



MODELAMENTO PARAMÉTRICO DE CURVAS E SUPERFÍCIES

Fábio Gonçalves Teixeira – fabiogt@ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Departamento de Expressão Gráfica
Rua Sarmiento Leite, 320/504, Centro
90050-170 – Porto Alegre, RS

***Resumo:** O modelamento geométrico de curvas e superfícies tem fundamental importância em diversas áreas de Engenharia, Arquitetura e Computação Gráfica. A análise de estruturas, o projeto e a simulação computacional utilizam-se do modelamento geométrico de superfícies. A geometria euclidiana apresenta limitações quando se trata de simulação computacional. Assim, o modelamento através de equações paramétricas, onde as variáveis tridimensionais tornam-se independentes, apresenta um grande potencial para o modelamento geométrico de curvas e superfícies. Este trabalho apresenta as vantagens e algumas implementações computacionais para o modelamento geométrico de superfícies através de equações paramétricas. Com de curvas e superfícies paramétricas, é possível gerar modelos geométricos computacionais para as mais diversas aplicações. No ensino de expressão gráfica para Engenharia, principalmente em Geometria Descritiva, é possível combinar as duas formas de representação de superfícies (tradicional e paramétrica) para que o aluno desenvolva os conhecimentos matemáticos que embasam a representação tradicional e, muitas vezes, tornam possível sua aplicação. Por outro lado, é possível também encontrar semelhanças entre a representação paramétrica, que começou a ser desenvolvida há quatro décadas, com a representação mongeana do século XVIII. Este trabalho faz este paralelo e propõe a aplicação de representações paramétricas para o ensino de geometria plana e espacial.*

***Palavras-chave:** curvas paramétricas, superfícies paramétricas*

1. INTRODUÇÃO

A representação matemática de curvas e superfícies é fundamental na criação de sistemas computacionais de modelamento geométrico tridimensional. A forma tradicional, através de funções implícitas, é limitada, principalmente em se tratando de representações tridimensionais. Muitas curvas e superfícies sequer possuem representações na forma implícita em \mathcal{R}^3 , que o caso da reta, por exemplo. Estas limitações tornam-se críticas em aplicações computacionais, onde situações particulares comprometem a robustez das implementações.

A representação paramétrica tem a grande vantagem de tornar independente a representação em cada eixo de coordenadas. Assim, a representação de uma curva tridimensional pode ser definida da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (01)$$

onde cada coordenada possui uma equação função de um parâmetro t comum com um certo intervalo de variação, que irá depender da forma de parametrização. Esta é uma forma extremamente robusta para aplicações computacionais, pois permite uma definição precisa de domínio, além de evitar problemas como singularidades e indeterminações.

Neste trabalho serão mostradas algumas formas paramétricas de curvas e superfícies e algumas aplicações no modelamento de superfícies, através de uma implementação computacional. Além disso, será feito um paralelo com a geração e representação mongeana de superfícies.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A representação paramétrica de curvas e superfícies constitui uma ferramenta corrente em computação gráfica, principalmente em CADs. Técnicas que foram desenvolvidas para modelar fuselagens de aviões e carrocerias de automóveis são utilizadas hoje em diversas áreas da computação gráfica.

Uma das mais conhecidas representações paramétricas é o Bézier *path*, desenvolvido de forma independente, em 1962, por Pierre Bézier (Bézier, 1966 e 1972), para uso no projeto das carrocerias dos carros da Renault, e por De Casteljau, em 1959, para a Citroën. O nome foi atribuído a Bézier por seu trabalho ter sido divulgado antes. Seu CAD, o UNISURF (Bézier, 1971), foi utilizado no projeto da maioria dos modelos de carros da Renault nos anos 70.

Posteriormente, foram desenvolvidas outras formulações para representação paramétrica de superfícies. *Paths* B-Splines (DeBoor, 1972 e Riesenfeld, 1973) e *Non-Uniform Rational B-Splines*, conhecidas como NURBS (Versprille, 1973 e Tiller, 1983, 1986), são exemplos da evolução da representação paramétrica de superfícies e permitem o modelamento de geometrias complexas, principalmente superfícies do tipo *free-form*. As superfícies Coons (Coons, 1964 e 1967) são outra forma de representação paramétrica que utilizam mapeamento transfinito entre curvas de bordo que podem ser de qualquer tipo desde que possuam representação paramétrica. Os *paths* gerados por *Sweep* (Bloomenthal and Riesenfeld, 1991, Coquillart, 1987, e Rogers, 1990) são outra forma de representação paramétrica de superfícies. Nesse caso a superfície é gerada pelo deslocamento de uma curva perfil sobre uma curva caminho. O tipo de deslocamento efetuado pela curva define o tipo de *Sweep*. Siltanen and Woodward (1992) e Ueng and LAI (1998) também abordam esse tema. As superfícies de revolução podem ser consideradas como um caso particular de *Sweep*.

