

SISTEMAS DE NÍVEL DE LÍQUIDO – UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL DE AUXÍLIO E SIMULAÇÃO

Marcus Augustus Alves Ferreira – marcusuffj@yahoo.com.br

Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia Elétrica

Praça Jarbas de Lery Santos nº 85/303 – Bairro São Mateus

36016-390 - Juiz de Fora – Minas Gerais

Francisco José Gomes - chico@jfnet.com.br

Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, Departamento de Energia.

Rua Benjamin Constant, 790 – Centro

36016.400 – Juiz de Fora – Minas Gerais

***Resumo:** Os sistemas de nível de líquido estão presentes em várias aplicações, tanto na indústria, como em casos mais simples, como em caixas d'água de um condomínio. Neste contexto, cada sistema requer um controle específico, para que estes apresentem a resposta esperada dentro de uma gama prevista de situações. A proposta deste trabalho é a de implementação de um ambiente computacional capaz de apresentar a resposta de um sistema quando perturbações (transientes) são nele introduzidas. O sistema de nível de líquido tratado neste trabalho é composto por dois tanques que interagem entre si. O sistema foi estudado com base na teoria de controle moderno, sendo que, a técnica utilizada para a realização de um modelo matemático, foi a modelagem no Espaço de Estados. Para a resolução das equações diferenciais resultantes do modelo escolhido, foi adicionada ao código fonte do programa uma sub-rotina com o método numérico de resolução de equações diferenciais de Runge-Kutta de quarta ordem. A justificativa para a criação desta ferramenta computacional é a de que muitas vezes, no estudo de Engenharia, nos deparamos com situações onde o uso de ferramentas computacionais se torna indispensável para a otimização de algumas rotinas, poupando tempo. Em geral, estas rotinas contêm um elevado número de operações, fato que tornaria inviável sua realização sem ajuda computacional. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é a de criar uma interface amigável e interativa para que o estudante de engenharia possa prever ou confirmar os resultados de um sistema de nível de líquido.*

Palavras chave: Sistemas de nível de líquido, Teoria de controle moderno, Runge-Kutta, Ferramentas computacionais.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, se faz indispensável aos estudantes e profissionais que atuam na área de engenharia, o conhecimento de uma ou mais linguagens de programação. Tais conhecimentos se fazem úteis no desenvolvimento de ambientes computacionais que, em muitas situações, mesmo que extremamente simples, podem poupar tempo e atuar como fatores positivos no desenvolvimento de projetos e pesquisas.

Baseados nestes fatos e, tendo em vista suas possíveis aplicações de forma complementar no estudo e ensino de engenharia, pretende-se mostrar que ferramentas computacionais capazes de

efetuar operações e cálculos que demandariam certo esforço, podem ser facilmente implementadas. Neste contexto, este trabalho pretende apresentar uma destas ferramentas. Tal projeto consiste na implementação de um ambiente computacional capaz de simular a dinâmica temporal de um sistema de nível de líquido.

Como justificativa para o desenvolvimento deste projeto, pode-se citar o fato de que os sistemas de nível de líquido estão presentes em várias aplicações de engenharia. Isto se dá desde o seu emprego em situações corriqueiras, como em caixas d'água em condomínios, até o seu uso em plantas industriais de grandes indústrias cujo processo de produção ou do tratamento de seus resíduos costuma fazer uso de sistemas deste tipo.

Afim de atender aos objetivos propostos, o ambiente foi desenvolvido de modo a ser de fácil utilização e permitindo que o usuário consiga uma visão gráfica da resposta do sistema de acordo com o distúrbio por ele configurado. Esta representação gráfica foi feita na forma de um gráfico em duas dimensões, (vazão de saída de acordo com a variação do tempo). Para o desenvolvimento do ambiente e dos algoritmos foi utilizado o MatLab 6.1, cuja utilização vem se tornando cada vez mais indispensável aos alunos de engenharia. A escolha por este aplicativo foi feita baseada no fato de o MatLab apresentar uma interface amigável para a criação e apresentação de ambientes gráficos, bem como uma linguagem de alto nível, que guarda consigo várias funções matemáticas indispensáveis para a implementação deste projeto.

