



IDENTIFICAÇÃO DE UM PÊNDULO INVERTIDO E SEU USO DIDÁTICO

Mauro Conti Pereira^{1,2} - mauro@lac.usp.br

¹Lab. de Automação e Controle, Depto. de Eng. de Telecomunicações e Controle, Escola Politécnica da USP, Caixa Postal 61548 - São Paulo, SP, Brasil - CEP 05424-970

²Curso de Eng. de Computação – Universidade Católica Dom Bosco –UCDB
Av.Tamandaré 6000 – Campo Grande, MS – CEP 79117-900

Cláudio Garcia¹ - clgarcia@lac.usp.br

Fabrizio Leonardi^{1,3,4,5} - fabrizio@lac.usp.br

³Faculdade de Engenharia da Pontifícia Universidade Católica de SP

⁴Depto de Engenharia Elétrica do Centro Universitário da FEI

⁵Depto de Eletricidade da Escola de Engenharia MAUÁ

***Resumo.** Este trabalho descreve um estudo sobre a identificação do modelo dinâmico de um pêndulo invertido proposto como projeto de uma disciplina de pós-graduação da EPUSP e como ele serviu como ponto de partida para a utilização do equipamento como ferramenta didática no curso de Controle Avançado do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Universitário da FEI. Discute-se a problemática da identificação com o uso de técnicas para modelos lineares aproximados e descreve-se como foram levantados os dados experimentais. Uma das motivações iniciais foi estudar o pêndulo invertido por assemelhar-se ao problema clássico de controle da atitude de um foguete no lançamento. Durante a fase de identificação vislumbramos as possibilidades didáticas e de pesquisa. Atualmente o equipamento já está inserido no contexto dos laboratórios da disciplina de Controle Avançado, em tópicos como modelagem, realimentação de estados e observadores. Uma variante do problema clássico vem sendo estudada num projeto de conclusão de curso.*

***Palavras-chave:** Controle, Identificação, Pêndulo, Didática*

1. INTRODUÇÃO

Um pêndulo invertido é intrinsecamente um sistema instável que requer um controlador para mantê-lo na posição vertical estável. Baseia-se no mesmo problema de controle de atitude de foguetes no lançamento. Ou seja, a partir do momento que é solto, ele tende a cair, a menos que se compense essa tendência.



Figura 1: sistema didático Bytronics PCS (BYTRONICS (1997)).

O sistema didático PCS (*pendulum control system*) da empresa britânica Bytronics baseia-se num carrinho preso a uma correia dentada, com um grau de liberdade, podendo mover-se num percurso de meio metro. No carro aloja-se um pêndulo pivotado, que pode cair para a direita ou para a esquerda, após ser solto. Mecanicamente existem 2 guias de fim de curso que limitam o movimento em cerca de 30° para cada lado a partir da normal. Na ponta da haste há um peso que faz com que o baricentro do pêndulo situe-se muito próximo à sua extremidade superior. Para que a haste permaneça na posição vertical, existe um controle analógico e uma interface para controle digital por meio de microcomputador, usando Simulink. A dinâmica do sistema é ditada pelo motor do carro e pela dinâmica do próprio pêndulo. O mesmo sistema pode ser usado de cabeça para baixo para modelar uma ponte rolante com massa na ponta, útil para levantar o modelo do pêndulo separado do motor e carrinho, mas não foi o objeto deste trabalho.

O fabricante fornece as funções de transferência aproximadas do conjunto. A malha de posição do carro pode ser aproximada por uma função de segunda ordem:

$$G(s) = 1 / (1 + 0.023s + 0.00027s^2)$$

O pêndulo pode ter sua função de transferência estimada, montando-o na posição não-invertida (ponte rolante), resultando em $G(s) = 1 / (1 + 0.0011s + 0.00264s^2)$

