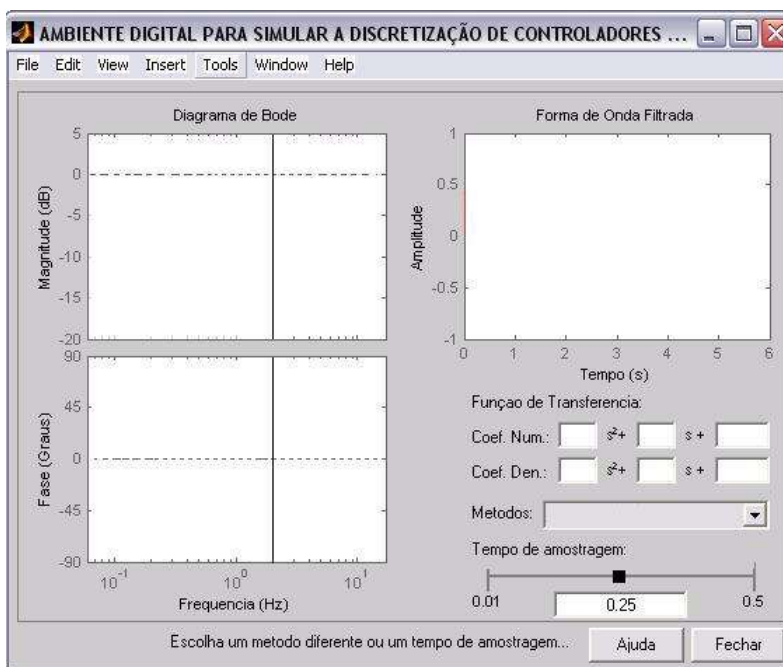
3. AMBIENTE DESENVOLVIDO

O ambiente foi desenvolvido de forma a fornecer uma interface simples, onde o usuário entra com qualquer função de transferência até segunda ordem. Desta forma o usuário pode verificar a influência dos diversos métodos de discretização dos controladores

analógicos e também poderá analisar qual dos métodos será mais eficiente no resultado final, bem como a interação existente entre o modo contínuo e o discreto. O usuário escolhe o método desejado e varia o tempo de amostragem. Uma vez efetuada as alterações no tempo de amostragem o ambiente retorna graficamente a simulação do sistema, aproximando ou afastando o controlador digital do analógico como será mostrado a seguir no item 4.

A figura 2 mostra o ambiente digital desenvolvido, no alto, à esquerda encontra – se o diagrama de Bode, que para modelos de equivalentes discretos com tempo de amostra T_s usa a transformação $Z=e^{j\omega T_s}$. O diagrama mapeia o círculo de raio unitário para o eixo real da frequência. Esta frequência só é plotada se esta for menos que a frequência de Nyquist $\frac{\pi}{T_s}$. Com isso ele especificar a margem de ganho (magnitude em dB) e de fase (graus). A direita encontra – se o gráfico da forma de onda filtrada (discretizada) dos controladores analógicos e abaixo tem os campos para o usuário escolher a função de transferência desejada, escolher qual o método para a discretização (FIRST ORDER, TUSTIN, TUSTIN WITH PREWARPED, MAPEAMENTOS DE POLOS E ZEROS) e também variar o tempo de amostragem para a verificação da discretização dos controladores analógicos.

Figura 2 – Ambiente Digital Desenvolvido



4. RESULTADOS OBTIDOS

Serão mostrados, a seguir, alguns resultados obtidos com a utilização do ambiente.

Determina – se o filtro de segunda ordem $\frac{s^2+s+100}{s^2+5s+100}$ e depois escolhe o método que irá discretizá – la. Foi ajustado um tempo de amostragem em 0,095187s assim pode – se analisar qual dos métodos será mais eficiente na aproximação de equivalentes discretos de sistemas contínuos.