Nesta versão atual, este trabalho restringiu-se a sistemas de dois tanques sem realimentação, ficando a próxima versão incumbida da função de implementar o sistema realimentado. O trabalho se encontra organizado como descrito a seguir:

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Definições iniciais:

A modelagem matemática de um sistema de nível de líquido à luz da teoria de controle, necessita de algumas definições para que se possa descrever sua dinâmica de forma simples. Tais conceitos serão apresentadas no que se segue:

Regime de fluxo:

Quando se faz a análise de sistemas onde existem fluxos de fluido, faz-se necessária a distinção destes fluxos em laminar ou turbulento de acordo com o número de Reynolds. Caso o número de Reynolds seja menor que 2000, o fluxo pode ser considerado laminar. Porém, caso este número esteja entre 3000 e 4000, então o fluxo será turbulento.

No presente trabalho o fluxo será considerado laminar, negligenciando o fato de que, geralmente, nos processos industriais o fluxo tem características turbulentas. Tal escolha foi feita para que o modelo matemático pudesse ser simplificado.

Resistência:

Consideremos o fluxo laminar de um fluido qualquer através de um tubo que interliga dois tanques. Define-se a resistência ao fluxo de líquido nesta restrição, como a variação na diferença entre os níveis de líquido nos dois tanques necessária para causar uma variação unitária na taxa de fluxo, ou

$$R = \frac{\text{Variação na diferença de nível, m}}{\text{Variação na taxa de fluxo, m}^3/\text{s}} \quad (1)$$

A Figura 1 mostra, de forma simplificada, um sistema de nível de líquido.

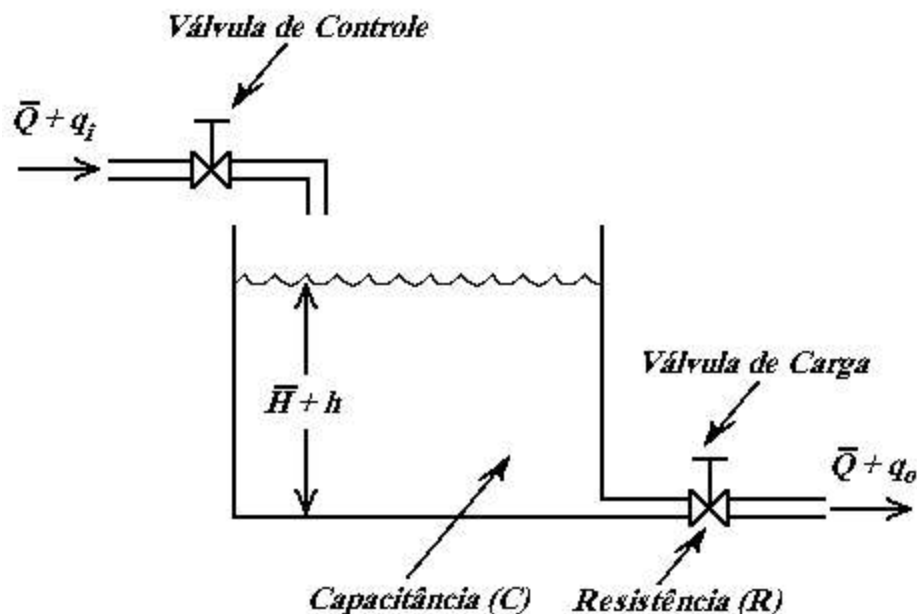


Figura 1 – Esquema de um sistema de nível de líquido

Observe que neste sistema o fluido passa através de uma válvula de carga. Levando em conta caso onde o fluxo através da restrição é laminar, pode-se obter a seguinte relação:

$$Q = KH \quad (2)$$

onde: Q = taxa de fluxo em regime estacionário, m^3/s

K = coeficiente, m^2/s

H = altura do nível em regime estacionário, m

Percebe-se aqui a analogia entre a equação (2) e a lei de Coulomb, que determina a relação entre a corrente e a diferença de potencial.

Sendo assim, para o fluxo laminar, pode-se dizer pó analogia que:

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q} \quad (3)$$

Capacitância:

Define-se a capacitância de um tanque como sendo a variação na quantidade de fluido armazenada capaz e causar uma variação unitária na altura do nível do líquido.

$$C = \frac{\text{Variação no líquido armazenado, } m^3}{\text{Variação na altura do nível, m}} \quad (4)$$

Sendo assim, a capacitância de um tanque é equivalente à área da sua seção transversal e será constante para qualquer altura do nível caso esta área seja constante.