3. CURVAS PARAMÉTRICAS

A representações paramétricas, em geral, utilizam pontos de controle e funções de peso (*blending functions*) que estabelecem relações de proporcionalidade entre os mesmos. Uma representação genérica de uma curva seria:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \cdot \mathbf{P}_i \quad (02)$$

onde $B_i(t)$ são as funções de peso e \mathbf{P}_i os pontos de controle utilizados para representar a curva. Para ilustrar este processo serão definidas as representações paramétricas de algumas curvas no espaço 2D e 3D.

3.1 Parametrização de um segmento de reta

A representação paramétrica da reta torna possível representações tridimensionais de qualquer segmento de reta. A parametrização é feita através de funções lineares que interpolam dois pontos de controle que são as extremidades do segmento. Considerando-se \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 como os pontos de controle, pode-se representar um segmento de reta na seguinte forma paramétrica:

$$\mathbf{R}(t) = (1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t \cdot \mathbf{P}_2 \quad (03)$$

onde $t \in [0,1]$. A equação 3 está na forma vetorial, mas é possível expandir a representação:

$$\begin{aligned} x_R(t) &= (1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2 \\ y_R(t) &= (1-t) \cdot y_1 + t \cdot y_2 \\ z_R(t) &= (1-t) \cdot z_1 + t \cdot z_2 \end{aligned} \quad (04)$$

Na equação 3, pode-se verificar a correção da representação utilizando valores de t onde a função é conhecida: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_2$ e $\mathbf{R}(0,5) = 0,5 \cdot \mathbf{P}_1 + 0,5 \cdot \mathbf{P}_2$, que é o ponto médio entre as duas extremidades. Este tipo de representação é equivalente à representação utilizada na geometria descritiva na forma gráfica que utiliza sempre dois pontos para definir uma reta.

3.2 Parametrização de um arco de circunferência

A equação paramétrica de uma circunferência só é possível, de forma exata, no plano. Neste caso, a generalização para o espaço tridimensional pode ser feita com a utilização de um sistema de referência auxiliar acoplado ao arco. A parametrização de um arco é feita em função da própria definição de seno e co-seno. Assim, considerando-se um arco com centro na origem, pode-se definir a seguinte representação:

$$\mathbf{A}_0(t) = [R \cdot \cos \alpha(t), R \cdot \sin \alpha(t)], \quad (05)$$

$$\alpha(t) = \alpha_i + (\alpha_f - \alpha_i) \cdot t, \quad (06)$$

onde R é o raio do arco, α_i e α_f são, respectivamente, os ângulos inicial e final do arco e $t \in [0,1]$. Para representar um arco com centro em posição distinta da origem, basta somar à equação 5 as coordenadas do centro (C) do arco:

$$\mathbf{A}_C(t) = \mathbf{C} + \mathbf{A}_0(t) \quad (07)$$

A equação 7 é a representação paramétrica de um arco no plano xy . Uma representação no espaço 3D exige um sistema de referência auxiliar acoplado ao plano do arco. Considerando um sistema de referência auxiliar S_{Arco} , pode-se considerar que uma equação paramétrica de um arco no espaço 3D é:

$$\mathbf{A}(t) = S_{Arco} \cdot \mathbf{Global}(\mathbf{A}_C(t)), \quad (08)$$

onde $\mathbf{Global}(\cdot)$ é uma função que converte as coordenadas do sistema de referência local do arco para o sistema de referência global. Desta forma, é possível representar arcos e circunferências em qualquer posição no espaço.

