



O PROBLEMA DE AUTOVALOR E SUAS APLICAÇÕES À ENGENHARIA DE PONTES

José Guilherme Santos da Silva - jgss@uerj.br

Liliane Tojeira Velozo - liliane@labbas.eng.uerj.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia, FEN

Rua São Francisco Xavier, N^o 524, Maracanã

CEP: 20550-900, Rio de Janeiro, RJ

***Resumo:** Os professores dos cursos básicos de engenharia têm conhecimento acerca das dificuldades que grande parte dos alunos de seus cursos apresentam no sentido de compreender a aplicação dos conhecimentos teóricos obtidos no ciclo básico, principalmente aqueles relacionados às disciplinas de Cálculo, Física e Álgebra Linear. É fato que, com base em conhecimentos triviais obtidos no ciclo básico dos cursos de graduação em engenharia, podem ser desenvolvidos procedimentos simples e úteis visando à análise de sistemas estruturais em engenharia. Neste trabalho, pretende-se discutir e aplicar os conceitos teóricos referentes ao problema clássico de autovalores e autovetores, estudado correntemente nas disciplinas de Álgebra Linear, no ciclo básico dos cursos de graduação, à engenharia de pontes. Para tal, após uma breve revisão do problema de autovalores, são selecionados alguns modelos de pontes rodoviárias, para se proceder a uma análise extensa das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) desses modelos, considerando-se, inclusive, a interação dinâmica existente entre os veículos que trafegam sobre as pontes e a própria estrutura. Com base em uma análise preliminar, referente às frequências naturais e modos de vibração das pontes em estudo, é possível identificar, por exemplo, a possibilidade de surgimento do fenômeno físico da ressonância, que pode vir a comprometer a durabilidade e a segurança de tais estruturas.*

***Palavras-chave:** Ensino de engenharia, Engenharia de pontes, Pontes rodoviárias, Ciclo básico da engenharia, Problema de Autovalor.*

1. INTRODUÇÃO

O corpo docente da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ, tem consciência de que a falta de uma interação mais estreita entre o ciclo básico e o ciclo profissional da engenharia constitui uma das principais razões para as dificuldades que os alunos de graduação apresentam para compreender a enorme relevância de determinadas disciplinas do ciclo básico tais como: Cálculo, Física e Álgebra Linear.

Convém chamar a atenção do leitor para o fato de que os conceitos teóricos adquiridos nestas disciplinas, mencionadas anteriormente, são fundamentais para a compreensão do comportamento de sistemas estruturais na engenharia.

No que tange ao estudo do comportamento dinâmico de estruturas, assunto que será abordado com mais detalhe, mais especificamente com respeito à aplicação do problema clássico de autovalores para determinação e avaliação das frequências naturais (autovalores) e dos modos de vibração (autovetores) de pontes rodoviárias, percebe-se, claramente, uma absoluta falta de conhecimento por parte dos alunos de graduação acerca da importância do tema.

Assim sendo, de forma a contribuir para o ensino de engenharia, como também desmistificar o emprego corrente dos conceitos teóricos, principalmente aqueles relacionados ao problema de autovalores, faz-se uma exposição resumida do referido problema, como tratado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser apresentado para que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica de sua aplicação prática.

Na seqüência, são selecionados alguns modelos de pontes rodoviárias para se proceder a uma análise acerca das suas frequências naturais (autovalores) e dos seus modos de vibração (autovetores), considerando-se, inclusive, a interação dinâmica existente entre os veículos que trafegam sobre as pontes e a própria estrutura.

Com base em uma análise preliminar, bastante simples, referente às frequências naturais e modos de vibração das pontes rodoviárias em estudo, é possível identificar, por exemplo, a possibilidade de surgimento do fenômeno físico da ressonância, que pode vir a comprometer sua durabilidade e segurança.

2. O PROBLEMA DE AUTOVALOR: CICLO BÁSICO x ENGENHARIA CIVIL

Ainda hoje, a didática de ensino adotada nas disciplinas do ciclo básico sobre o problema clássico de autovalores e autovetores é baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos. Tal metodologia é apresentada a seguir, respaldada por uma breve revisão sobre as definições de autovalor e autovetor, como visto tradicionalmente na disciplina de Álgebra Linear (LIPSCHUTZ, 1977; NETTO e ADÃO, 1995).