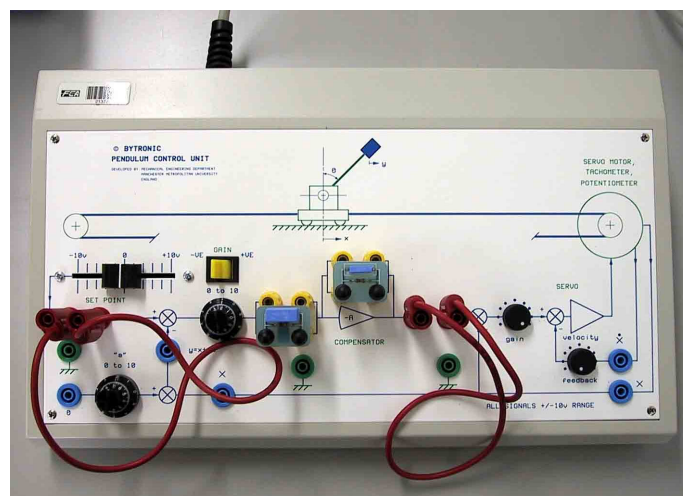


Figura 2: unidade de controle do kit didático.

Medição da posição da massa:

O carrinho deve se deslocar para compensar a tendência de queda do pêndulo, tendo como entrada a tensão de alimentação do servomotor. Definiu-se como objeto de controle a posição y da massa na ponta do pêndulo, indicada na figura. Contudo ela tem que ser obtida a partir de medições indiretas da posição do carro, x , e do ângulo formado pela haste com a normal à superfície, θ . Pela fórmula, $y = x + L \cdot \sin\theta$.

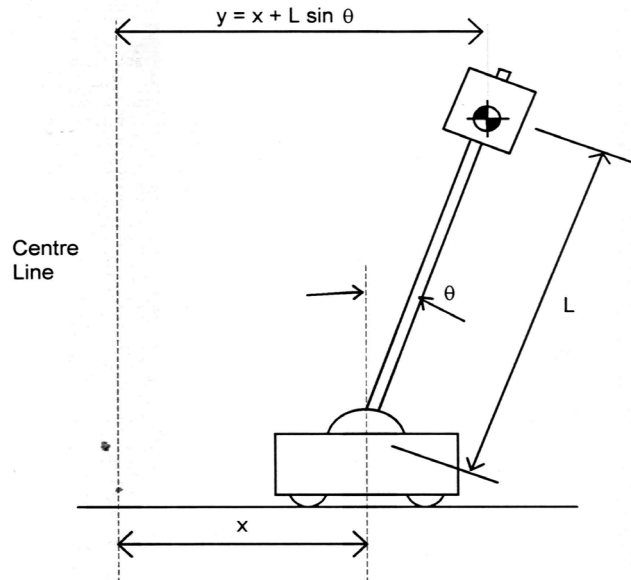


Figura 3: esquema do processo identificado. (BYTRONIX (1997))

A medição da posição x é feita por um potenciômetro, assim como o ângulo θ . Como existe uma malha de posição, a dinâmica desta malha é pequena em relação à do pêndulo. Assim, ela pode ser desprezada e a função de transferência da planta pode ser aproximada para $G_p(s) = 1 / (1 - 0.0264s^2)$. Pela análise do lugar geométrico das raízes, pode-se verificar que um dos pólos está no semi-plano direito, confirmando a ocorrência de instabilidade.

Linearização do modelo:

Altura da massa: $h=L \cdot \cos\theta$

G = baricentro do pêndulo (na massa na ponta livre)

x_G = posição horizontal do baricentro (saída y na identificação)

y_G = posição vertical do baricentro

x = posição do carro

m = massa da haste

M = massa do carro

g = aceleração da gravidade

u é a saída do controlador

Da 2ª lei de Newton:

$$M \cdot x'' + m \cdot x_G'' = u$$

(1)

Onde:

$$x_G = x + L \cdot \sin\theta$$



Desenvolvendo:

$$(M + m)x'' - m.L.\theta''.\text{sen}\theta + \theta''.\text{cos}\theta = u \quad (2)$$

Equações de movimento de rotação ao redor do ponto P (de engate da haste no carro) segunda 2ª lei de Newton:

$$m.x_G.L.\text{cos}\theta - m.y_G.L.\text{sen}\theta = m.g.L.\text{sen}\theta \quad (3)$$

Desenvolvendo:

$$m.x''.\text{cos}\theta + m.L.\theta'' = m.g.\text{sen}\theta \quad (4)$$

As equações do sistema pêndulo-carro envolvem $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$, portanto são não lineares. Para ângulos pequenos (menores que 0.5 radiano) podemos linearizar as curvas, aproximando: $\text{sen}\theta \approx \theta$ e $\text{cos}\theta \approx 1$ e $\theta.(\theta')^2 \approx 0$

Para ângulos menores que 15° podemos assumir sem problemas a linearização. Mesmo com 30° o erro de modelagem é pequeno, podendo considerar a diferença como perturbação. Assim, o kit que tem limite de fim-de-curso de 30° para cada lado consegue estabilizar-se a partir da posição de descanso (no caso do controle analógico, explicado na próxima seção).

