



ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: RESULTADOS DE INVESTIGAÇÕES EM CURSOS DE ENGENHARIA

Helena Noronha Cury – curyhn@puccr.br
PUCRS, Faculdade de Matemática
Avenida Ipiranga, 6681 – Bairro Partenon
CEP 90619-900– Porto Alegre - RS

Resumo: *A análise de erros é uma abordagem de pesquisa que vem sendo usada no ensino de matemática desde o início do século XX, podendo ser empregada com o objetivo de eliminar os erros cometidos pelos estudantes ou de explorá-los para permitir novas descobertas sobre suas dificuldades. Tendo realizado várias investigações sobre erros cometidos por alunos de Cálculo de cursos de engenharia, observamos que os estudantes, em geral, não dominam conteúdos de álgebra, trigonometria e geometria do ensino básico. Esse problema, somando-se a dificuldades de abstração e generalização, também coopera para a reprovação e repetência em disciplinas matemáticas de tais cursos. Neste trabalho, apresentamos algumas pesquisas em análise de erros, especialmente trazendo resultados de investigações já realizadas com alunos de Cálculo Diferencial e Integral I. Contextualizamos o tema, trazendo dados sobre os calouros do novo Curso de Engenharia Química da PUCRS, envolvendo a análise dos erros cometidos em testes, trabalhos individuais ou grupais. Os resultados das pesquisas são apresentados em quadros e alguns casos típicos são analisados em profundidade, com considerações sobre as possíveis causas para os problemas e sugestões de estratégias para trabalhar com os erros.*

Palavras-chave: *Análise de erros, Cálculo diferencial e integral, Cursos de engenharia.*

1. INTRODUÇÃO

A análise de erros é uma abordagem de pesquisa que vem sendo utilizada desde o início do século XX, com diferentes enfoques de acordo com a origem dos pesquisadores e com os pressupostos teóricos nos quais estão ancorados os trabalhos. Com base em RADATZ (1980), podemos verificar que os primeiros trabalhos foram feitos por pesquisadores americanos, ligados ao behaviorismo. Os autores investigaram erros cometidos por estudantes de séries iniciais na realização das quatro operações matemáticas fundamentais. Já os europeus, especialmente os alemães, trabalharam análise de erros com base na Gestalt ou na psicanálise.

Posteriormente, na década de 50 do século passado, foram realizadas pesquisas utilizando os protocolos verbais, com solicitação aos estudantes de que falassem em voz alta durante a realização das tarefas. Procurava-se, então, detectar padrões que pudessem ser estudados à luz do processamento da informação.

Uma terceira fase nas pesquisas teve suporte das teorias construtivistas, em que os investigadores procuravam entender o erro como construtor do conhecimento e não mais como algo a ser eliminado. Dessa fase são os trabalhos de BORASI (1985, 1988), em que a autora propõe um quadro para avaliar as diversas formas de encarar o erro, segundo dois objetivos (eliminação ou exploração do erro) e três focos (conteúdo técnico-matemático, natureza da matemática e processo de aprendizagem).

No entanto, apesar de ter sido considerada uma das mais promissoras abordagens de pesquisa em educação matemática para o final do século XX, têm sido relativamente poucos os trabalhos dedicados à análise de erros, especialmente no Brasil. Temos exemplos de pesquisas nas séries iniciais (BATISTA, 1995; BATHELT, 1999) ou mesmo em cursos superiores (CURY, 1988, 1990). No entanto, as dificuldades apresentadas pelos alunos de cursos de graduação na área de ciências exatas têm levado os pesquisadores em educação matemática a debater, cada vez mais, as causas dos problemas que levam a resultados preocupantes em exames nacionais como o do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Exame Nacional de Cursos (ENC) ou mesmo em exames internacionais, como do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). Assim, um levantamento detalhado dos erros cometidos em provas e trabalhos realizados em disciplinas matemáticas, bem como uma tentativa de compreensão das suas causas, pode auxiliar a diminuir o alto nível de evasão e repetência em disciplinas consideradas críticas nos primeiros semestres de cursos universitários, como o Cálculo Diferencial e Integral.