Sistemas de nível de líquido:

Recorra ao sistema representado na Figura 1. A seguir serão apresentadas as definições das variáveis apresentadas neste esquema:

\bar{Q} = taxa de fluxo em regime estacionário, m³/s

q_i = desvio da taxa de fluxo de entrada em relação a seu valor em regime estacionário, m³/s

q_o = desvio da taxa de fluxo de saída em relação a seu valor em regime estacionário, m³/s

\bar{H} = altura do nível em regime estacionário, m

h = desvio na altura do nível em relação a seu valor em regime estacionário, m

2.2 Equacionamento:

Sistemas de nível de líquido:

Considere a Figura 1 e suas variáveis apresentadas na seção “Sistemas de nível de líquido” do item 2.1 deste trabalho. Nela, podemos observar que durante um intervalo de tempo diferencial dt , a diferença entre a quantidade de fluido que entra e a quantidade de fluido que sai o sistema é a quantidade de fluido que fica armazenada no tanque, isto é,

$$Cdh = (q_i - q_o)dt \quad (5)$$

Relacionando q_o e h pela definição de resistência anteriormente mostrada, tem-se:

$$q_o = \frac{h}{R} \quad (6)$$

Substituindo a equação (6) na equação (5), se obtém a equação diferencial do sistema:

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (7)$$

onde, por analogia, RC é a constante de tempo do sistema.

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da equação (7), tem-se:

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s) \quad (8)$$

onde $H(s) = \mathcal{L}[h]$ e $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$

Tomando q_i como entrada e h como saída, o sistema apresenta a seguinte função de transferência:

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (9)$$

No entanto, mantendo q_i como entrada, mas tomando q_o como saída, teremos:

$$Q_o(s) = \frac{1}{R} H(s) \quad (10)$$

que é a transformada de Laplace aplicada à equação (6).

Substituindo a equação (10) na equação (9) a nova função de transferência do sistema será:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (11)$$

Sistemas de nível de líquido com interação:

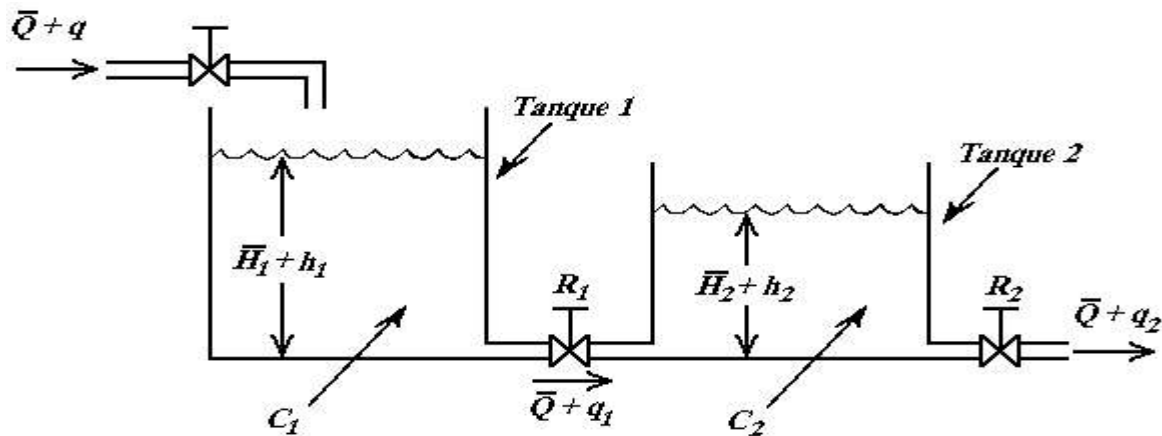


Figura 2 – Esquema de um sistema de nível de líquido com interação

A Figura 2 mostra um sistema de nível de líquido com interação. A interação existente entre os dois tanques mostrados nesta figura torna necessária uma nova análise do problema para que se possa obter a modelagem matemática adequada deste sistema.

Serão acrescentadas ao escopo das variáveis de nosso sistema aquelas correspondentes ao segundo tanque e, além delas, serão diferenciados agora os desvios da taxa de fluxo de saída em relação a seus valores de regime estacionário nos tanques 1 e 2. Todas estas novas variáveis podem ser apreciadas pela observação da Figura 2.