Esta aproximação pode ser feita a partir da expansão por série de Taylor, ignorando os termos de ordem maior ou igual a 2, ou mesmo calculando-se os valores segundo a tabela 1 abaixo:

Tabela 1: comparação de $\text{sen}\theta$ com θ

θ	Rad	$\text{sen}\theta$	Erro	$\text{cos}\theta$	erro
30°	0.523	0.499	4.7%	0.866	13.4%
15°	0.262	0.259	1.2%	0.966	3.4%
10°	0.175	0.174	0.5%	0.984	1.6%
5°	0.087	0.087	0.1%	0.996	0.4%

Assim as equações 2 e 4 resultam:

$$(M+m).x'' + m.L.\theta'' = u \quad (5)$$

$$m.x'' + m.L.\theta'' = m.g.\theta \quad (6)$$

que juntas constituem o modelo matemático linearizado do sistema carro-pêndulo.

2. PROJETO DO EXPERIMENTO

Apesar de termos as equações da dinâmica do sistema, mostradas no item 1, foi desconsiderado este resultado para o levantamento dos modelos, adotando-se um modelo caixa-preta.

Como o sistema era instável em malha aberta, os experimentos foram feitos em malha fechada, mas com acesso à saída do controlador para se poder fazer identificação direta, como visto na figura 4. Caso contrário, para fazer identificação indireta deveria ser levantada a função de transferência aproximada do sistema como um todo, incluindo o controlador, e

seria necessário o conhecimento de sua $G_C(s)$ para recuperar a $G(s)$ da planta. Aliás, assume-se que $G_C(s)$ não é conhecido.

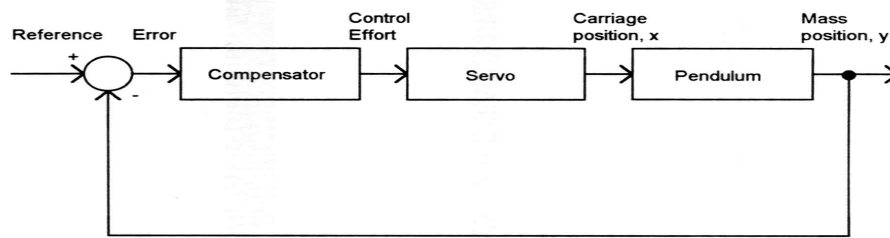


Figura 4: diagrama de blocos do sistema controlado

Usando-se o modelo de caixa preta, foi definida uma frequência de amostragem acima do necessário, para poder levantar a resposta impulsiva do sistema via análise de correlação para determinar a constante de tempo dominante do sistema e assim, o período de amostragem (normalmente dez vezes menor). Foram coletados pontos suficientes para a duração do experimento ser 5 vezes a constante de tempo.

A frequência foi conferida com o modelo aproximado da dinâmica fornecida pelo fabricante, por um sistema de segunda ordem. No caso, de $G_p(s) = 1 / (1 - 0,0264s^2)$, ou $G_p(s) = 37,9 / (37,9 - s^2)$

Isso resulta em pólos em +6,15 e em - 6,15. Como existe pólo no semi-plano direito confirma-se a instabilidade do sistema. Tem-se como modelo genérico de segunda ordem, $G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ onde:

ω_n é a frequência natural não amortecida

ζ é o coeficiente de amortecimento

No nosso caso não existe ζ , não existem pólos complexos conjugados, mostrando que o sistema cai sem amortecimento ao ser solto. Ele só para de cair por restrições físicas do sistema mecânico de construção. A frequência natural então é $\omega = 6,15$ rad/s, e a constante de tempo $T = 1,02$. Com isso o sistema deveria ser amostrado com taxa pelo menos dez vezes menor que a constante de tempo dada pelo pólo dominante.

Portanto a cada $1,02/10 = 0,102$ segundos, ou frequência de 9,8 Hz. A duração do experimento deveria ser com pelo menos 1000 pontos, portanto a 9,8Hz (0,102s) deveria durar 10,2 segundos.

