



O PROBLEMA DE AUTOVALOR NA AVALIAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS DE EDIFICAÇÕES

José Guilherme Santos da Silva - jgss@uerj.br

Pedro Colmar G. da S. Vellasco - vellasco@uerj.br

Rita de Kassia D. Lopes - rita.lopes021@ig.com.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia, FEN

Rua São Francisco Xavier, N^o 524, Maracanã

CEP: 20550-900, Rio de Janeiro, RJ

Resumo: *O presente trabalho apresenta uma contribuição inicial acerca de dois aspectos: o primeiro diz respeito ao ensino de engenharia, com a aplicação de conceitos referentes ao problema clássico de autovalores e autovetores na avaliação de sistemas estruturais. O segundo ponto relevante a ser discutido, diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas, referentes a estruturas de aço. Na prática corrente de projeto, grande parte dessas ligações é representada por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maioria dos casos reais, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou seja: semi-rígido. Assim sendo, este trabalho tem por objetivo empregar conceitos básicos de álgebra linear, a partir do problema clássico de autovalores e autovetores, de forma a se analisar modelos estruturais de pórticos de aço correspondentes a uma edificação residencial existente. São investigadas as diferenças, qualitativas e quantitativas, existentes entre as frequências naturais e os modos de vibração dentre os diversos modelos estruturais (flexível, semi-rígido e rígido). Resultados já obtidos indicam que a variação na rigidez inicial das ligações provoca mudanças sensíveis no comportamento dinâmico da estrutura.*

Palavras-chave: *Ensino de engenharia, Estruturas de aço, Método dos Elementos Finitos, Autovalores, Autovetores.*

1. INTRODUÇÃO

Sabe-se que o déficit habitacional brasileiro cresce a cada ano, concentrando-se o problema, principalmente, nas famílias de baixo poder aquisitivo, de forma que existe uma demanda crescente por estudos sobre as habitações populares. Neste sentido, o aço, como material estrutural é adequado para a construção industrializada e pode proporcionar à construção civil, perspectivas mais otimistas para a habitação popular no país.

Uma das etapas relevantes no projeto de estruturas de aço está relacionada a uma avaliação coerente acerca dos modelos estruturais que representam o comportamento real das ligações existentes entre as vigas e as colunas de aço.

Na prática corrente de projeto, a grande maioria dessas ligações é representada por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maior parte dos casos, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou semi-rígido, o qual pode ser perfeitamente caracterizado com base em determinadas grandezas associadas ao projeto de uma ligação, tais como: resistência à flexão e capacidade de rotação.

No que tange ao estudo do comportamento dinâmico de estruturas, assunto que será abordado com mais detalhe no presente trabalho, mais especificamente no que diz respeito à aplicação do problema clássico de autovalores para determinação e avaliação das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) de edificações residenciais, observa-se, com clareza, uma absoluta falta de conhecimento por parte dos alunos de graduação acerca da importância do tema e, infelizmente, uma completa indiferença em relação ao assunto.

Assim sendo, de forma a contribuir no que tange ao ensino de engenharia, como também desmistificar o emprego corrente dos conceitos teóricos, principalmente aqueles relacionados ao problema de autovalores, faz-se uma exposição resumida do referido problema, como tratado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos.

Em seguida, é selecionado o projeto de uma edificação residencial de quatro pavimentos, composto por vigas e colunas de aço e lajes lisas de concreto armado, em todos os níveis da edificação. Tem-se como objetivo proceder a uma análise extensa das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) dos modelos referentes aos pórticos de aço da referida edificação. Um outro ponto relevante do trabalho diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas dos pórticos de aço.

Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação prática do problema clássico de autovalores e autovetores, no caso em questão com respeito ao projeto de edificações residenciais, além de reforçar a importância dos conceitos básicos da disciplina de Álgebra Linear para a solução deste tipo de problema.