Para este sistema, pode-se obter as seguintes equações:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (12)$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (13)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (14)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (15)$$

Considerando q a entrada e q_2 a saída, a função de transferência do sistema será:

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1} \quad (16)$$

2.3 Representação no espaço de estados:

Uma representação no espaço de estados para este sistema pode ser obtida a partir da equação diferencial para este sistema:

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \ddot{x}_2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \dot{x}_2 + q_2 = q \quad (17)$$

$$\text{ou} \quad \ddot{x}_2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} q_2 = \frac{q}{R_1 C_1 R_2 C_2} \quad (18)$$

Definindo as variáveis de estado por:

$$x_1 = q_2 \quad \text{e} \quad x_2 = \dot{x}_2$$

A variável de entrada por:

$$u = q$$

E a variável de saída por:

$$y = q_2 = x_1$$

Obtém-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} & -\left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (19)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde q é considerado a entrada e q_2 a saída do sistema.

3. AMBIENTE DESENVOLVIDO

O ambiente computacional deste projeto foi totalmente desenvolvido usando o MatLab 6.1. Esta ferramenta foi escolhida por ser de fácil aprendizado e por atender completamente aos requisitos necessários ao desenvolvimento do ambiente em questão.

É importante salientar o fato de que algumas funções previstas para este projeto ainda não foram implementadas. Porém, o programa já é capaz de calcular a resposta gráfica a diversos tipos de função de distúrbio em sua entrada, deixando disponível ao usuário, um gráfico da resposta do sistema em relação ao tempo. Além disso, por se tratar de uma modelo matemático baseado na variação do tempo, tem-se, por consequência, equações diferenciais regendo toda a dinâmica. Para que tais equações pudessem ser resolvidas, optou-se pela implementação de uma sub-rotina matemática do método numérico de derivação de Runge-Kutta de quarta ordem. Tal método, por se tratar apenas de uma ferramenta auxiliar, será brevemente apresentada no item 5 deste trabalho.

A seguir algumas figuras serão apresentadas de modo a ilustrar o ambiente desenvolvido, apresentando, assim, suas funções e o seu modo de utilização.

A interface do ambiente se mostra bem simples e objetiva, o que torna este programa uma ferramenta amigável ao usuário. Ao ser executado, o programa carrega uma tela de configurações onde o usuário deverá fornecer alguns parâmetros para que possa ser realizada a simulação. Nesta tela, o usuário poderá ver um diagrama esquemático do sistema a ser simulado.

Os parâmetros de configuração são:

- Função de distúrbio de entrada: é a função que fará a entrada variar no tempo levando em consideração a taxa de fluxo de entrada em regime estacionário (desvio da taxa de fluxo na entrada);
- Vazão em regime permanente: é a taxa do fluxo de entrada em regime estacionário. Seu valor deve ser dado em metros cúbicos por segundo (m^3/s);
- Tempo de simulação: configura o intervalo de simulação no tempo, cujos instantes inicial e final são os limites. Os valores devem ser dados em segundos (s);
- Área da base dos tanques: configura os valores de área das bases dos tanques 1 e 2. Seus valores devem ser dados em metros quadrados (m^2);
- Altura dos tanques: configura os valores de altura dos tanques 1 e 2. Seus valores devem ser dados em metros (m);
- Quantidade de líquido inicial: são as porcentagens das capacidades totais de cada um dos tanques que estão sendo ocupadas em regime estacionário. Estes valores devem ser dados em porcentagem da capacidade total de cada um dos tanques que deverá ser medida em metros cúbicos (m^3);

A Figura 3 mostra a tela do programa e seus campos destinados às configurações anteriormente citadas.