Na realidade, para teste haviam sido implementados dois controles digitais implementados no Simulink. Um era uma cópia exata do controlador analógico, tipo avanço de fase, outro era projetado digitalmente. O primeiro tinha muita oscilação na operação em equilíbrio, mas era mais robusto. O controlador digital era mais preciso, tendo uma faixa menor de oscilação, mas para perturbações maiores não conseguia estabilizar o conjunto.

Para a coleta dos dados não foi usado nenhum controlador digital do Simulink, usou-se o controlador analógico do próprio kit, e o microcomputador apenas para a aquisição dos dados. O sistema foi montado e excitado com alguns valores de referência diferentes para a posição y da ponta livre do pêndulo, e como perturbação foram dados pequenos deslocamentos aleatórios nesta ponta, com o controlador rapidamente atuando para retomar a haste à posição de equilíbrio, na vertical.

Foram feitos 2 experimentos, por que no primeiro descobriu-se mais tarde, quando analisamos os dados, que havia um problema no potenciômetro sensor do ângulo vertical, que fazia com que a posição y saturasse num valor, prejudicando a identificação do modelo.

No primeiro experimento o sistema foi amostrado com 500 Hz, e então decimado. Foram levantados 60 segundos, mas os primeiros pontos foram aproveitados para selecionar as faixas de estimação e validação. Assim foi possível fazer validação cruzada com pontos diferentes do original usado para estimação.

No segundo experimento, para não precisar usar a decimação, foi reduzida a taxa de amostragem para 100 Hz (superior ao mínimo calculado de 9,8Hz). O experimento durou 30 segundos (maior que o mínimo calculado de 10,2 segundos).

A análise dos dados levantados foi feita de 2 maneiras, num primeiro momento através da interface do usuário (interativa) do *toolbox* de identificação do MATLAB, versão 5.3, e posteriormente através de comandos executados em um programa para o MATLAB.

Estruturas de modelo

A equação 7 descreve o comportamento de um sistema genérico com possível perturbação, para modelos do tipo erro de equação e erro na saída. Pode ou não haver presença de cada um dos polinômios no modelo adotado, resultando 32 combinações, mas as estruturas mais usadas estão resumidas na tabela 2.

Genericamente:

$$A(z). y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}. u(t) + \frac{C(z)}{D(z)}. \varepsilon(t) \quad (7)$$

Onde:

ε = erro ou perturbação

u = saída do controlador, entrada da planta

y = saída do sistema

A, B, C, D, F = polinômios em z

Tabela 2: resumo das estruturas mais usadas (adaptada de LLUNG (1999))

Polinômios usados (o resto é unitário)	Nome da estrutura do modelo
Estruturas de modelo do tipo erro de equação	
B	FIR (<i>finite impulse response</i>)
A,B	ARX
A,B,C	ARMAX
A,C	ARMA
A,B,D	ARARX
A,B,C,D	ARARMAX
Estruturas de modelo do tipo erro na saída	
B,F	OE (<i>output error</i>)
B,C,D,F	BJ (Box-Jenkins)

OBS: AR = *auto-regressive*

X = sofre influência exógena (perturbação)

MA = *moving average*

Por exemplo, um modelo ARX221 teria polinômio A de segunda ordem, resultando 2 zeros, polinômio B de segunda ordem, resultando 2 pólos. A equação de tal modelo no domínio do tempo resulta:

$$y(t) + a_1. y(t-1) + a_2. y(t-2) = b_1. u(t-1) + b_2. u(t-2) + 1. \varepsilon(t-1)$$



Critérios de Avaliação

Pode-se validar os dados com os mesmos dados usados para identificação (auto-validação) ou com dados diferentes (validação cruzada), o que é preferível. Diferentes critérios existem para minimizar o erro na validação, os mais comuns sendo o AIC (*Akaike's Information Criteria*) e o FPE (*Final Prediction Error*), conforme discutidos em AGUIRRE (2000) e GARCIA (2001). Ambos estão disponíveis em funções do *toolbox* de identificação do MATLAB, bem como o índice % FIT, de ajuste da curva por método de mínimos quadrados.

O sistema foi testado com validação cruzada, separando-se da coleta 1000 pontos para a identificação e 500 pontos seguintes para validação.