2. O CICLO BÁSICO NA ENGENHARIA E O PROBLEMA DE AUTOVALOR

O problema clássico de autovalores e autovetores, principalmente no que tange a utilização de operações matriciais, está diretamente relacionado com o ensino da disciplina Álgebra Linear, oferecida correntemente aos alunos de graduação no ciclo básico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

O ensino da disciplina Álgebra Linear não oferece nenhuma interação com o ciclo profissional da engenharia e nenhum tipo de recomendação no que diz respeito a sua extrema relevância na aplicação prática desses conceitos sobre os problemas reais de engenharia. Tal fato não só desestimula o aluno de graduação em engenharia, como também ocasiona um aprendizado de baixa qualidade, propagando deficiências técnicas que serão sentidas, sem sombra de dúvida, no decorrer do curso.

Ainda hoje, a didática de ensino adotada nas disciplinas do ciclo básico sobre o problema clássico de autovalores e autovetores é baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos. Tal metodologia é apresentada a seguir, respaldada por uma breve revisão sobre as definições de autovalor e autovetor, como visto tradicionalmente na disciplina de Álgebra Linear, LIPSCHUTZ (1977), NETTO e ADÃO (1995).

Senão vejamos: seja T uma transformação linear em um espaço vetorial real V aplicada a um corpo K . Denomina-se autovalor o escalar real pertencente a K ($\lambda \in K$) se, para esta transformação linear T , existe um vetor não-nulo pertencente a V ($v \in V$) para o qual:

$$T(v) = \lambda v \quad (1)$$

Todo vetor não-nulo v que satisfaça a “equação (1)” é chamado autovetor de T correspondente ao autovalor λ . Portanto, sendo A uma matriz quadrada de ordem ($n \times n$) sobre um corpo K , existe um autovalor λ se, para uma matriz coluna ($v_{n,1}$), denominada autovetor, $Av = \lambda v$ é verdadeiro.

Para a obtenção dos autovalores, reescreve-se a “equação (1)” de modo que $(\lambda I - A)v = 0$, que admitirá $\lambda \neq 0$ como solução se, e somente se, $|\lambda I - A| = 0$. A expressão $|\lambda I - A| = 0$ é denominada equação característica, onde I é a matriz identidade.

A contribuição mais relevante deste trabalho de pesquisa é caracterizar que o ensino do problema de autovalor como feito no ciclo básico da engenharia, de acordo com o exposto acima, é absolutamente contrário ao que se deveria informar a um futuro engenheiro.

Não há relação alguma entre os termos específicos (tais como, espaço vetorial, corpo, etc.), utilizados no ensino da disciplina de Álgebra Linear e as grandezas empregadas correntemente na engenharia. Ressalta-se que esses elementos têm o mesmo significado das grandezas conhecidas usualmente pelo engenheiro. Além disso, em nenhum momento existe um indicativo de onde e como o aluno de graduação, deve utilizar esses conceitos, extremamente relevantes para a vida prática de um profissional da área, SILVA (2001).

Uma sugestão para uma abordagem mais apropriada ao ensino do problema de autovalor para os alunos de graduação em engenharia seria, inicialmente, associar o termo autovalor às frequências naturais e o termo autovetor aos modos de vibração de um elemento ou sistema estrutural qualquer, dando ênfase ao significado físico dessas grandezas, ROEHL (1981).

Senão vejamos: para um sistema estrutural qualquer sob vibração livre não amortecida, com vários graus de liberdade, pode ser escrita uma equação matricial de movimento tal que,

$$M\ddot{V} + KV = 0 \quad (2)$$

onde, M é a matriz de massa, K é a matriz de rigidez, \ddot{V} é o vetor das acelerações e V é o vetor dos deslocamentos.

As equações que tornam possível a resolução do problema de autovalor, cujo sistema vibra livremente e sem amortecimento, são as seguintes:

$$(M^{-1}K - \omega_{0i}^2 I) \phi_i = 0 \quad (3)$$

onde ϕ_i é o i -ésimo modo de vibração, com i variando de 1 a N . A “equação (3)” é verdadeira, para qualquer ϕ_i , se

$$|M^{-1}K - \omega_{0i}^2 I| \phi_i = 0 \quad (4)$$

onde I representa a matriz identidade.