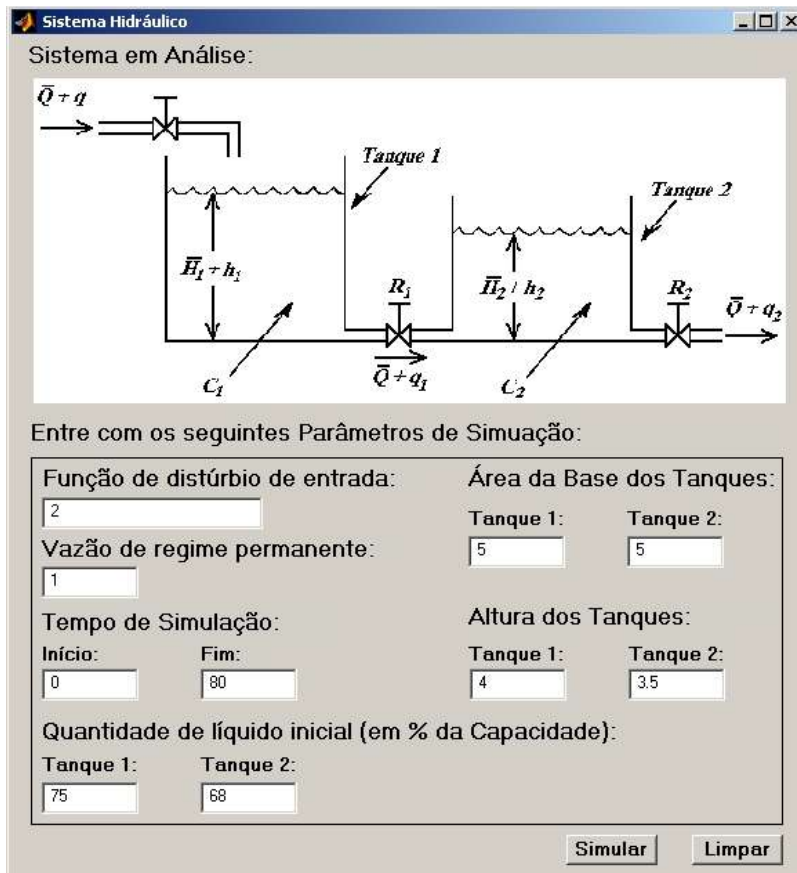


Figura 3 – Tela de configurações do ambiente desenvolvido

A seguir serão mostrados os parâmetros operacionais para a inserção de uma função de distúrbio de entrada, lembrando que a variável padrão desta função é o tempo (t) :

- Adição e Subtração: são usados os símbolos usuais, ou seja, “ + ” para adição e “ - ” para subtração;
- Multiplicação: o símbolo usado para esta operação é o asterisco (*). Ex.: $t * 2$;
- Divisão: o símbolo usado para esta operação é a barra (/). Ex.: $t / 3$;
- Potência: o símbolo usado para esta operação é o acento circunflexo (^). Ex.: $t^2 = t^{\wedge}2$.

4. RESULTADOS OBTIDOS

Serão apresentados, a seguir, alguns resultados obtidos através da utilização do ambiente em questão. Vale observar que o resultado gráfico da simulação é apresentado na mesma tela de configuração substituindo o diagrama esquemático do sistema.

Em uma primeira simulação, o ambiente foi configurado com uma função de distúrbio do tipo degrau. O resultado desta situação simulada pode ser observado na Figura 4.