2. INVESTIGAÇÕES SOBRE ERROS EM CÁLCULO

As reformas curriculares, em qualquer curso, sempre trazem oportunidades de debates sobre os problemas e tentativas de solucioná-los. Em 1989, com as modificações implantadas nas disciplinas matemáticas dos cursos de engenharia da PUCRS, foram propostas novas abordagens para os conteúdos, privilegiando a compreensão dos conceitos. No entanto, as discussões sobre avaliação sempre esbarravam nas dificuldades de entender as causas dos erros cometidos pelos alunos, muitas vezes considerados absurdos. Realizamos, então, uma investigação com cerca de 450 alunos, de 13 turmas de Cálculo Diferencial e Integral A, com o objetivo de analisar e classificar os erros cometidos em provas individuais, para verificar quais as maiores dificuldades e suas possíveis causas. Partíamos do pressuposto de que as causas dos erros em um determinado conteúdo estavam relacionadas, principalmente, com as dificuldades nos conceitos básicos para a aprendizagem do mesmo. (CURY, 1990).

Inicialmente, fizemos um levantamento das questões mais erradas em cada uma das três provas semestrais e após, analisamos detalhadamente os erros cometidos, classificando-os e tecendo algumas considerações sobre suas causas. Na primeira prova, em que geralmente eram abordadas questões sobre funções e gráficos, verificamos que a maior dificuldade estava relacionada com reconhecimento de gráficos das diversas funções básicas. Na segunda prova, os maiores problemas estavam ligados à aplicações de regras de derivação e na terceira, às questões que solicitavam antidiferenciais.

Em uma segunda investigação, no ano seguinte, procuramos testar as categorias propostas para os erros e confirmamos a existência dos mesmos problemas, sendo que os alunos, muitas vezes, cometiam o que tem sido chamado de “erro resistente”, ou seja, aquele que, malgrado explicações do professor e mesmo compreensões dos estudantes, repetem-se em outras ocasiões. Um exemplo, que não é exclusivo de disciplinas de cálculo mas que surge quase todas as vezes em que trabalhamos com radicais, é representado por $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Tendo acompanhado as novas propostas metodológicas para o ensino de Cálculo, especialmente as relacionadas com uso de novas tecnologias, consideramos que pouco tem sido modificado, em termos de dificuldades com conteúdos básicos ou de erros cometidos pelos alunos. No segundo semestre de 2002, preparando-nos para novas reformulações nos programas das disciplinas matemáticas de cursos de serviço da PUCRS, repetimos a análise de erros em uma turma de alunos de Cálculo A, de forma menos sistemática, apenas para verificar se novos problemas somavam-se aos anteriormente detectados. Analisamos especialmente as questões relacionadas com derivadas e integrais e novamente apareceram os

erros em fatoração e simplificação, evidenciando problemas com a aprendizagem das propriedades das operações no conjunto dos reais.

Um fato que nos chamou a atenção, por ter se tornado mais freqüente, é falta de argumento nas funções trigonométricas. Por exemplo, ao derivar $f(x)=\text{sen}^3(x^2+5)$, alguns alunos apresentam como resposta $f'(x)=3\text{sen}^2 \cdot \cos \cdot 2x$, ou seja, entendem que pode haver um seno e um cosseno sem arco. Outro problema que surgiu muitas vezes, nas duas questões analisadas, é a falta de parênteses para indicar produtos de polinômios. Ora, esse erro de escrita matemática ocasiona, obviamente, erros na resolução das questões pois, ao escrever, por exemplo, $(2x+3).(3x-5)$ como $2x+3.3x-5$, ao final do exercício o aluno apenas multiplica 3 por 3x, desconsiderando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Assim, na nova reformulação curricular das engenharias da PUCRS, ao engajarmo-nos na equipe responsável pelas mudanças nas disciplinas matemáticas e ao assumirmos a turma de Cálculo para Engenharia Química I, planejamos um acompanhamento dos estudantes que envolvesse os pré-requisitos, as preferências de aprendizagem, os erros cometidos e novas abordagens metodológicas. Os resultados da experiência são relatados a seguir.