3.2 Parametrização de um curva 3D interpoladora

O uso de curvas para representar situações do mundo real pode exigir a representação de curvas interpoladoras no espaço 3D. As curvas tipo spline, em geral, permitem representações 3D, mas na maioria dos casos, os pontos de controle não estão sobre a curva. A spline desenvolvida por CATMULL and ROM (1974) possui os pontos de controle sobre a curva, com exceção do primeiro e do último ponto que definem as tangentes nas extremidades. A direção da tangente à curva em um ponto de controle P_i é dada pelo vetor $P_{i+1} - P_{i-1}$. A equação paramétrica fica assim definida:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \mathbf{P}_{i+2} \end{bmatrix} \quad (09)$$

A equação 9 define um trecho de curva entre os pontos P_i e P_{i+1} , sendo os outros pontos responsáveis pelas direções das tangentes. Uma curva com mais de 4 pontos de controle pode ser gerada pelo acoplamento de trechos sucessivos utilizando a mesma equação. Assim, uma curva com n pontos de controle terá $n - 3$ trechos.

Este tipo de curva foi desenvolvido para utilização em computação gráfica porque permite representar formas livres, o que é de grande utilidade em sistemas de modelamento geométrico utilizados na indústria automobilística e aeroespacial. De fato, conforme a implementação computacional, podem-se gerar curvas 3D em tempo real através de manipulação direta com grande facilidade.

3.3 Representação Paramétrica de Superfícies

A representação paramétrica de superfícies é uma alternativa extremamente prática e conveniente para aplicação computacional. De forma idêntica à representação paramétrica de curvas, as superfícies são representadas por equações paramétricas independentes para cada

dimensão. Nesse caso, o espaço paramétrico é bidimensional e a representação genérica de uma superfície fica da forma:

$$S(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \quad (10)$$

onde s e t são parâmetros que, normalmente, variam entre 0 e 1. Essa forma de representação relaciona dois espaços: o espaço paramétrico (bidimensional) e o espaço real (tridimensional).

No espaço paramétrico, a superfície é um quadrado com uma unidade de lado. No espaço real, a superfície assume forma descrita nas equações paramétricas, no entanto, seu domínio permanece quadrilátero. Uma maneira usual de fugir dessa limitação é recortar a superfície, criando domínios mais complexos. As superfícies recortadas (*trimmed surfaces*) apresentam como propriedades funções que definem as linhas de corte. Essas funções devem ser definidas no espaço paramétrico e podem ser obtidas a partir de algoritmos de interseção entre superfícies ou inseridas como lei de geração de um objeto.

Neste trabalho, são apresentados alguns exemplos de superfícies paramétricas quadriláteras, sendo que todas utilizam, com base, linhas paramétricas. São apresentadas superfícies lineares (planas e regradas), superfícies Coons, superfícies de revolução e superfícies *Sweep*.

3.4 Superfícies Lineares

Superfícies lineares são obtidas pela interpolação linear entre contornos. Um exemplo é uma superfície definida por quatro pontos ($P_i, i = 1 \dots 4$). Por ser linear, a forma paramétrica é uma expansão da representação do segmento de reta:

$$Q(s, t) = (1 - t)((1 - s) \cdot P_1 + s \cdot P_2) + t \cdot ((1 - s) \cdot P_4 + s \cdot P_3) \quad (11)$$

Os pontos de controle podem estar em um mesmo plano, gerando uma superfície plana. Os pontos podem não formar plano, gerando superfícies curvas, como o parabolóide hiperbólico (fig. 1), que é estudado em geometria descritiva com uma superfície regradada reversa (que não pode ser planificada).