A “equação (4)” é comumente designada como equação característica e suas raízes são os valores característicos, ou autovalores, e correspondem ao quadrado das frequências naturais de um sistema estrutural, ω_{0i}^2 . A cada uma dessas raízes corresponde um vetor característico, ϕ_i , ou autovetor, que representa o modo de vibração do referido sistema.

Deve-se ressaltar, novamente, que o problema clássico de autovalores é absolutamente essencial para a compreensão e análise de estruturas simples, tais como treliças, vigas, pórticos, placas, etc, como também de sistemas estruturais mais complexos, dentre os quais podem ser citados os seguintes: edificações residenciais, pontes rodoviárias e ferroviárias, torres de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, estádios de futebol, passarelas de pedestres, edifícios altos, plataformas off-shore, etc.

3. AVALIAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS PARA EDIFICAÇÕES

Na Engenharia Civil, infelizmente, ainda é corrente o desenvolvimento de projetos de estruturas de aço sem se proceder a uma análise, mesmo que preliminar, acerca do comportamento dinâmico da estrutura. Evidentemente, sabendo-se que o aço é um material que possui uma baixa capacidade de amortecimento, e tendo em mente que é absolutamente imperativo que sejam mantidas as condições de segurança de qualquer estrutura, torna-se necessário, em inúmeros casos, proceder, pelo menos, uma análise preliminar acerca das frequências naturais e modos de vibração do sistema estrutural.

Assim sendo, de acordo com os objetivos básicos desta investigação e de forma a dar respaldo à aplicação do problema de autovalores e autovetores na avaliação de modelos estruturais de edificações, contribuindo para a modernização do ensino de engenharia, são desenvolvidos modelos computacionais, com base no emprego do programa computacional ANSYS, ANSYS (1998), a partir do projeto real de uma edificação popular. Na seqüência, procede-se a uma análise acerca das frequências naturais e modos de vibração desses modelos.

Assim sendo, os alunos de graduação em engenharia podem constatar que a aplicação do referido problema é bastante simples e tem uma importância prática inquestionável para a engenharia civil.

3.1 Modelo estrutural

O desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa se baseia no estudo de pórticos de aço bidimensionais, pertencentes a uma estrutura real de um edifício popular de quatro pavimentos, BRITO JR (2001). A Figura 1 apresenta um desenho esquemático onde são mostrados todos os pórticos de aço da edificação com suas respectivas colunas. Na seqüência do texto, a Figura 2 mostra todos os modelos estruturais idealizados para esses pórticos.

Os pórticos de aço foram agrupados, de acordo com suas propriedades geométricas, em quatro grupos, conforme mostra a Tabela 1 e Figura 1. Todas as propriedades físicas do material, adotadas nos modelos computacionais desenvolvidos, podem ser vistas na Tabela 2.

Tabela 1 - Grupos de pórticos adotados de acordo com suas propriedades geométricas

Grupo Pórticos
I 1, 2, 4 e 5

Tabela 2 - Propriedades físicas do material empregado nos modelos computacionais

Módulo de Elasticidade $2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Densidade Específica 7850 kg/m^3