Senão vejamos: seja T uma transformação linear em um espaço vetorial real V aplicada a um corpo K . Denomina-se autovalor o escalar real pertencente a K ($\lambda \in K$) se, para esta transformação linear T , existe um vetor não-nulo pertencente a V ($v \in V$) para o qual:

$$T(v) = \lambda v \tag{1}$$

Todo vetor não-nulo v que satisfaça a “equação (1)” é chamado o autovetor de T correspondente ao autovalor λ . Portanto, sendo A uma matriz quadrada de ordem ($n \times n$) sobre um corpo K , existe um autovalor λ se, para uma matriz coluna ($v_{n,1}$), denominada autovetor, $Av = \lambda v$ é verdadeiro.

Para a obtenção dos autovalores, reescreve-se a “equação (1)” de modo que $(\lambda I - A)v = 0$, que admitirá $\lambda \neq 0$ como solução se, e somente se, $|\lambda I - A| = 0$. A expressão $|\lambda I - A| = 0$, onde I é a matriz identidade, é denominada equação característica.

A contribuição mais relevante deste trabalho didático é caracterizar que o ensino do problema de autovalor como feito no ciclo básico da engenharia, de acordo com o exposto nos três parágrafos anteriores, é absolutamente contrário ao que se deveria informar a um futuro engenheiro.

Não é feita relação alguma entre os termos específicos (tais como: espaço vetorial, corpo, etc.), utilizados no ensino da disciplina de Álgebra Linear e as grandezas empregadas correntemente na engenharia. Ressalta-se que esses elementos têm absolutamente o mesmo significado das grandezas conhecidas comumente pelo engenheiro. Além disso, em nenhum momento existe um indicativo de onde e como o aluno de graduação, futuro engenheiro, deve utilizar esses conceitos, extremamente relevantes para a vida prática de um profissional da área em questão (SILVA, 2001).

Uma sugestão para uma abordagem mais apropriada ao ensino do problema de autovalor para os alunos de graduação em engenharia seria, inicialmente, associar o termo autovalor às frequências naturais e o termo autovetor aos modos de vibração de um elemento ou sistema estrutural qualquer, dando ênfase ao significado físico dessas grandezas, ROEHL (1981).

Senão vejamos: para um sistema estrutural qualquer sob vibração livre não amortecida, com vários graus de liberdade, pode ser escrita uma equação matricial de movimento tal que,

$$M\ddot{V} + KV = 0 \quad (2)$$

onde, M é a matriz de massa, K é a matriz de rigidez, \ddot{V} é o vetor das acelerações e V é o vetor dos deslocamentos.

As equações que tornam possível a resolução do problema de autovalor, cujo sistema vibra livremente e sem amortecimento, são as seguintes:

$$(M^{-1}K - \omega_{0i}^2 I) \phi_i = 0 \quad (3)$$

onde ϕ_i é o i -ésimo modo de vibração, com i variando de 1 a N . A “equação (3)” é verdadeira, para qualquer ϕ_i , se

$$|M^{-1}K - \omega_{0i}^2 I| \phi_i = 0 \quad (4)$$

onde I representa a matriz identidade.

A “equação (4)” é comumente designada como equação característica e suas raízes são os valores característicos, ou autovalores, e correspondem ao quadrado das frequências naturais de um sistema estrutural, ω_{0i}^2 . A cada uma dessas raízes corresponde um vetor característico, ϕ_i , ou autovetor, que representa o modo de vibração do referido sistema.

Deve-se ressaltar, novamente, que o problema clássico de autovalores é absolutamente essencial para a compreensão e análise de estruturas simples, tais como treliças, vigas, pórticos, placas, etc, como também de sistemas estruturais mais complexos, dentre os quais podem ser citados os seguintes: pontes rodoviárias e ferroviárias, torres de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, estádios de futebol, passarelas de pedestres, edificações residenciais, edifícios altos, plataformas off-shore, etc.

3. O PROBLEMA DE AUTOVALOR E A ENGENHARIA DE PONTES

Na Engenharia Civil, infelizmente, ainda é corrente o desenvolvimento de projetos de pontes rodoviárias sem se proceder a uma análise, mesmo que preliminar, acerca do comportamento dinâmico da estrutura. Efeitos dinâmicos associados às irregularidades da

pista, a oscilação dos veículos ao abordar a estrutura, a variação de velocidade dos veículos, dentre outros, geralmente não são considerados na análise.

A partir da evolução dos sistemas de transportes, com base no emprego de veículos mais rápidos e pesados, tornou-se indispensável o estudo do comportamento dinâmico de pontes rodoviárias sob a ação das cargas móveis, com objetivo de manter as condições de segurança à ruptura, prevenindo deflexões excessivas e proporcionando conforto e segurança aos usuários das obras de arte.