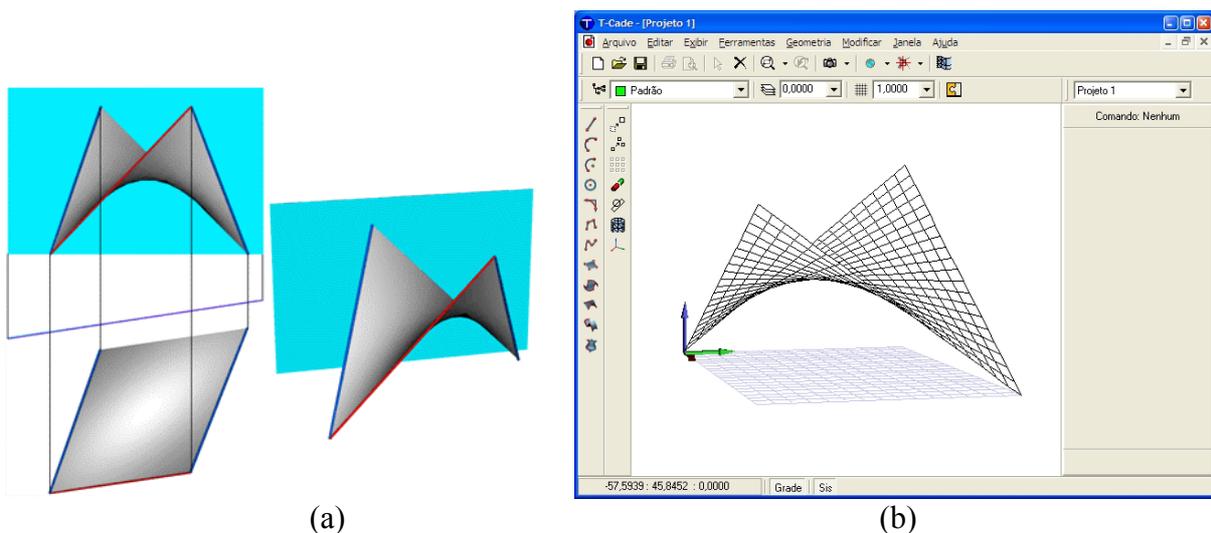


Figura 1. Representação mongeana (a) e computacional (b) de um parabolóide hiperbólico.

Um outro exemplo de superfície linear são as superfícies geradas pela interpolação linear entre duas curvas de bordo. Na representação paramétrica, as curvas de bordo substituem os pontos de controle na equação paramétrica da reta (03), gerando a equação 12:

$$\mathbf{R}(s, t) = (1 - t) \cdot \mathbf{C}_1(s) + t \cdot \mathbf{C}_2(s) \quad (12)$$

onde C_1 e C_2 são as representações paramétricas das curvas de bordo. A forma da superfície gerada irá depender da forma das curvas de bordo e de suas posições. Muitas formas conhecidas podem ser geradas com este tipo de representação que extremamente útil em modelagem 3D. Este tipo de superfície é estudado em geometria descritiva e sua geração gráfica é a forma descritiva da equação (12), pois a representação é feita através de segmentos retos que unem duas curvas de bordo.

3.5 Superfícies Coons

As superfícies Coons (Coons, 1961) são superfícies paramétricas geradas a partir de linhas de contorno utilizando mapeamento transfinito. São necessárias quatro linhas de contorno para gerar uma superfície Coons. Cada uma dessas quatro linhas deve estar conectada às 2 linhas adjacentes pelos pontos de extremidades. As linhas de contorno podem ter parametrizações genéricas. A equação paramétrica da superfície Coons fica a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s, t) = & (1-t) \mathbf{P}_1(s) + t \mathbf{P}_3(s) + (1-s) \mathbf{P}_4(t) + s \mathbf{P}_2(t) \\ & - (1-s)(1-t) \mathbf{X}_1 - s(1-t) \mathbf{X}_3 - (1-s)t \mathbf{X}_2 - st \mathbf{X}_4 \end{aligned} \quad (13)$$

onde P_i são as equações paramétricas das curvas de bordo e X_i são os vértices do contorno. A equação 13 representa superfícies Coons lineares com domínios quadrados, mas existem superfícies Coons quadráticas e os domínios também podem ser triangulares (ROGERS and ADAMS, 1990).

As superfícies Coons são utilizadas em CAGD¹ na modelagem 3D de superfícies devido à facilidade de criação de superfícies complexas a partir das curvas de contorno.

3.6 Superfícies de Revolução

Superfícies de revolução ocorrem com muita frequência em diversos tipos de peças e dispositivos fabricados pelo homem, tais como elementos de máquinas, na indústria mecânica, além de elementos construtivos, na indústria da construção civil. Assim, é indispensável a implementação de superfícies de revolução em um programa que seja utilizado para o modelamento de objetos do mundo real.

Nesse tipo de superfície, uma linha perfil sofre uma revolução em torno de um eixo. Considerando-se um eixo vertical, é possível resumir a equação paramétrica de uma superfície de revolução da seguinte forma:

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{T}(s) \quad (14)$$

onde $P(t)$ é a equação paramétrica da linha de perfil que sofre a revolução. $T(s)$ é a função paramétrica que realiza uma transformação de revolução em $P(t)$. O processo é simples se a

¹ *Computer Aided Geometric Design*

revolução é realizada em relação ao eixo Z, quando a função de revolução adquire a seguinte forma:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \cos\phi(s) & \sin\phi(s) & 0 \\ -\sin\phi(s) & \cos\phi(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde $\phi(s)$ é a função que define o ângulo de rotação em função do parâmetro s . O processo torna-se complexo quando o eixo de revolução adquire uma posição genérica. A abordagem tradicional para esse caso (Rogers, 1990) utiliza três rotações e uma translação para criar uma matriz de transformação genérica.