II
3

Coefficiente de Poisson
0,30

III
6 e 9

IV
7 e 8

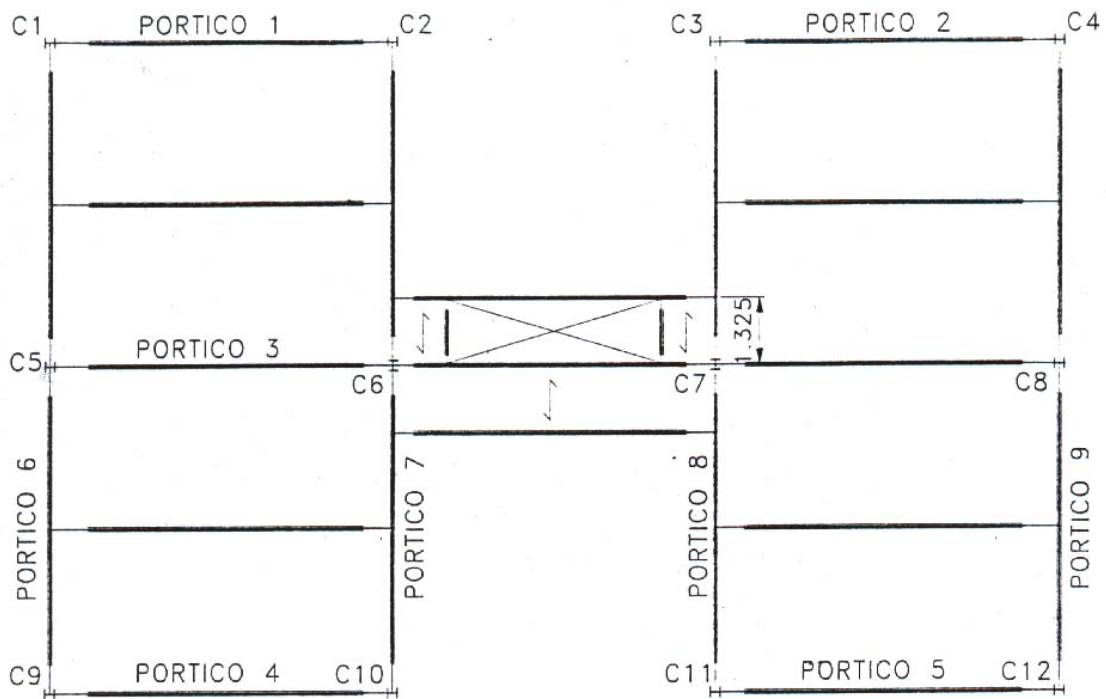
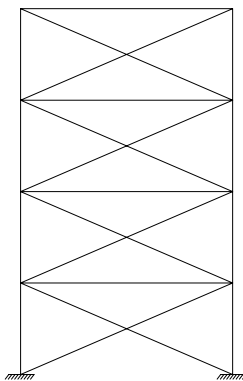
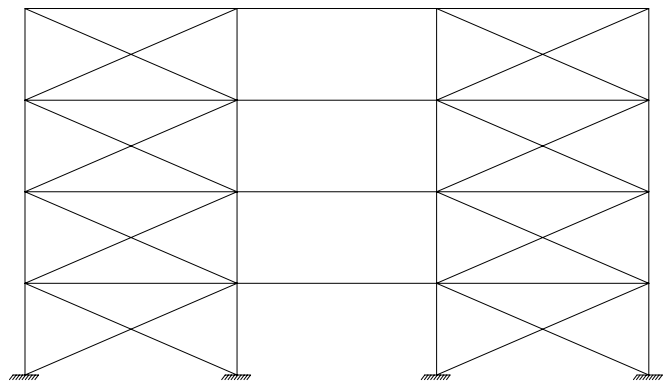


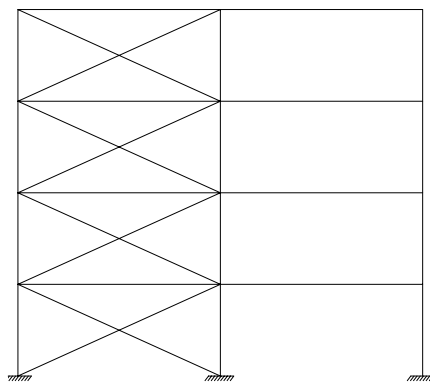
Figura 1 - Desenho esquemático dos pórticos de aço da edificação, BRITO JR (2001).