3. A INVESTIGAÇÃO NA TURMA DE ENGENHARIA QUÍMICA

O novo currículo do curso de Engenharia Química da PUCRS foi implantado no primeiro semestre de 2003 e as disciplinas matemáticas são: Cálculo para Engenharia Química I (8 créditos), Cálculo para Engenharia Química II (4 créditos), Cálculo Vetorial para Engenharia Química (4 créditos), Álgebra Linear e Geometria Analítica (4 créditos), Equações Diferenciais para Engenharia Química (4 créditos). A disciplina inicial de Cálculo, com oito créditos, tem como objetivo geral instrumentalizar o aluno com as ferramentas matemáticas necessárias para projetar, elaborar e conduzir experimentos em engenharia, permitindo-lhe modelar situações e interpretar resultados. A ementa da disciplina contempla os seguintes itens: Funções de uma variável; limites e continuidade; derivadas; aplicações das derivadas; diferenciais; integrais; métodos de integração; cálculo de áreas e volumes; séries numéricas e séries de potências; aplicações a problemas de Engenharia Química.

3.1 Os resultados da investigação inicial

Para obter dados sobre os estudantes, em termos de estilos preferenciais de aprendizagem e de conteúdos pré-requisitos, foram aplicados, na primeira aula de Cálculo I, aos 33 alunos presentes, dois instrumentos: o teste ILS (Index of Learning Styles), de Felder e Solomon, já aplicado e analisado para alunos de engenharia da PUCRS (CURY, 2000) e um pré-teste com questões de ensino básico que, nas experiências anteriores, mostraram o maior número de erros.

Quanto aos estilos, confirmando o que já havia sido pesquisado na investigação citada, vimos que os alunos são, preferencialmente, ativos (preferem agir sobre algo, testando, aplicando, exercitando, especialmente em grupo), sensoriais (preferem informações práticas, observações, o que vem através dos sentidos), visuais (privilegiam as informações que vêm por imagens, diagramas, gráficos) e seqüenciais (gostam de aprender passo a passo, de forma que cada informação seja obtida logicamente da anterior).

Para análise das respostas ao pré-teste, foram escolhidas as questões cujos conteúdos são pré-requisitos para a realização de exercícios de Cálculo – a saber, questões que solicitavam simplificação, fatoração e racionalização de expressões algébricas – e nas quais os alunos tiveram maiores dificuldades. O quadro a seguir mostra o número de alunos que erraram ou não responderam a cada questão analisada.

Quadro 1 - Número de alunos que erraram ou não responderam a questões do teste

Questão	Alunos que erraram		Alunos que não responderam	
	nº	%	nº	%
Simplifique: $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$	18	55	13	39
Fatore: $x^2 - 2x - 15$	15	45	16	49
Racionalize: $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$	14	42	9	27

Pela grande quantidade de respostas erradas ou não resolvidas, já vimos que os estudantes precisam investir na revisão de conteúdos pré-requisitos. No entanto, a falta de hábitos de estudo, que se evidenciam no momento em que os alunos tentam resolver exercícios em aula, dificulta as tentativas de sugerir realização de exercícios de revisão do ensino básico, disponíveis em *sites* da Internet e nas *homepages* dos professores da área de Cálculo, da PUCRS ou de outras universidades brasileiras e estrangeiras. Um exemplo, sugerido aos alunos e que permite retomar exercícios padronizados, é a resolução dos testes encontrados em <http://archives.math.utk.edu/software/msdos/calculus/rurc1/.html>.