Figura 3

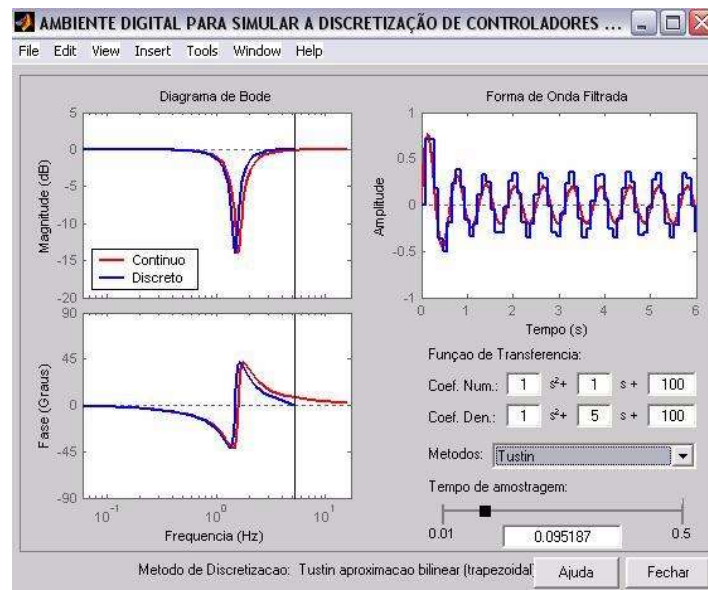
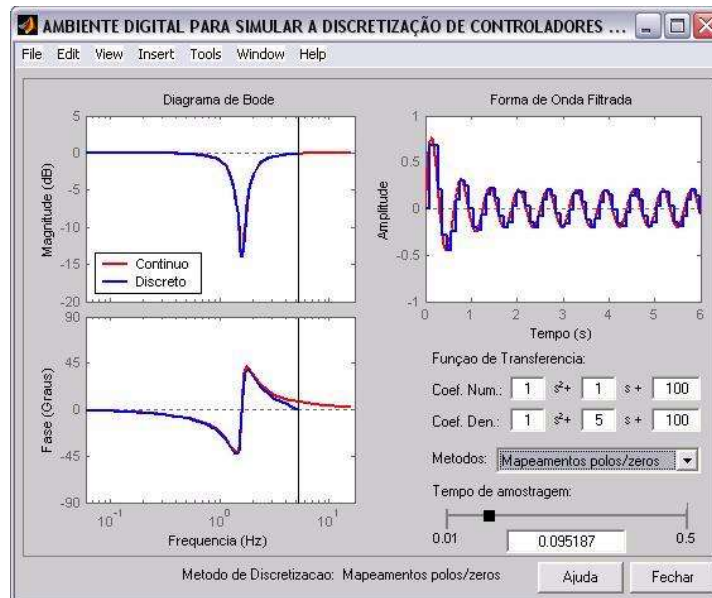


Figura 4



Pode se afirmar que para essa configuração o método de Mapeamento de Pólos e Zeros é melhor do que o de Tustin, aproximando mais do controlador analógico, como visto na figura 3 e 4. Para o mesmo filtro, mas com tempo de amostragem 0,30866 nota – se um péssimo desempenho para ambos os casos, como mostra a figura 5 e 6:

Figura 5

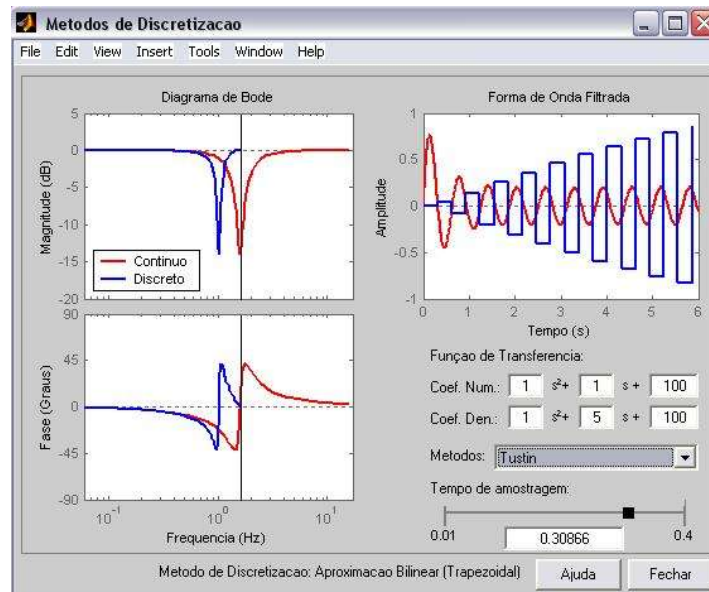
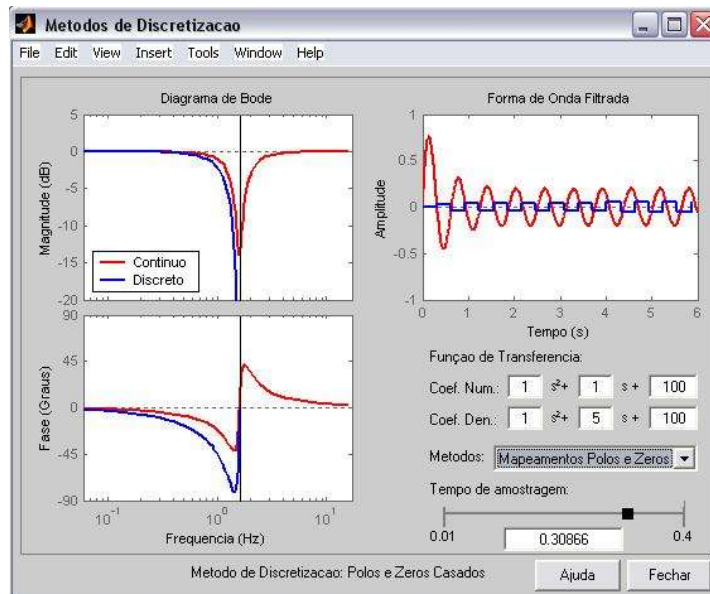


Figura 6



Escolhe – se agora um filtro de primeira ordem $\frac{25}{5s+100}$ e verifica – se a discretização comparando o método de Tustin com o método Tustin with Prewarped, como mostrado na figura 7 e 8.