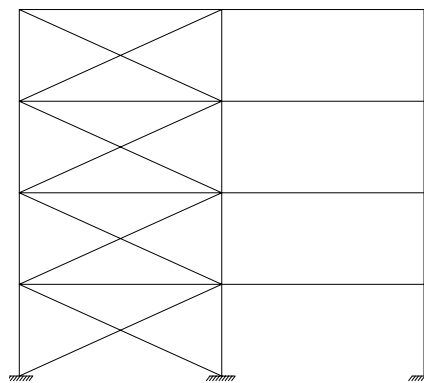
GRUPO I: PÓRTICO 1 = 2 = 4 = 5.



GRUPO II: PÓRTICO 3.



GRUPO III: PÓRTICO 6 = 9.



GRUPO IV: PÓRTICO 7 = 8.

Figura 2 - Modelos estruturais idealizados para os pórticos contraventados.

3.2 Modelagem Computacional

A construção dos modelos em elementos finitos, com base no programa ANSYS, ANSYS (1998), foi feita através do emprego de “keypoints” e linhas, que determinam a geometria de cada pórtico. Para a discretização das vigas e colunas dos modelos, foram empregados elementos de viga bidimensionais. A condição de apoio adotada, no presente trabalho, considera todas as bases dos pórticos de aço como sendo engastadas.

Com o objetivo de otimizar o processo de análise foram elaborados modelos parametrizados que permitissem a variação da rigidez entre a viga e a coluna (rigidez viga-coluna). Desta forma, cada grupo para análise foi constituído por 13 modelos, a saber: 1 modelo rígido, 1 modelo flexível e 11 modelos semi-rígidos. Nos modelos semi-rígidos, a rigidez inicial das ligações, S_j , é variada de acordo com critérios de projeto.

Deve-se ressaltar que, para a confecção dos modelos associados aos pórticos semi-rígidos, foi necessário inserir um elemento de mola ligando as colunas às vigas, conforme mostrado na Figura 3. Dessa forma, variando a rigidez da mola pode-se controlar o nível da rigidez inicial das ligações, S_j , BRITO JR (2001) e BRITO JR *et al* (2002).

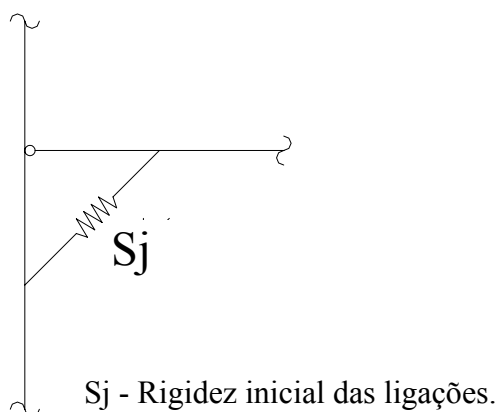


Figura 3 - Modelo empregado para representar as ligações viga-coluna.

Convém chamar a atenção do leitor para o fato de que a partir de modelos bastante simples, estudados nas disciplinas de Física, Cálculo e Álgebra Linear, no ciclo básico dos cursos de graduação em engenharia, tal como o modelo mostrado na Figura 3, é possível simular com eficiência o comportamento de sistemas estruturais.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com o objetivo de aplicar o problema clássico de autovalores e autovetores, estudado correntemente na disciplina de Álgebra Linear, LIPSCHUTZ (1977), NETTO e ADÃO (1995), obtêm-se as frequências fundamentais e os respectivos modos de vibração para os diversos modelos em estudo, Figuras 1 e 2.

4.1 Análise paramétrica

As Figuras 4 a 11 apresentam a variação da frequência fundamental dos pórticos de aço, Figuras 1 e 2, em função da rigidez inicial das ligações, S_j . Ressalta-se que, quando o valor de S_j for igual a zero tem-se, então, um pórtico flexível e quando o valor de S_j tender para o infinito (no presente trabalho adota-se $S_j=10$ para proceder a essa simulação), o pórtico já é considerado do tipo rígido.