Uma análise aprofundada dos erros pode ajudar a entender alguns problemas relacionados com conteúdos do ensino básico. Na primeira questão analisada, em que solicitávamos a simplificação de uma fração algébrica, a maioria dos erros envolveu a lei do cancelamento da multiplicação nos reais, pois alguns alunos “cancelaram” o “ x^2 ” do numerador com o do denominador (ou o 8 com o 4). O segundo maior fator de erro parece ser a distinção entre expressão e equação. Parece que certos modelos são tão fortemente introjetados que os alunos têm a tendência a igualar a zero toda e qualquer expressão que vêm, mesmo que não seja solicitada a resolução de uma equação. Dessa forma, fatorando corretamente ou não a expressão, alguns alunos igualaram-na a zero, obtendo como “resposta” um valor para x .

Na segunda questão do pré-teste, a maior parte dos erros foi causada pelo desconhecimento do teorema fundamental da álgebra, pois muitos alunos, mesmo tendo encontrado as raízes r_1 e r_2 do polinômio $x^2 - 2x - 15$, não lembravam que poderia ser fatorado como um produto do tipo $(x-r_1).(x-r_2)$.

Finalmente, na terceira questão, os alunos parecem ter lembrado da existência de um artifício envolvendo o conjugado de $2 + \sqrt{3}$, mas erraram o sinal, pois multiplicaram numerador e denominador pelo mesmo $2 + \sqrt{3}$ ou então simplesmente multiplicaram ambos os termos por $\sqrt{3}$. Acertando ou errando o fator multiplicador, muitos alunos ainda cometeram erros de cálculo, desconhecendo o produto da soma pela diferença ou mesmo indicando que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$.

3.2 Os resultados da análise de erros em provas individuais

Para investigar os erros, coletamos, ainda, informações de duas provas realizadas. Na primeira delas, selecionamos para análise uma questão sobre gráfico de funções, pois, pelas

experiências anteriores, sabemos que os estudantes têm dificuldades em trabalhar com esse conteúdo. A questão proposta tem o seguinte enunciado:

Esboce o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{para } x < 0 \\ e^{-x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Realizaram a prova 45 alunos. Desses, 29 erraram a questão, 15 acertaram e apenas um não tentou resolvê-la. Classificamos os erros cometidos em cinco categorias, descritas a seguir:

a) Não identificação do gráfico da exponencial: nesta classe de erros, colocamos todas aquelas soluções que mostravam gráficos de funções lineares, funções potência negativa, funções quadráticas, evidenciando o desconhecimento, por parte dos alunos, da forma do gráfico da exponencial e o fato de que sequer procuram utilizar valores para ter uma idéia do esboço. Também estão aqui classificados os casos em que os alunos não reconhecem diferença entre as duas leis.

b) Realização de simetria em relação a um eixo horizontal ou vertical: neste caso, o aluno parece ter uma idéia do gráfico da exponencial, mas “reflete” a curva, dando a idéia de que fez simetria em relação a um eixo horizontal ou vertical.

c) Erro no conceito de função: nesta categoria, o aluno não esboça o gráfico para os valores indicados, mostrando que tem um conceito errado para função, pois há intervalos em que existem pelo menos dois valores da variável dependente para cada valor da independente e outros em que o gráfico não foi esboçado.

d) Erros de cálculo: o aluno calcula erradamente algum valor, especialmente para $x=0$, o que modifica o conjunto imagem.

Na segunda prova, realizada por 41 alunos, selecionamos para análise as três questões em que os alunos apresentaram maiores dificuldades. O quadro a seguir mostra o número de estudantes que erraram cada uma das questões, mas é importante frisar que o número de erros é muito maior, pois muitas vezes surgem erros classificados em categorias diferentes em uma mesma resolução.