Figura 7

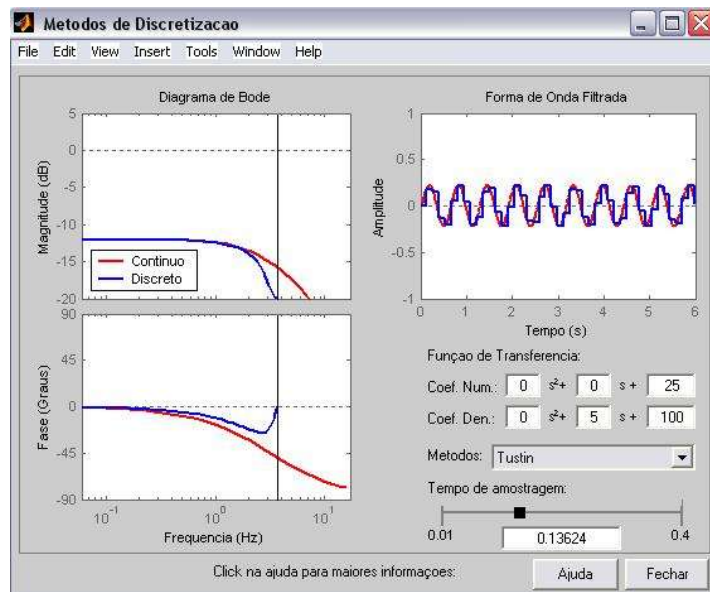
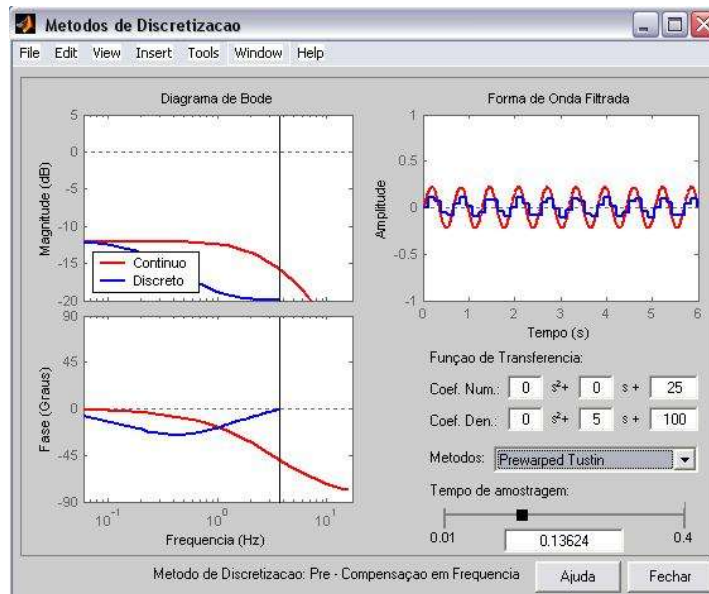


Figura 8



Verifica – se que para este filtro de primeira ordem o método de tustin foi mais eficaz na aproximação do seu equivalente analógico.

Finaliza – se com uma análise de um filtro analógico passa – faixa $\frac{50s}{s^2 + 55s + 100}$ verificando qual será a melhor alternativa discreta para este filtro, que será visto nas figuras 9, 10 e 11.