Um alternativa é a utilização de um sistema de coordenadas acoplado ao eixo de rotação, o que pode tornar o processo quase tão simples quanto a rotação em torno do eixo z (fig. 2). A transformação de rotação é realizada no sistema auxiliar e o resultado é transferido para o sistema de referência do global. A equação paramétrica da superfície de revolução fica assim definida:

$$\mathbf{R}(s, t) = S_e \cdot \mathbf{Global}(S_e \cdot \mathbf{Local}(\mathbf{P}(t)) \cdot \mathbf{T}(s)) \quad (16)$$

onde S_e é o sistema de referência acoplado ao eixo de tal forma que este coincida com o z do sistema local. Global e Local são funções que realizam as transformações entre os sistemas de referência. $\mathbf{T}(s)$ é obtido pela equação 15.

A representação mongeana de superfícies de revolução segue a forma descritiva da equação (16). O papel desempenhado pelo sistema de referência auxiliar S_e é realizado por uma mudança de plano de projeção com plano auxiliar perpendicular ao eixo de revolução.

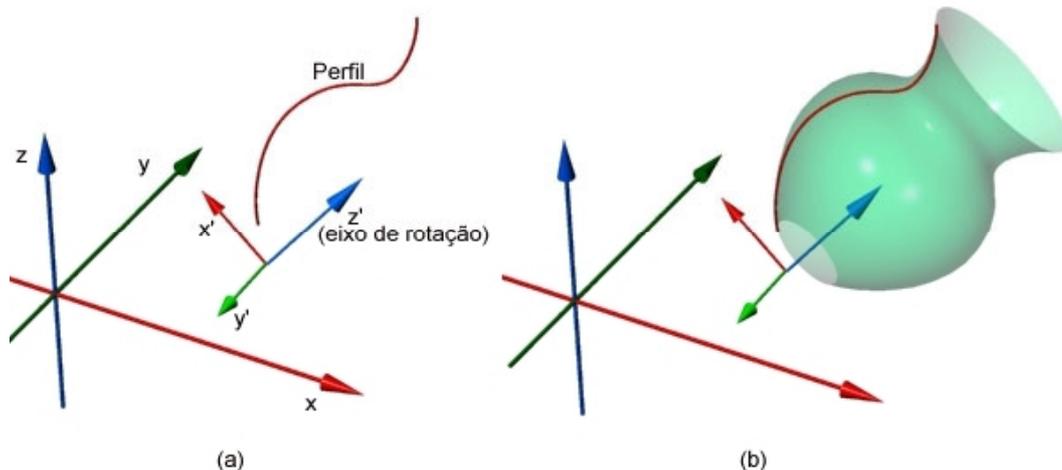


Figura 2. Procedimento para criar uma superfície de revolução: a) Sistema de referência auxiliar onde o eixo de rotação define o eixo z' . b) Superfície de revolução gerada a partir do perfil.

3.7 Superfícies Sweep

A superfícies denominadas sweep são resultado de uma extrusão de uma curva de *forma* através de uma curva *caminho*. Este processo permite grande flexibilidade na criação de formas.

Uma forma de representação usual é utilizar um sistema de coordenadas auxiliar que se desloca ao longo da curva caminho, de tal forma que o eixo x local seja coincidente com a

direção da tangente à curva. O processo se completa transferindo as coordenadas da curva de forma para estes sistemas locais e, em seguida, transpondo para o sistema Global. A representação pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\mathbf{F}(s,t) = S_C(s).\mathbf{Global}(S_O.\mathbf{Local}(\mathbf{F}(t))) \quad (17)$$

onde $S_C(s)$ é o sistema de referência que se desloca ao longo da curva caminho e S_O é o sistema de referência na início da curva caminho de tal forma que $S_O = S_C(0)$. $F(t)$ é a curva de forma.

4. EXEMPLOS

As representação paramétrica de curvas e superfícies é utilizada para modelamento geométrico computacional devido à grande flexibilidade de formas que podem ser criadas, além das vantagens já mencionadas em relação à formulação implícita. Nesta seção são apresentados alguns exemplos de geometrias construídas com superfícies paramétricas em uma implementação computacional tipo CAD.