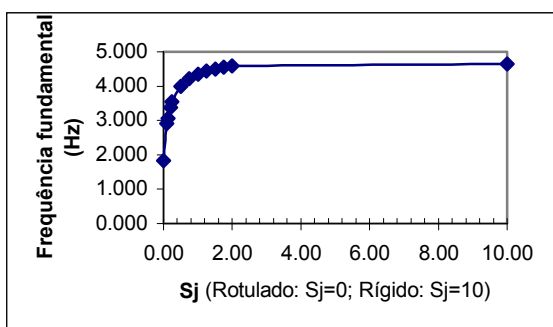


Figura 4 - Pórticos do grupo I.
Modelo não-contraventado.

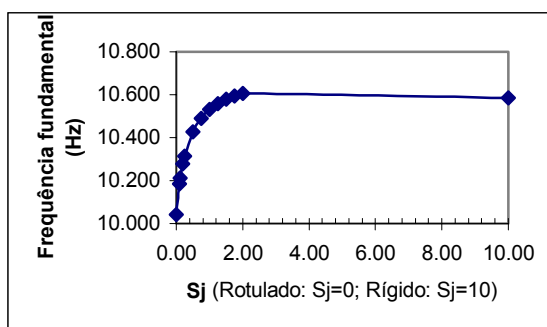


Figura 8 - Pórticos do grupo I.
Modelo contraventado.

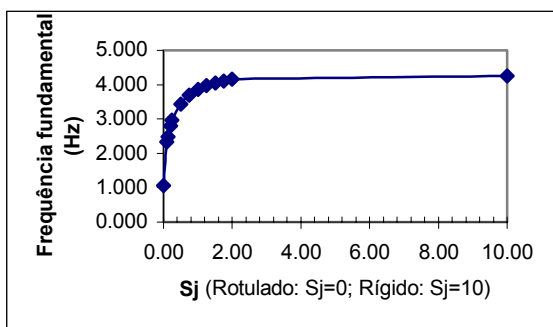


Figura 5 - Pórticos do grupo II.
Modelo não-contraventado.

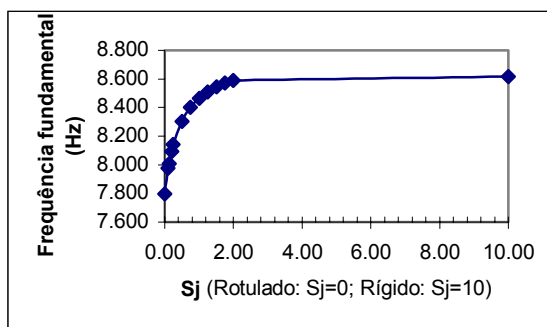


Figura 9 - Pórticos do grupo II.
Modelo contraventado.

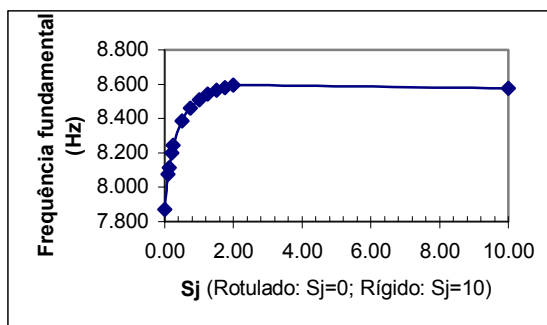
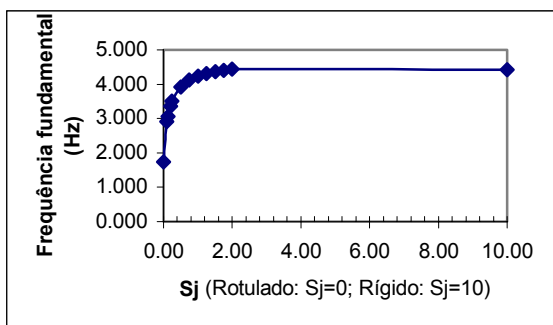


Figura 6 - Pórticos do grupo III.
Modelo não-contraventado.