Figura 9

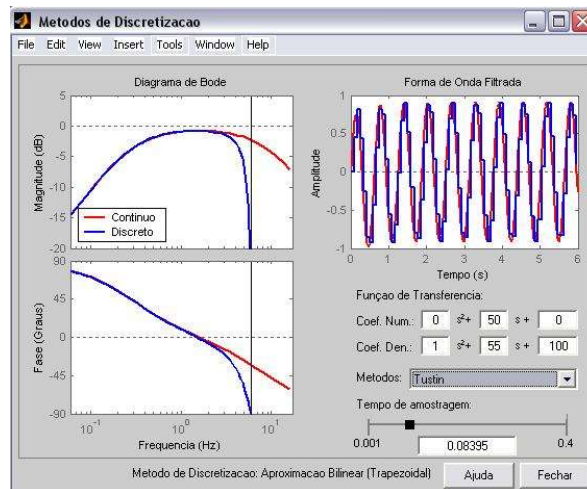


Figura 10

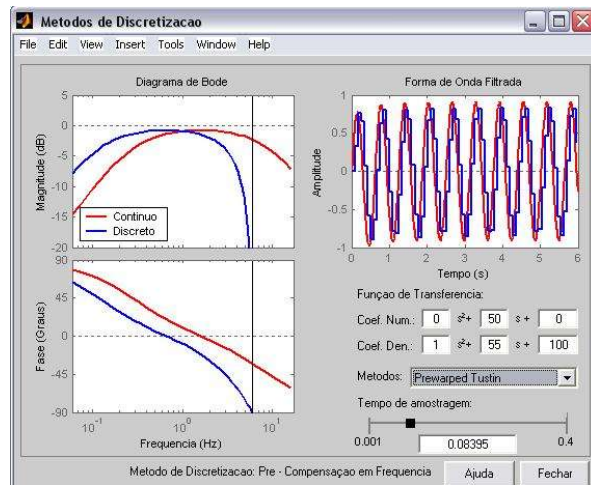
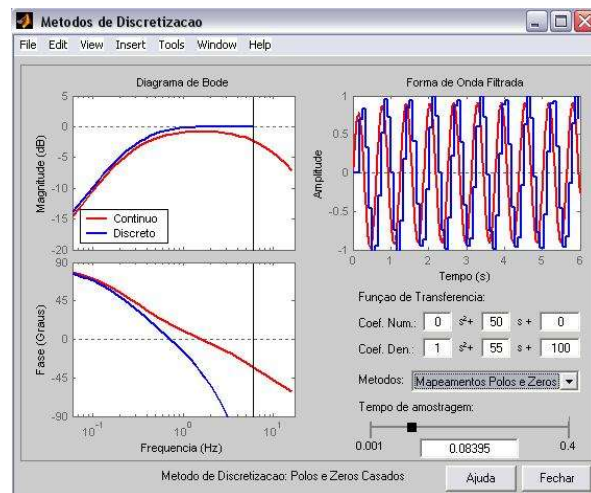


Figura 11



Foi utilizado um tempo de amostragem de 0,08395 que dá aproximadamente uma frequência de 12 Hz. Nota – se que para este filtro os erros em ganho (dB) e fase (grau) ficam bastante grandes e o desempenho dos filtros analógicos e discretos em baixas frequências são semelhantes.

5. CONCLUSÕES

O trabalho apresentou um ambiente de simulação para a discretização de controladores analógicos. Os resultados mostraram que o mesmo é de fácil utilização possibilitando associar os diversos parâmetros existentes no sistema à característica da resposta final.

A programação orientada a objetos permite uma interação fácil e bastante intuitiva com o usuário, simplificando o entendimento mesmo para os alunos que estão tendo os contatos iniciais com a área. Esta interação, bem como a facilidade de entendimento da implementação física do sistema, podem ser mais facilmente associadas à sua respectiva modelagem matemática e aplicabilidade dos conceitos de modelagem.

Trabalhos futuros podem ser agregados ao ambiente, podendo ainda ser inseridos outros tipos de controladores como PI, PD, e o mais utilizado o controlador PID.

6. AGRADECIMENTO

Leonardo de Almeida Matos Moraes, Engenheiro Eletricista, UFJF.
Francisco José Gomes, Doutor em Engenharia Elétrica, UNICAMP.
Ao Programa Especial de Treinamento PET/MEC/SESU.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KUO, Benjamin C. Digital Control Systems. University of Illinois at Urbana - Champaign: Harcourt Brace Jovanovich, 1980.

GAYAKWAD, Ramakant e SOKOLOFF, Leonard. Analog and Digital Control Systems, New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

OGATA, Katsuhiko, Engenharia de Controle Moderno. 2ª ed ,Minnesota: Prentice-Hall, 1990.

PLILLIPS,C.L. & NAGLE,Jr.N.T. Digital Control Systems Analysis: Analysis and Design Prentice Hall, 1984.

***Abstract:** This project is related to a development of a computational environment that allows the simulation of discrete analog controllers. The environment was developed with interactive characteristics, allowing to the user to select the transfer function, and choose that method go to discrete this function and like this to compare which will be more effective for that function of chosen transfer of the methods. They will also be able to analyze the approach of Equivalent Discrete of Continuous Systems. With friendly interface, the environment makes possible the user the accompaniment in the filtered wave form, gain margin (magnitude) and phase gain, could be used as a didactic tool for graduation students and also in the aid of digital controllers' projects that directly control the systems discrete.*

Key – words: New Techniques for Education in Engineering, Automation and Control, Modelling of Processes.