Para tal análise dinâmica é imprescindível a aplicação dos conceitos de autovalores e autovetores estudados nos cursos básicos de engenharia. Visando a contribuição para a adequação e modernização do ensino de engenharia, foi elaborado um exemplo de aplicação no qual foram desenvolvidos modelos computacionais, com base no emprego do programa computacional ANSYS (1998), a partir de projetos de pontes rodoviárias. Na seqüência, procede-se a uma análise acerca das frequências naturais e modos de vibração desses modelos. Ressalta-se que o presente trabalho acadêmico propõe uma sugestão para uma metodologia de ensino do problema de autovalores e autovetores mediante exemplos de aplicação destes nas estruturas correntes de engenharia civil.

Assim sendo, os alunos de graduação em engenharia podem constatar que a aplicação do referido problema é bastante simples e tem uma importância prática inquestionável para a engenharia de pontes.

3.1 Modelo estrutural

Os tabuleiros das pontes rodoviárias selecionadas neste trabalho correspondem a vigas de concreto armado com seção do tipo caixão e inércia constante, como mostra a Figura 1. Esses tabuleiros apresentam momento de inércia $J=3,98m^4$, módulo de elasticidade $E=3,0 \times 10^7 kN/m^2$, massa distribuída $\bar{m}=9200kg/m$ e coeficiente relativo de amortecimento, $\xi=0,03$, para o modo de vibração natural com predominância de deslocamentos da ponte (SILVA, 1999).

As pontes rodoviárias escolhidas para análise, são modeladas como vigas bi-apoiadas com balanços. O modelo estrutural é discretizado com base em 18 elementos finitos de viga bidimensionais, sendo que cada balanço possui 3 massas concentradas e o vão central, apresenta 11 massas concentradas, igualmente espaçadas. A ponte foi dividida em 19 seções ou nós, como mostra a Figura 2. A Tabela 1 apresenta as características geométricas das pontes estudadas neste trabalho (SILVA, 1999).

Tabela 1 - Características geométricas dos modelos.

Vão Central	Vãos Extremos (Balanços)	Espaçamento entre Seções	Comprimento Total da Ponte
L (m)	L_b (m)	L_e (m)	L_t (m)
24,0	6,0	2,0	36,0
30,0	7,5	2,5	45,0
36,0	9,0	3,0	54,0