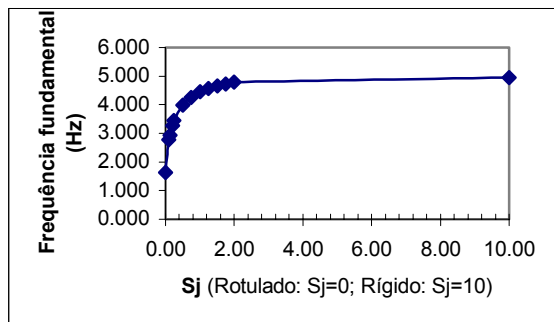


Figura 7 - Pórticos do grupo IV.
Modelo não-contraventado.

Figura 10 - Pórticos do grupo III.
Modelo contraventado.

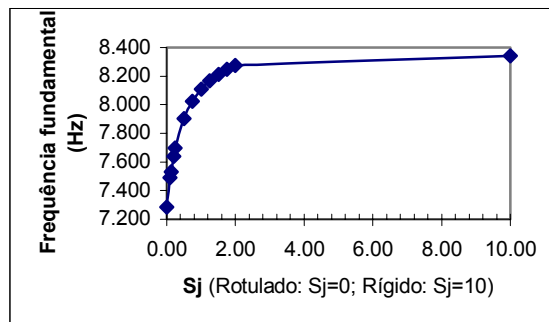


Figura 11 - Pórticos do grupo IV.
Modelo contraventado.

Com base em uma rápida observação nos gráficos correspondentes as Figuras 4 a 11, verifica-se que a frequência fundamental dos pórticos de aço associados à edificação em estudo apresenta um comportamento altamente não-linear. Pode ser observado, ainda, que os modelos de pórticos contraventados apresentam a frequência fundamental bem superior em comparação com os modelos não-contraventados, Figuras 4 a 11. Esse fato, mostra a coerência do modelo computacional desenvolvido, já que é de conhecimento geral que os sistemas de contraventamento, como aqueles mostrados na Figura 2, são bastante eficientes no sentido de adicionar rigidez à estrutura.

Prossegue-se a análise dinâmica dos modelos, com base em uma comparação quantitativa referente aos valores da frequência fundamental, o que pode evidenciar uma certa sensibilidade quanto ao tipo de ligação viga-coluna adotada no projeto. Mais uma vez, pode-se perceber que uma análise extremamente simples, referente a comparações simples entre valores de frequências (autovalores), pode ser de grande utilidade para um engenheiro civil. Isto mostra, novamente, a contribuição do presente trabalho no que tange ao ensino de engenharia.

Assim sendo, a Tabela 3 apresenta, agora, uma comparação geral no que tange aos valores da frequência fundamental, f_{01} , dos pórticos de aço em estudo. Com referência aos modelos semi-rígidos, contraventados e não-contraventados, foi adotado um valor para efeito de comparação, referente à metade da rigidez inicial da ligação viga-coluna, $S_j/2$, de forma a definir um nível de rigidez para os modelos.

Tabela 3 - Comparação entre os valores da frequência fundamental, f_{01} , entre os modelos estruturais contraventados e não-contraventados.

Frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo I			Grupo II		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,824	3,987	4,638	1,067	3,442	4,247
Contraventado	10,043	10,427	10,586	7,799	8,304	8,615

frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo III			Grupo IV		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,737	3,918	4,421	1,642	3,978	4,955
Contraventado	7,872	8,387	8,576	7,287	7,901	8,342

Observa-se que a variação da frequência fundamental entre os modelos com ligações flexíveis e rígidas é mais acentuada nos pórticos não-contraventados, atingindo um valor da ordem de 200%, Tabela 3. Todavia, nos pórticos contraventados a variação é apenas da ordem de 10%, Tabela 3. Isto ocorre porque o sistema de contraventamento, por si só, já impõe um ganho de rigidez aos pórticos, bastante considerável, atenuando a diferença de comportamento entre os modelos rígidos e flexíveis.