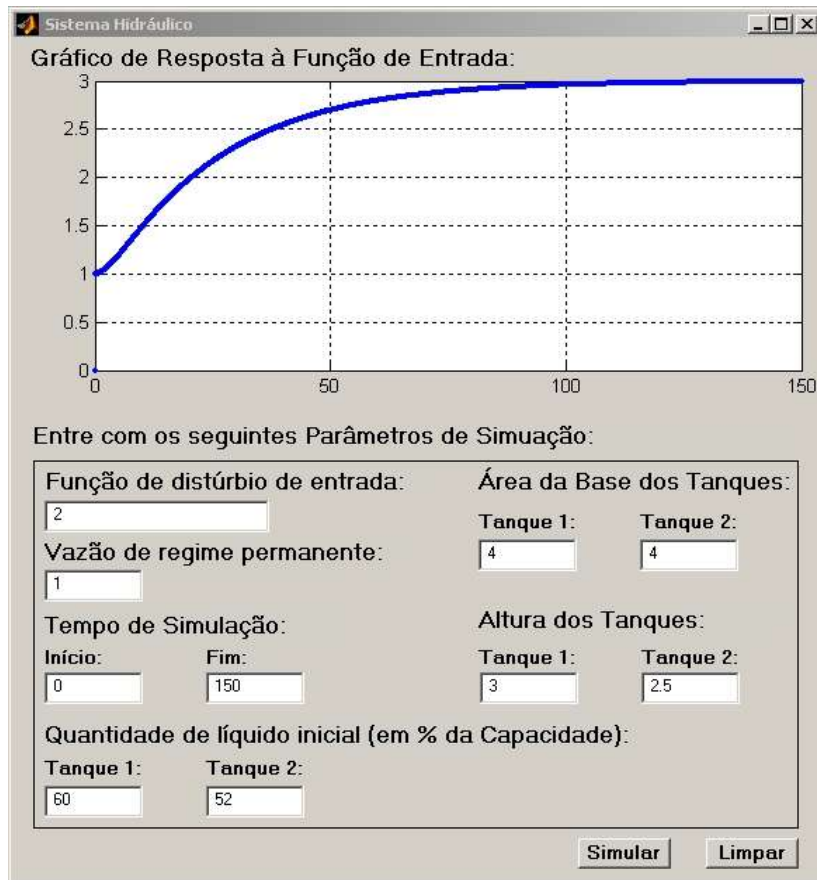


Figura 4 – Resposta calculada pelo programa a um distúrbio do tipo degrau

Percebe-se coerência na resposta obtida através do programa. A saída aumenta de acordo com uma função do tipo exponencial desde o valor de estado estacionário até chegar ao seu valor final, como era esperado para uma entrada deste tipo. O valor final, que deve ser o valor de estado estacionário somado ao valor do degrau, também concorda com a previsão teórica.

Em uma segunda simulação, o ambiente foi configurado com uma função de distúrbio do segundo grau. O resultado desta situação simulada pode ser observado na Figura 5.

Neste caso, como a função do distúrbio aumenta seu valor de acordo com o quadrado do tempo, espera-se que o sistema se torne instável, ou seja, que sua saída tenda ao infinito. A observação da resposta traçada pelo programa descreve exatamente esta situação. A saída parte do valor de regime estacionário e segue para o infinito de acordo com o rápido aumento do valor de entrada do sistema.

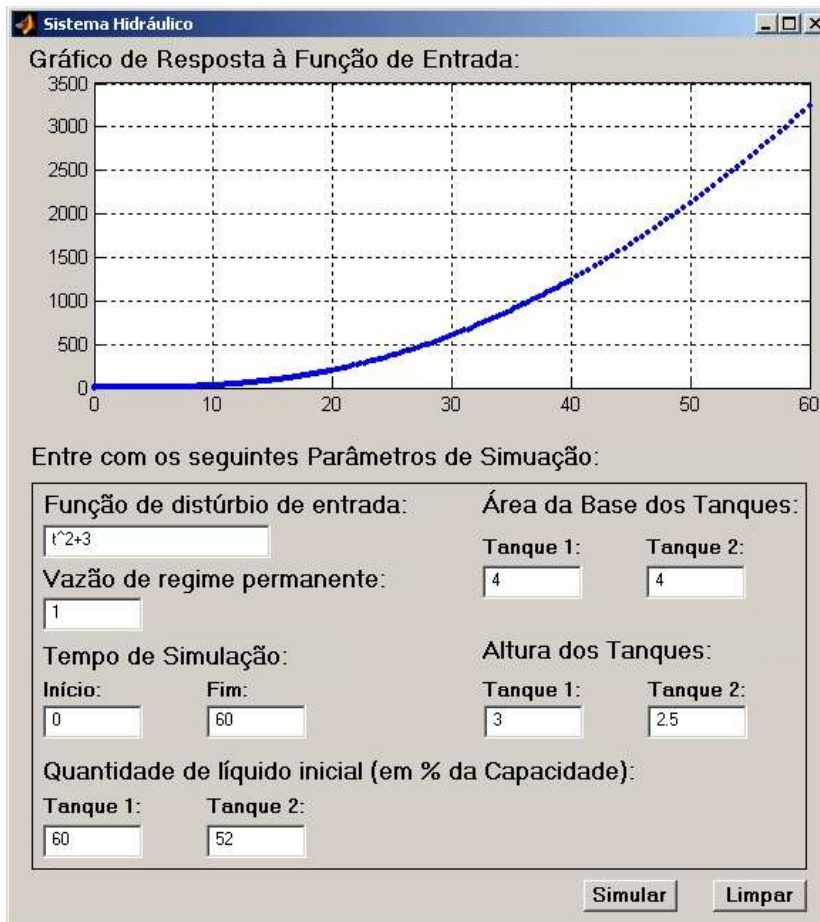


Figura 5 – Resposta calculada pelo programa a um distúrbio do tipo função do segundo grau

5. MÉTODO NUMÉRICO AUXILIAR

Será apresentado agora, em linhas gerais, o método de derivação numérica de Runge-Kutta de quarta ordem.