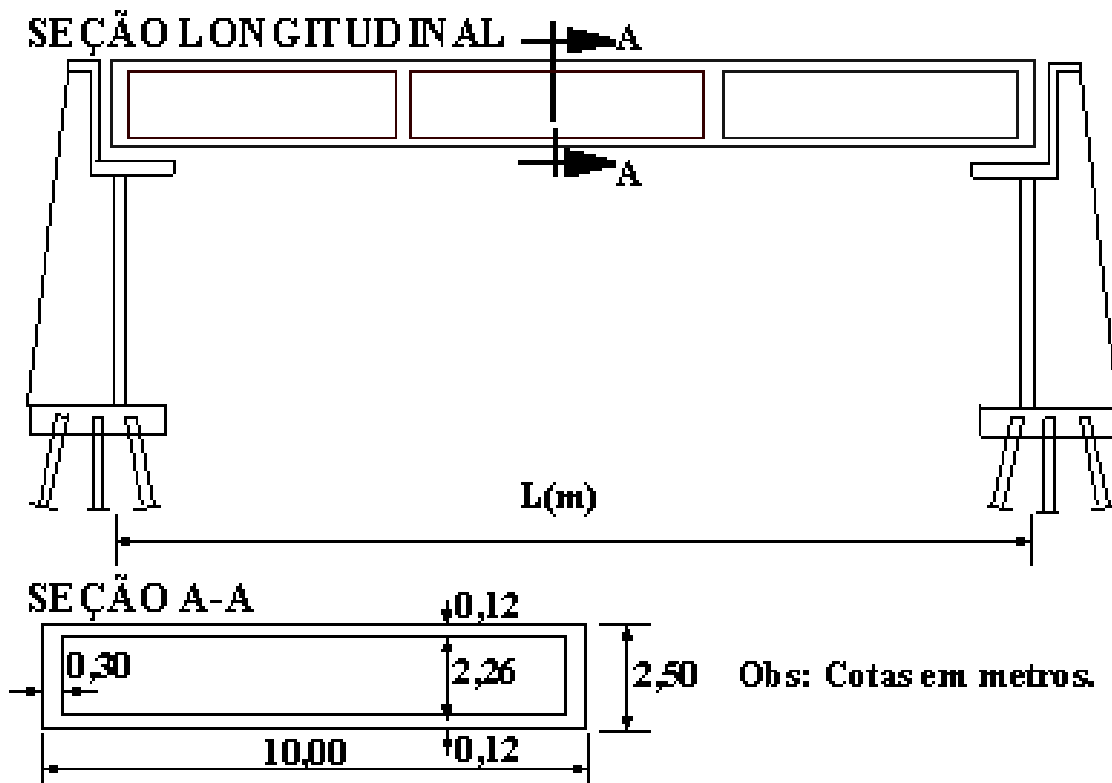


Figura 1 - Projeto básico de uma ponte rodoviária selecionada para análise

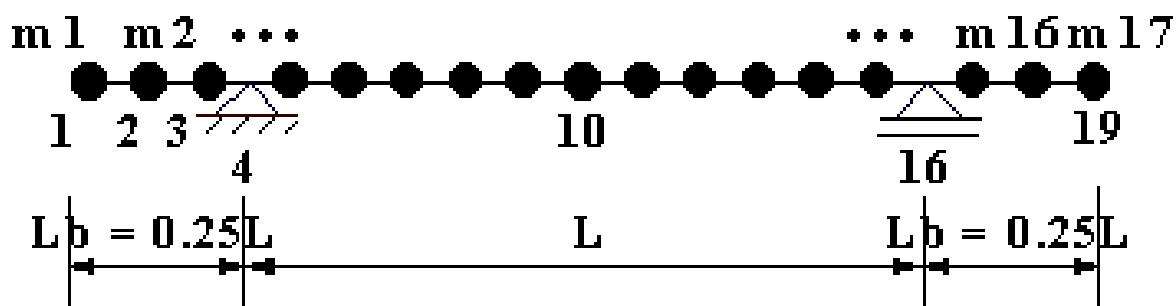


Figura 2 - Modelo em elementos finitos adotado para a discretização das pontes.

3.2 Modelagem da carga móvel

A carga móvel é modelada com base em uma série de veículos deslocando-se sobre o tabuleiro da ponte com velocidade constante. Os veículos possuem um peso total unitário de 450 kN e mantêm entre si um espaçamento regular, l . As viaturas são modeladas como sistemas “massa-mola-amortecedor” e estão em contato contínuo com o tabuleiro das obras de arte, como é ilustrado na Figura 3.

Utiliza-se um modelo de veículo constituído por um único eixo e duas massas, descrito por dois graus de liberdade à translação, o qual tem sido usado pelo autor SILVA (2002) para estudos dessa natureza, como é mostrado na Figura 3.

As grandezas associadas ao modelo do veículo, referentes à massa suspensa, amortecimento e rigidez da suspensão são designados por m_s , c_{vs} e k_{vs} , respectivamente, e os elementos correspondentes à massa não-suspensa, amortecimento e rigidez dos pneus são representados por m_{ns} , c_{vp} e k_{vp} , respectivamente, Figura 3.

São considerados os movimentos translacionais verticais das duas massas, uma suspensa e outra não suspensa, e desprezadas as rotações no plano, como mostra a Figura 3. A Tabela 2 apresenta as características dinâmicas dos veículos utilizados neste estudo.

Tabela 2 - Características dinâmicas dos veículos.

Massa Suspensa (m_s)	Massa Não-Suspensa (m_{ns})	Rigidez da Suspensão (k_{vs})	Rigidez dos Pneus (k_{vp})	Amortecimento da Suspensão (c_{vs})	Amortecimento dos Pneus (c_{vp})
40 t	5 t	18585 kN/m	60402 kN/m	24 kNs/m	3 kNs/m

As frequências naturais do veículo isolado sobre base rígida, correspondente à suspensão e aos pneus, são feitas iguais a 3Hz e 20Hz, respectivamente, e o coeficiente relativo de amortecimento, ξ , para o seu modo de vibração natural com predominância de deslocamentos da massa suspensa do veículo, é igual a 0,1 (10%).

No desenvolvimento do presente modelo computacional, assume-se que os carros entrem um após o outro no tabuleiro da obra de arte, gerando a partir dessa repetição, ao longo do tempo, uma frequência de excitação, de carregamento, ou de travessia, $f_t=v/l$, associada ao movimento desses veículos sobre o tabuleiro.