Quadro 2 - Número de alunos que erraram questões da segunda prova

Questão	Alunos que erraram	
	nº	%
Calcule: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1}$	37	90
Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{2x^3 - 5}$	31	76
Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por $f(x) = \sin^2(2x^4 - 3)$	34	83

Na primeira questão, sobre limite de uma função, os erros foram classificados em quatro categorias, a saber:

a) Aplicação não adequada das regras de L'Hôpital: tendo ou não substituído x por 1, ou seja, independentemente da existência de indeterminações dos tipos considerados no Teorema de L'Hôpital, os alunos derivaram numerador e denominador, obtendo então o valor 2 para o limite.

b) Erros relacionados com conteúdos de álgebra do ensino básico, ou seja, com fatoração, simplificação, produtos notáveis, propriedade distributiva ou conceito de potenciação. Os alunos parecem ter introjetado um "modelo", em que todo binômio em que um dos termos é o quadrado de uma variável e o outro é uma constante deve ser fatorado como se fosse diferença de quadrados. Além disso, talvez lembrando uma espécie de "racionalização", alguns alunos multiplicaram numerador e denominador por $x+1$, efetuando os cálculos e obtendo um polinômio de terceiro grau no numerador e outro de segundo grau no denominador, "simplificando", após, o " x^2 " do numerador com o do denominador, evidenciando o desconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

c) Erros relacionados com o conceito de limite: alguns alunos mostraram não ter compreendido o significado de limite pela direita, pois apenas substituíram x por um valor maior do que 1 (por exemplo, 1,1) e calcularam o valor numérico da expressão. Outro erro também relacionado com o conceito envolveu a substituição de x por $+1$ e depois por -1 , como se a notação de limite à direita indicasse troca do sinal de x .

d) Erros de cálculo nas substituições ou lapsos de escrita; neste último caso, às vezes o aluno copia mal a lei da função mas resolve o exercício corretamente.

Na segunda questão analisada, classificamos os erros em três categorias principais, que são:

a) Erros relacionados com conteúdos de álgebra do ensino básico, ou seja, com simplificação, produtos notáveis, produto de potências de mesma base, propriedade distributiva (inclusive os erros determinados pelo sinal de menos à frente de parênteses): é importante notar que muitos alunos, mesmo sabendo aplicar a regra da derivada de uma função quociente, cometem erros absurdos em conteúdos supostamente pré-requisitos.

b) Erros na aplicação de regras de derivação, tanto da própria função quociente quanto das funções indicadas nos dois termos da fração algébrica.

c) Aplicação equivocada das regras de L'Hôpital: alguns alunos, após "aprenderem" tais regras, passam a derivar numerador e denominador das frações algébricas, sem distinguir a diferença de solicitação.

Em relação à terceira questão, identificamos duas classes principais de erros nas respostas, a saber:

a) Erros na derivada da função composta: este é o problema mais comum, pois os alunos apresentam muitas dificuldades para identificar as funções componentes. Além disso, talvez por não entender a própria regra da cadeia, derivam ao mesmo tempo duas das funções, apresentando, por exemplo, $2 \cos(8x)$ como resposta da questão.

b) Erros relacionados com o conceito de função trigonométrica ou, mais especificamente, com o argumento da função: muitos alunos escrevem "sen" ou "cos" sem argumento e alguns até consideram que $\text{sen}(2x^4 - 3)$ representa um produto!

4. AS ATIVIDADES REALIZADAS NA TURMA DE ENGENHARIA QUÍMICA

Além dos testes inicialmente propostos e das provas individuais, desde o início do semestre realizamos uma série de atividades que, analisadas sistematicamente, forneceram

elementos para uma avaliação continuada do desempenho dos alunos. Para incentivar os estudantes a buscarem as soluções para os exercícios e problemas propostos, bem como para desenvolver o hábito da consulta a livros, intercalamos uma série de trabalhos extra-classe, a serem realizados em duplas ou individualmente, sobre seqüências, funções exponenciais e logarítmicas, funções trigonométricas circulares e hiperbólicas e áreas de figuras planas. Além disso, realizamos quinzenalmente laboratórios, em que os alunos trabalharam com os softwares MPP (*Mathematics Plotting Package*), *Winplot* e *Maple*.

As experiências com computador foram muito bem aceitas, pois os erros anteriormente citados foram minimizados pelo uso do computador. Ao solicitar o traçado de gráficos nos *software*, os alunos podiam ver o esboço das curvas e tirar conclusões sobre crescimento, decréscimo, raízes das funções, concavidade, pontos de máximo e mínimo, etc.