A partir dos dados coletados foi tentado aproximar o sistema por estruturas diversas, destacando-se ARX e ARMAX, de diversas ordens. Na interface de usuário foi tentada também a identificação paramétrica usando modelo de espaço de estados, mas a qualidade foi semelhante aos ARX e ARMAX, mas requerendo ordem maior, portanto nem foi feita sua implementação em programa.

3. GRÁFICOS E RESULTADOS

Inicialmente, vale apresentar a função de transferência do modelo aproximado fornecido pelo fabricante, amostrando em 100 Hz, para achar a função de transferência discreta e seus pólos e zeros.

$$G_p(z) = \frac{0.001895 (1-z)}{(z-1.0653) (z-0.9387)} \quad (7)$$

Assim, o sistema tem um zero e dois pólos, um deles fora do círculo de raio unitário, mostrando que o sistema é instável.

A seguir apresentamos os resultados da estimação e validação dos dados coletados da saída e entrada do sistema em malha fechada. Nas figuras 4 a 7 estão os gráficos da identificação e da validação dos dois melhores modelos.

Visualmente não há como decidir qual deles dá melhor resultado, portanto usamos os índices comparativos da Tabela 5 com resultados de alguns dos diversos modelos tentados, com seus critérios de comparação. Na tabela 6 encontra-se uma comparação do ajuste dessas curvas, e na tabela 7 seus pólos e zeros, para poder verificar se os pólos caem no semi-plano direito, já que o sistema em malha aberta é instável.

Observe que estes dados e gráficos apresentados são apenas os relativos ao segundo experimento, após a correção do problema do potenciômetro verificado no primeiro.

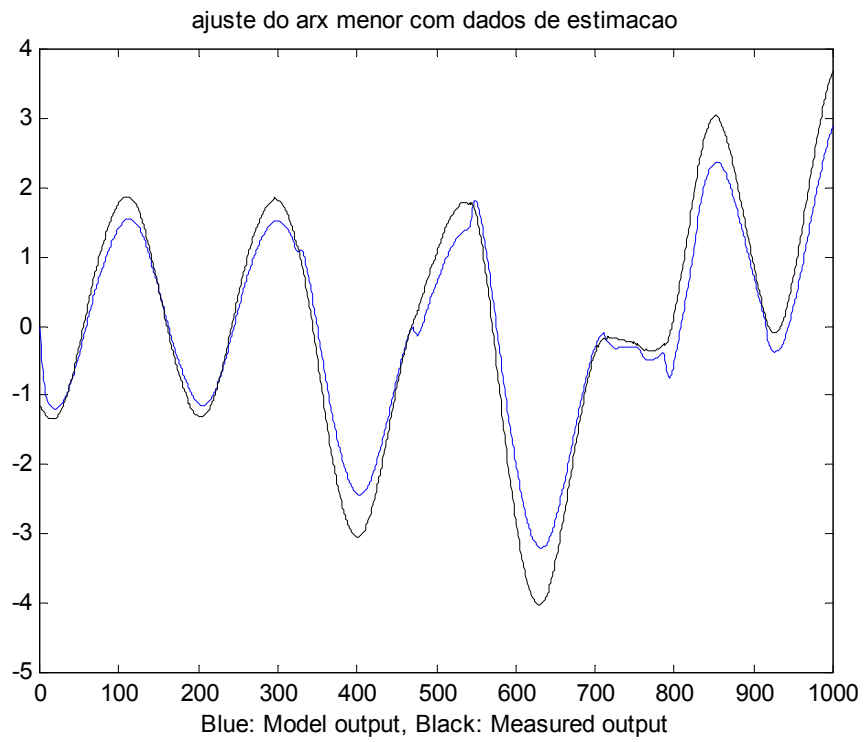


Figura 4: ajuste de ARX 221 na estimação.