O programa foi implementado na linguagem Borland Delphi[®], utilizando orientação a objetos, onde cada tipo de linha e superfície constitui uma classe de objetos geométricos. A orientação a objetos facilita muito o processo de implementação. Um exemplo disto é o recurso de herança que permite a criação de classes derivadas de classes já existentes, sem a necessidade de rescrever código, pois as classes filhas herdam as propriedades e os métodos da classe mãe.

O exemplo 1 (fig. 3.a) mostra dois cilindros de mesmo diâmetro e eixos perpendiculares gerados como superfícies de revolução. O exemplo 2 (fig.3.b) é um tubo circular gerado como superfície sweep utilizando uma circunferência como curva de forma e uma spline como caminho.

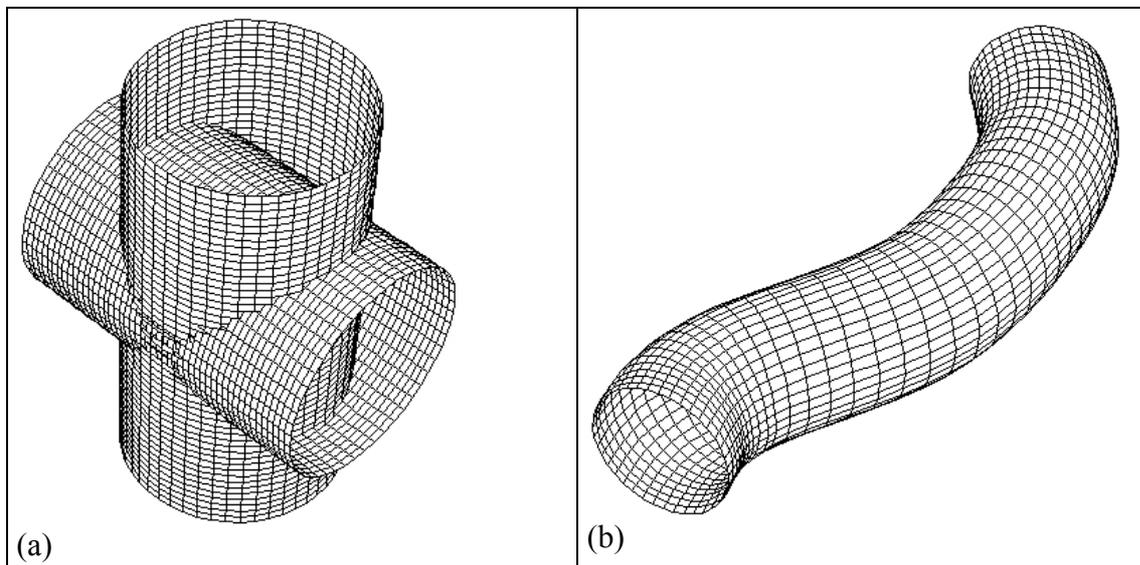


Figura 3. a) Exemplo 1: dois cilindros gerados como superfície de revolução. b) Exemplo 2: tubo gerado por sweep.

O exemplo 3 (fig. 4.a) mostra um cilindro e um toro gerados como superfícies de revolução. O cilindro é gerado pela revolução de uma reta paralela ao eixo e o toro é gerado pela revolução de uma circunferência coplanar ao eixo. O exemplo 4 (fig.4.b) apresenta a

geometria de uma turbina de avião (*turbofan*) com superfícies de revolução. A parte externa foi criada com a revolução de uma spline Catmull-Rom.