Ao adquirir maior experiência e conhecer mais comandos, especialmente quando passamos a trabalhar apenas com o *Maple*, os alunos foram usando os conhecimentos sobre o *software* e puderam, por exemplo, determinar áreas de regiões planas, evitando os erros de cálculo, de resolução de equações (para achar os limites de integração) e do próprio processo de integração.

Também o trabalho em duplas foi importante, porque um erro cometido por um dos componentes da dupla era imediatamente criticado pelo colega, favorecendo a compreensão das próprias dificuldades, especialmente porque a “linguagem” é comum. No entanto, ao realizar tarefas individuais, especialmente sob a tensão da avaliação, os alunos repetiam erros que, aparentemente, já haviam detectado e eliminado.

Outra possibilidade de avaliação da forma de resolução de questões foram as sessões semanais de estudo, em horário extra-classe, para as quais os alunos foram convidados. Aqueles que participaram tiveram um atendimento personalizado e foi possível, então, detectar as dificuldades que enfrentam ao resolver os problemas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pela análise do teste de estilos de aprendizagem, acreditamos que devemos priorizar, pelo menos no primeiro semestre do curso, atividades que envolvem os estudantes em visualizações de gráficos e em resoluções de exercícios em duplas. Além disso, as sistematizações que fazemos devem enfatizar as seqüências de passos que foram construídas pelos alunos ou que são inerentes ao próprio conteúdo, pois os estilos preferenciais de aprendizagem são o visual, o sensorial e o seqüencial, pelo menos nas várias turmas em que aplicamos o teste ILS.

Das várias atividades desenvolvidas com os alunos de Cálculo dessa turma de Engenharia Química, consideramos que as aulas no laboratório de informática, os trabalhos em duplas e as sessões de estudo foram as que mais auxiliaram os alunos a aprender os conceitos e desenvolver as técnicas apresentadas na disciplina. As aulas expositivas-dialogadas, necessárias para apresentar alguns conceitos e sintetizar as idéias apresentadas em textos ou nas tarefas propostas, não permitem ao professor detectar os erros, as incompreensões, as dificuldades que o aluno sente e não tem coragem de manifestar no momento. Ao trabalhar em duplas, em sala de aula ou à frente de um computador, o aluno se expõe, porque precisa falar, perguntar, discutir. E nesses instantes temos a possibilidade de verificar quais são as “travas” ao raciocínio e o que podemos fazer para questioná-lo, oportunizando o dar-se conta dos próprios erros.

A análise dos erros cometidos pelos alunos nos vários tipos de questões aqui apresentadas mostra que as dificuldades mais sérias estão relacionadas com conteúdos de ensino básico, especialmente com problemas que vêm da sétima e oitava séries do ensino fundamental, quando são estudados, em geral, conteúdos de álgebra. Os problemas com conteúdos pré-

requisitos já foram comentados e investigados por outros pesquisadores que investigam dificuldades no ensino de Cálculo. (FLEMMING et al., 1999; NASCIMENTO, 2000, 2001). Discutindo o fracasso de alunos de Cálculo, LACHINI (2001) comenta que:

“A análise de provas e de exercícios resolvidos mostra um déficit linguístico por parte do aluno que chega à universidade; mal alfabetizados em matemática, muitos alunos têm dificuldade em perguntar, apresentar dúvidas ou defender soluções encontradas. Tal déficit, por certo, pode explicar a ausência de diálogo, mediado pelo conteúdo de Cálculo, entre professores e alunos.” (p. 171).

No entanto, esses são os alunos que temos, não podemos simplesmente fixar padrões quase impossíveis de alcançar e pensar que isso os levará a atingi-los. O grande número de repetências e evasões na disciplina de Cálculo mostra que é necessário discutir mais as causas dos erros e buscar estratégias para superá-los. Vários textos de autores brasileiros e estrangeiros evidenciam as preocupações dos seus autores com o ensino de engenharia e oferecem sugestões de mudanças. (SALVADOR et al., 1999; FELDER et al., 2000; GUIMARÃES, 2002). Se essas estão relacionadas com trabalhos extra-classe, com estudo em grupo, com ensino mais individualizado, com uso de computadores, então é hora de debater todas as relações e aproveitar as experiências já realizadas para testá-las ou implementá-las com modificações.