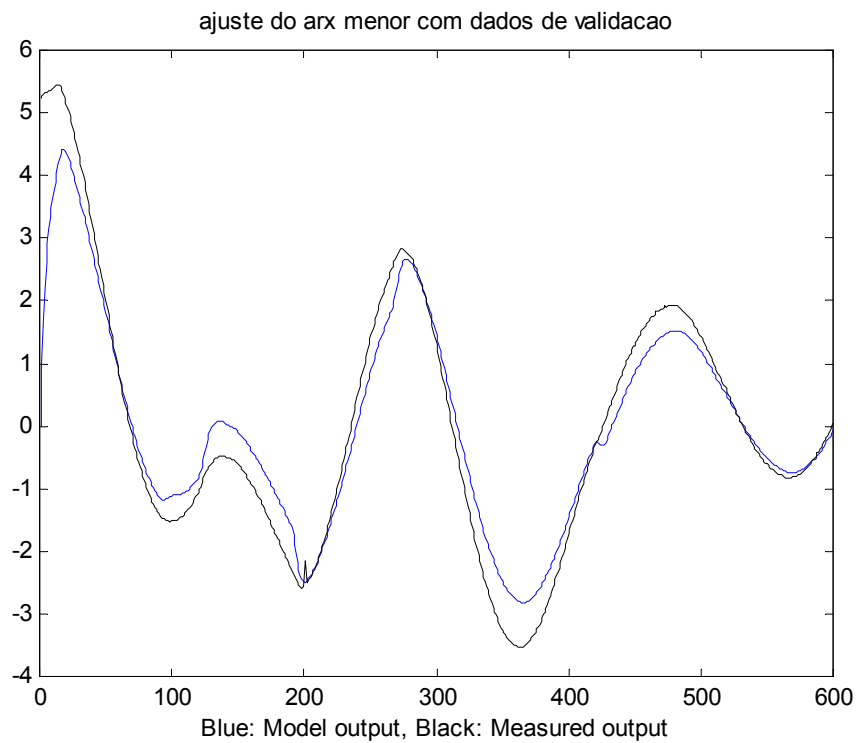


Figura 5: ajuste de ARX 221 na validação.

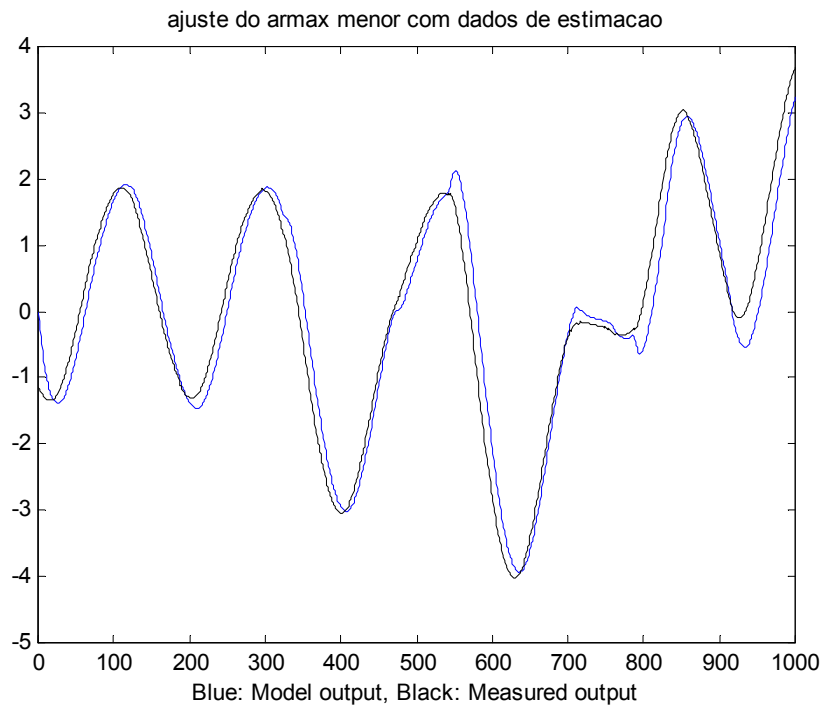


Figura 6: ajuste de ARMAX 2211 na estimação.