Convém chamar a atenção do leitor, para o fato de que influência do contraventamento é mais marcante nos pórticos flexíveis, onde a variação da frequência fundamental entre os modelos não-contraventados e contraventados é da ordem de 450%, Tabela 3, enquanto este valor chega apenas a 98%, com referência aos modelos rígidos, Tabela 3.

Este resultado comprova, mais uma vez, a eficiência do contraventamento adotado, no que se refere a sua função de aumentar a rigidez da estrutura. Finalmente, observa-se que o valor da frequência fundamental dos modelos semi-rígidos se situa sempre de forma intermediária, evidenciando perfeitamente um comportamento intermediário, como era de se esperar. Tal fato, mais uma vez, comprova a coerência dos resultados obtidos com base no modelo computacional desenvolvido.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do presente trabalho de pesquisa é o de contribuir no que tange ao ensino de engenharia, a partir da desmistificação do emprego corrente dos conceitos teóricos associados ao problema clássico de autovalores e autovetores, estudado regularmente na disciplina de Álgebra Linear, no ciclo básico da graduação dos cursos de engenharia, principalmente, no caso específico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

Foi feita uma breve exposição sobre o referido problema, como vem sendo ensinado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos.

Com base no que foi apresentado no decorrer de todo o presente trabalho de pesquisa, pode-se concluir que o embasamento teórico adquirido no ciclo básico é, sem sombra de dúvida, de grande relevância para um melhor aproveitamento nos cursos de graduação em engenharia. Assim sendo, disciplinas como, por exemplo, Álgebra Linear, poderiam ter um enfoque didático mais direcionado aos problemas correntes da engenharia, de modo a motivar os alunos de graduação, contribuindo para que esses apresentem um grau de maturidade maior, de modo a aplicar esses conceitos em sistemas estruturais reais, como no presente estudo sobre as edificações residenciais.

Assim sendo, é selecionado um modelo estrutural, associado a uma edificação residencial existente, de modo a se proceder a uma análise das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores), considerando-se, inclusive, o comportamento semi-rígido das ligações viga-coluna.



Com base em uma análise paramétrica preliminar, bastante simples, foi mostrada com clareza a obtenção da frequência fundamental de cada modelo computacional desenvolvido, todos associados à prática corrente de projeto. Desenvolvimentos dessa natureza não só motivam os alunos de graduação, como também conferem aos mesmos uma experiência maior no que tange a análise de estruturas.

Finalmente, foi evidenciado com clareza, que uma análise preliminar, baseada em comparações simples entre os valores da frequência fundamental dos diversos modelos em estudo e possíveis frequências da excitação pode servir para definições importantes como, por exemplo, evitar o fenômeno físico da ressonância.

Agradecimentos

Os autores deste trabalho de pesquisa agradecem a Direção da Faculdade de Engenharia, FEN/UERJ, e ao Laboratório de Computação do Ciclo Básico, LabBas/FEN/UERJ.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS, **Swanson Analysis Systems, Inc.**, P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 5.5, Basic analysis procedures, Second Edition, 1998.

BRITO JÚNIOR, O.F. **Desenvolvimento de Sistemas Estruturais Semi-Rígidos em Aço e Mistos Para Edificações Residenciais Multi-familiares**. 2001. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

BRITO JÚNIOR, O.F.; VELLASCO, P.C.G da S.; ANDRADE, S.A.L. de; SILVA, J.G.S. da; LIMA, L.R.O. de. **A Parametric Study of Steel and Composite Semi-Rigid Portal Frames**. In: THE SIXTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY, CST2002, Praga. Anais publicados em CD-ROM, 2002.

LIPSCHUTZ, S., **Álgebra Linear**, McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1977.

NETTO, C.C.; ADÃO, H.F., **Práticas Elementares de Álgebra Linear**, 1995.

ROEHL, J.L.P, **Dinâmica Estrutural. Análise no Domínio do tempo**, Volume I, Departamento de Engenharia Civil, DEC/CIV/PUC-Rio, 1981.