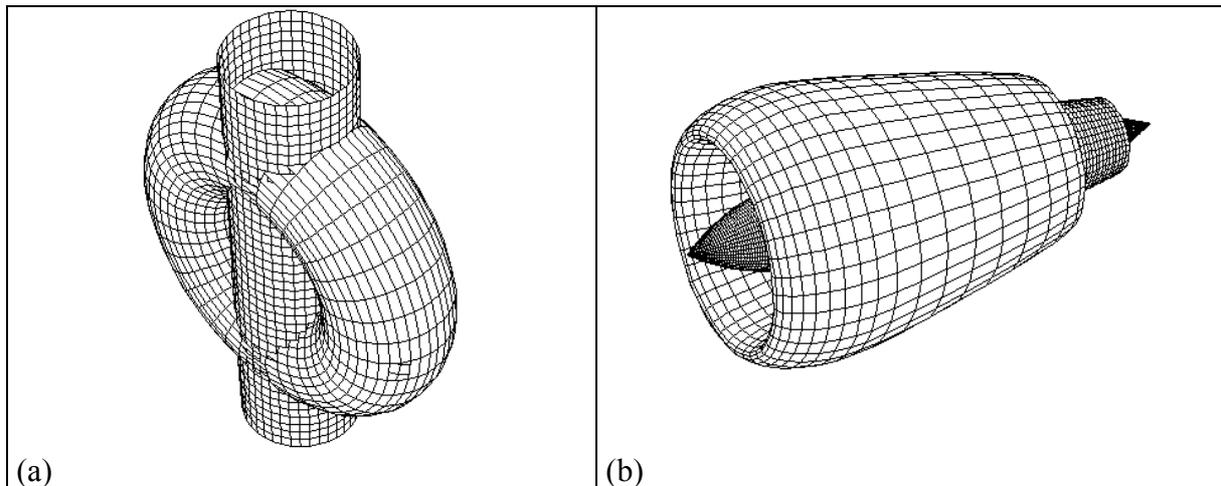


Figura 4. a) Exemplo 3: cilindro e toro gerados por superfície de revolução. b) Exemplo 4: Turbina gerada com superfícies de revolução.

O exemplo 5 (fig. 5.a) apresenta uma superfície Coons gerada a partir de quatro linhas spline. O exemplo 6 (fig. 5.b) mostra uma superfície composta por dois retalhos: um de superfície regrada e outro de revolução.

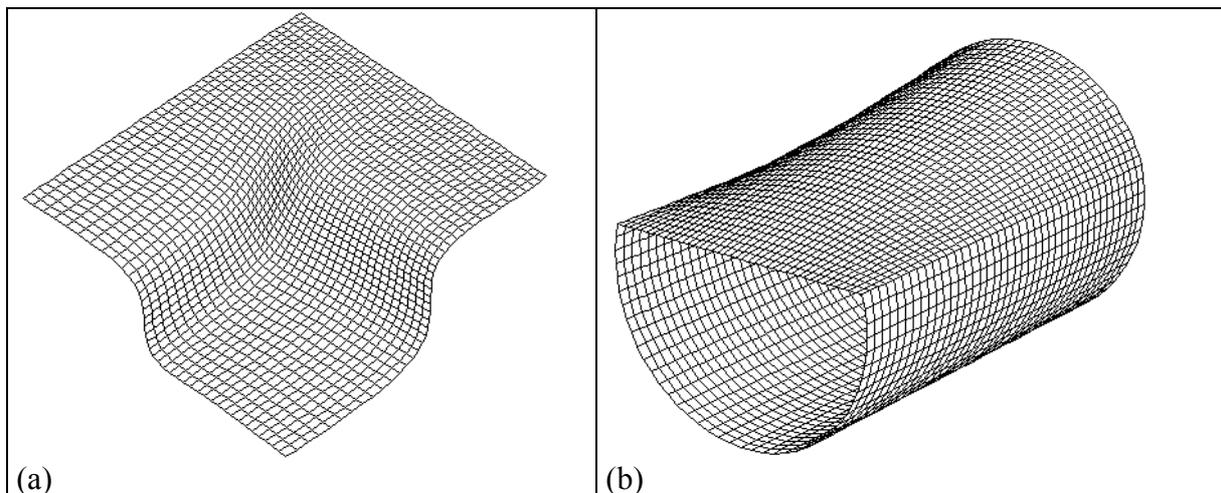


Figura 5. a) Exemplo 5: superfícies Coons. b) Exemplo 6: superfície composta de dois trechos (revolução e regrada).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A representação paramétrica de curvas e superfícies constitui uma importante ferramenta para aplicações computacionais de modelamento geométrico. Os exemplos demonstram a versatilidade deste tipo de ferramenta para o modelamento de superfícies. Geometrias complexas podem ser modeladas a partir de curvas simples e pela composição com retalhos de superfícies paramétricas. Estes retalhos podem ser obtidos a partir de linhas de interseção entre superfícies, por exemplo. Este é um problema complexo que tem a sua solução facilitada com o uso de superfícies paramétricas. Com isto, é possível implementar sistemas de modelamento geométrico para uso em computação gráfica, CAD (*Computer Aided Design*) e

CAE (*Computer Aided Engineering*), podendo-se utilizar técnicas B-Rep (*Boundary Representation*) ou CSG (*Constructive Solid Geometry*).