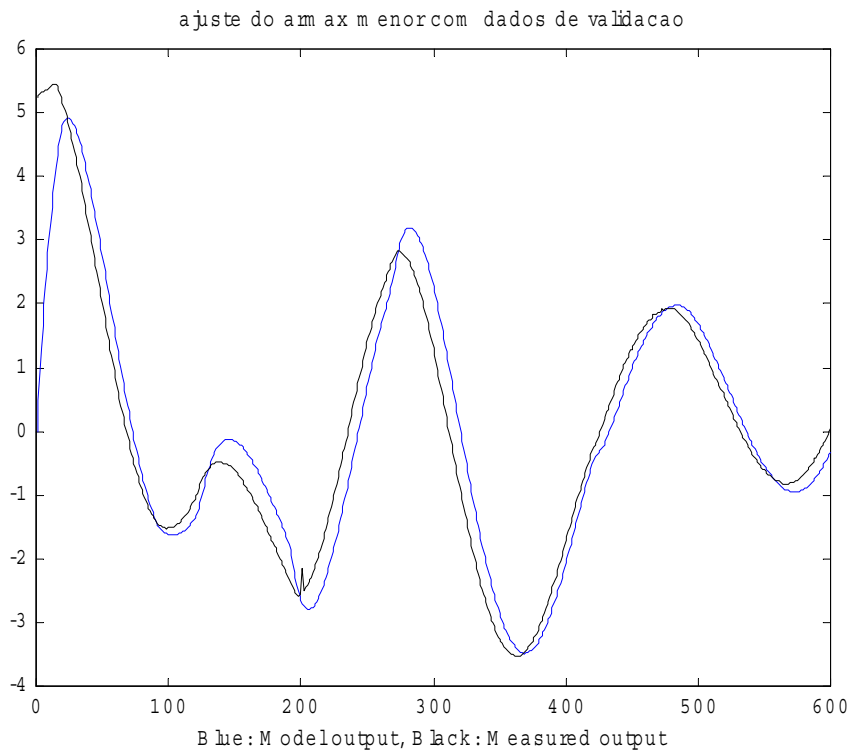


Figura 7: ajuste de ARMAX 2211 na validação.



Tabela 3: Comparação de índices

Modelo	Função perda	AIC	FPE
ARX221	3.6499	3.9540	1.3747
ARMAX3311	1.4501	1.6352	0.4916
ARMAX2211	0.0858	0.0930	-2.3754

Tabela 4: Percentual de coincidência (FIT) por faixa

Modelo	Estimação	Validação	Total
ARX221	82.4	87.0	84.0
ARMAX3311	74.4%	73.8%	74.2
ARMAX2211	78.9	81.6	79.9

Tabela 5: pólos e zeros estimados

Modelo	Pólos			Zeros	
ARX221	-1.734	0.00		0.737	0.00
ARMAX3311	-1.655	0.0	0.002	0.296	0.003 -0.002
ARMAX2211	-2.005	0.0		1.001	0.0

4. ASPECTOS DIDÁTICOS

O sistema de pêndulo invertido confere inúmeras possibilidades didáticas. Uma delas foi descrita em detalhes nas seções anteriores. Contudo existem várias outras possibilidades além da modelagem experimental.

Uma das complexidades inerentes ao sistema é que seu controle não pode ser feito por compensador meramente proporcional, uma vez que o caminho do lugar das raízes nunca está somente no SPE (semi-plano-esquerdo). Os alunos normalmente tendem a crer que um controlador proporcional de ganho muito elevado consegue controlar qualquer sistema, a exemplo do controle de velocidade. Isso não é verdade com o pêndulo e mostra que o conhecimento da teoria é decisivo para o sucesso do sistema de controle

Uma outra questão interessante é a validação do modelo (função de transferência) fenomenológico. Os alunos normalmente concluem que a melhor forma é comparar a resposta da planta com o modelo, excitando o modelo com a mesma entrada que está excitando a planta real (em malha fechada). Contudo, como o modelo é instável e sempre diferente da planta real, por conta dos erros de modelagem, a saída do modelo inevitavelmente tenderá para a saturação.

Note então que, questões muito simples de serem resolvidas para sistemas triviais, a exemplo do controle de velocidade e de posição de um motor, geram um grande número de possibilidades didáticas quando o pêndulo invertido é utilizado.

Atualmente o sistema de pêndulo invertido está inserido no contexto dos laboratórios da disciplina de Controle Avançado do UniFEI, em tópicos como modelagem, realimentação de estados e observadores.

5. CONCLUSÕES

Foi mostrado aqui o levantamento do modelo de um sistema de pêndulo invertido acoplado a um carro e suas possibilidades didáticas. Como se usaram técnicas de



identificação lineares, foi preciso linearizar o modelo utilizado, o que nos mostra que um modelo linear só seria válido para pequenas variações de ângulo da haste com a normal, onde pode se aproximar $\sin\theta \approx \theta$.