A análise de erros, empregada com o objetivo de explorar as dificuldades e aproveitá-las para um questionamento mais aprofundado dos problemas dos alunos, pode ser uma das vias para o estabelecimento desse debate. É com esse objetivo que trazemos este relato das experiências por nós realizadas.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da FAPERGS à realização da pesquisa sobre erros, na qual contamos com o auxílio da bolsista Mariana Cassol, que recebeu bolsa de Iniciação Científica para o projeto “Erros de cálculo em cursos de serviço”.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATISTA, Cecília G. Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas. *Zetetiké*, v. 3, n.4, p. 61-72, nov. 1995.
- BATHELT, Regina E. **Erros e concepções de alunos sobre a idéia de número**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.
- BORASI, Raffaella. Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.7, n. 3-4, p. 1-14, 1985.
- _____. Sbagliando s’impara: alternative per um uso positivo degli errorri nella didattica della matematica. *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, v. 11, n. 4, p. 365-404, apr. 1988.
- CURY, Helena Noronha. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.



_____. **Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral:** análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990. Relatório de pesquisa.

_____. Estilos de aprendizagem de alunos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 28, 2000, Ouro Preto. **Anais.** Ouro Preto: UFMG, 2000. CD-ROM.

FELDER, R. M. et al. The future of engineering education II: teaching methods that work. **Chemical Engineering Education**, v. 34, n.1, p. 26-39, 2000. Disponível em <<http://www.ncsu.edu/felder-public/Papers/Quartet2.pdf>> Acesso em: 01 jun. 2003.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; COELHO, C. Tendências atuais do ensino das disciplinas da área de matemática nos cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 27, 1999, Natal. **Anais.** Natal: UFRN, 1999. CD-ROM.

GUIMARÃES, O. L. C. Cálculo diferencial e integral: do algebrismo às representações múltiplas. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25, 2002, Caxambu. **Anais.** Caxambu: ANPED, 2002. Disponível em : <<http://www.anped.org.br>> Acesso em: 01 jun. 2003.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In: LAUDARES, J.B., LACHINI, J. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-190.

NASCIMENTO, J. L. do. Uma metodologia para o cálculo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 28, 2000, Ouro Preto. **Anais.** Ouro Preto: UFMG, 2000. CD-ROM.

_____. Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 29, 2001, Porto Alegre. **Anais.** Porto Alegre: PUCRS, 2001. CD-ROM.

RADATZ, Hendrik. Students'errors in the mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Mathematics**, v.1, n.1, p.16-20, July 1980.

SALVADOR, J. A. et al. Integração de cálculo e física nos cursos de engenharia da UFSCar. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 27, 1999, Natal. **Anais.** Natal: UFRN, 1999. CD-ROM.

ERROR ANALYSIS IN INTEGRAL AND DIFFERENTIAL CALCULUS: RESULTS FROM RESEARCHES IN ENGINEERING COURSES

Abstract: *Error analysis is an research approach that has been used in mathematics teaching since the beginning of the twentieth century. It can be employed to eliminate errors or to exploit them, allowing students to discover their difficulties. Researching errors in math tests, in or outside classes, we observed that generally students do not have prerequisites in basic algebra and plane geometry, as well as in trigonometry and space geometry. This problem, added to difficulties of abstraction and generalisation, also co-operates to drop out of these*



courses. In this paper, we present a synthesis of researches in error analysis, specially bringing results from works focusing calculus' students in engineering courses. The context is the new chemical engineering course at PUCRS and we discuss error analysis in tests and in individual and group works. Data are presented in tables and some typical cases are deeply analysed, to consider possible causes and to suggest strategies to work with errors.

Key-words: *Error analysis, Integral and differential calculus, Engineering courses.*