Por outro lado, o potencial para o ensino de geometria plana e espacial e geometria descritiva é muito grande. As representações paramétricas constituem, para todas os tipos de superfícies estudadas em geometria descritiva, as formas vetoriais equivalentes aos processos de geração utilizados por Monge. Desta forma, é possível incrementar o processo de ensino-aprendizagem utilizando as duas formas de representação. Isto poderia ser feito utilizando a representação paramétrica para fundamentar a conceituação teórica e a forma descritiva para exercícios práticos.

Já existe uma iniciativa de uso de modelos virtuais para ensino de geometria descritiva, o HyperCAL^{GD} (Teixeira *et al*, 1999). O HyperCALGD tem sido utilizado com sucesso no ensino de superfícies com o uso de hipertexto, animações 2D e 3D e realidade virtual. Nas próximas versões do programa, pretende-se agregar funções onde o aluno poderá criar desenhos e resolver problemas com superfícies. Esta será a grande oportunidade de introduzir a representação paramétrico no ensino de geometria descritiva.

REFERÊNCIAS

- BÉZIER, P. E. Définition numérique des courbes et surfaces. **Automatisme**, XI:625-632, 1966.
- BÉZIER, P. E. Example of na Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System. **Proc. Roy. Soc.**, A321:197-205, London, 1971.
- BÉZIER, P. E. **Numerical Control: Mathematics and Applications**. Chichester: Wiley, 1972.
- BLOOMENTHAL, M., RIESENFEL, R.F. Aproximation of sweep surfaces by tensor product NURBS. *Curves and Surfaces in Computer Vision na Graphics II*, SPIE Proc. (Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers), 1610:132-144, 1991.
- CATMULL, E., ROM, R. A class of local interpolation splines. In Barnhill R.E and R.F. Riesenfeld (eds.), **Computer Aided Geometric Design**, Academic Press, New York, 1974.
- COONS, S.A. Surfaces for Computer Aided Design. Technical Report, Design Division, Mech. Engin. Dept., M.I.T. Cambridge, Massachusetts, 1964.
- COONS, S.A. Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms. M.I.T. Proj. MAC, MAC-TR-41, June 1967.
- COQUILLART, S. A control-point-based sweeping technique. **IEEE Computer Graphics and Applications**, 7:11:36-45, 1987.
- DEBOOR, C. On calculating with B-Splines. **Journal of Approximation Theory**, 6(1):50-62, 1972.
- RIESENFELD, R. F. **Applications of B-Spline approximation to geometric problems of computer aided design**. 1973. PhD Thesis, Syracuse University, Syracuse, New York.
- ROGERS, D.F., ADAMS, J.A. **Mathematical Elements for Computer Graphics**. International Edition, McGraw-Hill, Singapore, 1990.
- SILTANEN, P., WOODWARD, C. Normal orientation methods for 3D offset curves, sweep surfaces and skinning. In: **Proceedings of Eurographics 92**, 11:3:449-457, 1992.
- TEIXEIRA, F. G., SILVA, R. P., SILVA, T. L. K. A Hypermedia Learning Environment for Descriptive Geometry. In: **Proceedings of ICEE 99** – International Conference on Engineer Education, Prague – Ostrava, 1999.
- TEIXEIRA, F.G. **Interface Gráfica para Geração de Modelos de Matrizes para Conformação Mecânica**. 2000, 25p, Seminário de Doutorado – Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.



- TILLER, W. Rational B-splines for curve and surface representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, V4:9:61-69, 1983.
- TILLER, W. Geometric modelling using NURBS. Mathematical techniques, SIGGRAPH *Tutorial Notes*, 1986.
- UENG, W., LAI, J. A sweep-surface fitting algorithm for reverse engineering. *Computers in Industry*, 35: 261–273, 1998.

PARAMETRIC MODELLING OF CURVES AND SURFACES

Abstract: The geometric modeling of curves and surfaces is very important to computer graphics, engineering, and architectural design. Structural analysis and computational simulations can use geometric modeling of surfaces. The usual representation by implicit functions has limitations to use in computational processes. The parametric form is the best way to represent and to manipulate curves and surfaces on computational simulations, because the coordinates are described by independent equations. This work presents the advantages and computational implementations for geometric modeling of parametric curves and parametric surfaces. Complex models can be created to several computational applications. The models are created in a CAD interface with interactivity in real time.

Key words: parametric curves, parametric surfaces, geometric modeling.