Para o primeiro experimento os resultados não foram tão bom quanto o esperado por falha na medição da saída, posição y da ponta livre da haste. Notou-se isto pelo fato das perturbações gerarem sempre saída para um único lado. Foi tentado ainda selecionar pontos na faixa de operação linear do ângulo, mas não se alterou o resultado. Pôde-se observar que as curvas calculadas baseadas nos modelos levantados e as curvas medidas não batiam, tanto visualmente quanto através de índices. Os resultados e comentários relativos a este experimento foram mantidos por nos parecer importantes. Os dados e gráficos foram suprimidos. O experimento foi então repetido, após checagem das placas e circuitos envolvidos, encontrando-se defeito no potenciômetro que media o ângulo da haste em relação à normal do carro, e também o resultado de y , posição da ponta livre.

O primeiro experimento tinha taxa de amostragem maior, e foi decidido decimar os pontos. Inicialmente pensou-se em decimar pontos para estimativa e validação interpolando-os, apenas deslocando algumas amostras umas em relação às outras. Mas devido à alta taxa inicial de amostragem, seriam praticamente os mesmo pontos, e a validação dava exatamente o mesmo resultado que as curvas da estimação. Foi resolvido então coletar em seqüência, primeiro 1000 pontos para estimar e os 500 seguintes para validar, isto depois de realizada a decimação. No segundo experimento usou-se taxa menor, sem necessidade de decimar, mas ainda suficiente para cobrir as dinâmicas do sistema.

Pode-se ainda ver que os pólos levantados são instáveis, confirmando a instabilidade prevista.

O modelo obtido foi mais próximo do real quando foram usados valores sem a média (incrementais) para a entrada e saída.

Foi ainda confirmado que não havia grandes diferenças de desempenho entre sistemas de ordem 2 e maiores. Isto se deve ao fato da imprecisão devida ao desvio padrão das medidas poder fazer com que os pólos e zeros levantados de sistemas de ordem maior se cancelassem, equivalendo ao de uma ordem menor.

Um resultado inesperado foi o de que um sistema de ordem maior, ARX558 selecionado pelas funções do MATLAB (selstruc e arxstruc) como de melhor ajuste ficou totalmente fora da curva medida. Observou-se que para o sistema em questão, o modelo ARX resultou melhor que o ARMAX e que o modelo de ordem 2 é suficiente. E os modelos de ordem 1 resultaram melhor que os de ordem 3.

Quanto aos aspectos didáticos discutiram-se algumas possibilidades quanto à validação do modelo, o projeto do compensador e como ele está inserido no curso de controle avançado do UniFEI.

6. BIBLIOGRAFIA

- AGUIRRE, L.A. **Introdução à Identificação de Sistemas** Belo Horizonte: EdUFMG, 2000.
- BYTRONIC INTERNATIONAL Ltd. **Documentation for the Bytronic Pendulum Control System**. England, 1997.
- DORF, R.C. e BISHOP, R.H. **Sistemas de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: LTC, 8ed., 2001.
- DRIELS, M. **Linear Control Systems Engineering**. New York: McGraw Hill, 1996.



GARCIA,C. **Notas de aulas da disciplina de Identificação de Sistemas**. São Paulo: USP, 2001.

LLUNG, L. **System Identification**. 2 Ed. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1999.

OGATA,K. **Modern Control Engineering**. Upple Saddle River, NJ : Prentice Hall, 3ed., 1997.

OGATA,K. **Designing Linear Control Systems with MATLAB**. Prentice Hall, Upple Saddle River, NJ, 1994.

Abstract. *This paper describes a study of the identification of the dynamic model of an inverted pendulum, done as a project for a graduate course at Escola Politécnica da USP, and how it served as a starting point for using this didactic kit at the Advanced Control course at the Electrical Engineering Department of Centro Universitário da FEI. It covers the identification using a linear model approximation, and how the experimental data was collected. The inverted pendulum is a classic problem due to its similarity to the problem of the attitude control of a rocket launching. During the identification phase the research and teaching possibilities were foreseen. Currently the kit is already inserted in the context of the labs for the Advanced Control discipline at FEI, in modeling, feedback and state observers. A variant of this classical problem is the focus of a graduation project.*

Keywords: *Control, Identification, Inverted Pendulum, Didactics*