Considere as seguintes definições:

- $y' = f(x, y(x))$: equação diferencial em função de x e $y(x)$;
- $[a, b]$: intervalo onde a derivada é contínua e onde se pretende calculá-la;
- m : número de sub-intervalos em que será dividido o intervalo $[a, b]$. Lembrando que $m \geq 1$;
- $h = \frac{b-a}{m}$: tamanho dos sub-intervalos (comprimento do passo).

O método de Runge-Kutta de quarta ordem tem por objetivo, resolver um PVI (Problema de Valor Inicial) calculando o ponto atual y_{j+1} , com dependência apenas no valor y_j da etapa anterior.

Considere então a seguinte expressão:

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j; h); \quad m = 0, 1, \dots, m-1 \quad (21)$$

onde $\phi(x_j, y_j; h)$ é a função incremento.

Para o método em questão, a função incremento multiplicada pelo comprimento do passo será:

$$h\phi(x_j, y_j; h) = \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (22)$$

$$\text{onde } K_1 = f(x_j, y_j) \quad (23)$$

$$K_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1\right) \quad (24)$$

$$K_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_2\right) \quad (25)$$

$$K_4 = f(x_j + h, y_j + hK_3) \quad (26)$$

É possível, por meio da teoria de séries, provar que a função incremento e suas constantes tem o aspecto anteriormente apresentado para o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Esta demonstração é feita por meio de expansões da série de Taylor e pode ser encontrada com mais detalhes na primeira referência deste trabalho. Sua demonstração aqui se faz desnecessária visto que foge do escopo deste trabalho.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O desenvolvimento deste ambiente teve como objetivo mostrar que simples ferramentas computacionais podem ser criadas para o auxílio no estudo ou no desenvolvimento de projetos em engenharia.

Adicionalmente, o trabalho relacionado à criação do ambiente traz ao aluno a necessidade do aprendizado e conhecimento de várias técnicas e teorias que passam tanto pela área de programação quanto pelas áreas de engenharia, matemática e física em si. Sendo assim, tal prática se torna proveitosa e até mesmo indispensável no ambiente de ensino, para que os estudantes se vejam motivados a aprendizagem de novas teorias e técnicas através do desenvolvimento de projetos como estes.

Como visto, o ambiente desenvolvido é amigável possibilitando sua utilização por qualquer usuário, sem maiores problemas desde que o usuário possua conhecimentos básicos na área em questão. Além disso, os resultados obtidos com o uso deste programa têm se mostrado coerentes e dentro do esperado, como foi mostrado no item 4 deste trabalho.

Por fim, vale lembrar que o potencial do ambiente desenvolvido é muito maior do que o que foi mostrado até agora, ficando para uma próxima versão, algumas novas funções serem implementadas.

Agradecimentos

Ao Programa Especial de Treinamento – PET/SESu/UFJF. Ao Prof. Dr. Francisco José Gomes pela sua orientação neste trabalho e ao Prof. Dr. Márcio Vicente Rizzo, pela boa vontade e cooperação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, L. C.; Barroso, M. M. de A.; Campos, F. F.; Carvalho, M. L. B. de e Maia, M. L. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: Harbra, 1987.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: PrenticeHall, 2003.

MATSUMOTO, É. Y. **Fundamentos de Programação MatLab 6.1**. São Paulo: Érica, 2001.

SYSTEMS OF LEVEL OF LIQUID – A COMPUTER TOOL OF HELPING AND SIMULATING

Abstract: *Systems of level of liquid are employed in many industrial and general applications, just like in water tanks that supply a building or a city. Referring to these staff, each system requires a particular environment of control to make sure that they will be predicable and trustable into a range of specific situations. This project suggests the implementation of a computer program that is able to calculate the answer that can taken from this kind of system when a transient input is given to it. The idea is to simulate systems composed by to tanks. This system was modeled based on the Theory of modern Control Engineering. The differential equations were solved by the implementation of an extra routine for the Runge-Kutta's resolution method of differential equations. The motivation for creating this engineering tool was the necessity of saving precious time by making a computer program that's able to calculated the heavy routines. In general, these routines have a great quantity of operations that would represent a very hard work without the computer to help. After all, the objective of this project is to create this compuing tool with an interactive and friendly environment, so that the engineering students can anticipate or confirm the results they got simulating a system of level of liquid.*

Key-words: *Systems of level of liquid, Theory of modern Control Engineering, Runge-Kutta, Computing tool.*