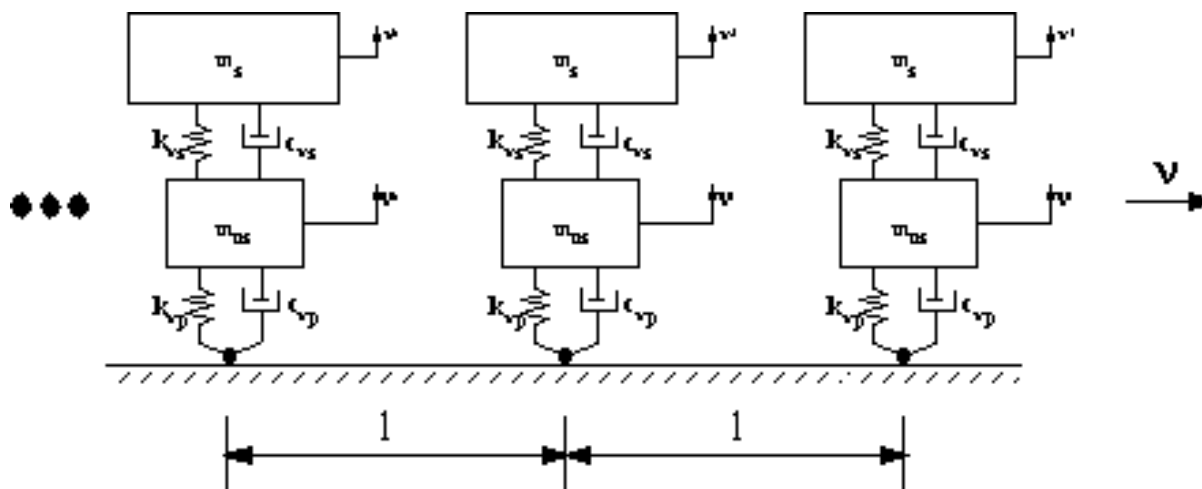


Figura 3 - Comboio de veículos.

3.3 Estudo paramétrico

A análise das frequências naturais e dos modos de vibração das pontes é feita a partir da variação do comprimento do vão central e dos vãos extremos em balanço, referentes aos modelos em estudo. A seção transversal se mantém idêntica em todos os modelos. No entanto, o comprimento total das pontes é modificado, evidentemente, a medida em que o vão central varia de 24m a 36m e os vãos extremos em balanço variam de 6m a 9m.

Observa-se, ainda, que o espaçamento entre os veículos também é modificado, no caso, variando de 2m a 3m, de acordo com o comprimento total da ponte em estudo.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com o objetivo de aplicar o problema clássico de autovalores e autovetores, estudado correntemente na disciplina de Álgebra Linear (LIPSCHUTZ, 1977; NETTO e ADÃO, 1995), sobre a análise dinâmica de pontes rodoviárias, obtém-se as frequências fundamentais e os respectivos modos de vibração para os diversos modelos em estudo, de acordo com as características geométricas fornecidas pelas Tabelas 1 e 2 e Figuras 1 e 2.

Vale ressaltar que o modelo computacional desenvolvido, com base no emprego do programa computacional ANSYS (1998), considera, inclusive, a interação dinâmica existente entre os veículos que trafegam sobre as pontes e a própria estrutura. Tal fato, evidentemente, altera as frequências naturais dos modelos no que tange as situações em que as pontes se encontram descarregadas e, em seguida, carregadas. Assim sendo, são apresentadas na Tabela 3 as frequências fundamentais dos modelos analisados.

Tabela 3 - Frequências fundamentais das pontes rodoviárias em estudo.

Vão	Balanços	Espaçamento entre Veículos	Ponte Descarregada	Ponte Carregada	Relação entre as Frequências
L (m)	L_b (m)	L (m)	Frequência Fundamental f_d (Hz)	Frequência Fundamental f_c (Hz)	f_c/f_d
24,00	6,00	2,00	8,89	9,08	1,02
30,00	7,50	2,50	5,80	6,43	1,11
36,00	9,00	3,00	4,20	5,12	1,22

Percebe-se, claramente, que a frequência fundamental dos modelos analisados diminui com o aumento do vão das pontes. Isto porque, a medida em que se aumenta o comprimento dos vãos, a massa do sistema aumenta e, como a frequência é inversamente proporcional à massa do sistema estrutural, tal fato, evidentemente, acarreta em uma diminuição nos referidos valores.

Um outro ponto interessante a ser observado na Tabela 3, diz respeito à relação f_c/f_d que aumenta de acordo com o aumento do comprimento do vão central e dos balanços das pontes analisadas. Tal fato pode ser explicado devido à interação dinâmica existente entre os veículos e a ponte.

Tendo em mãos o valor da frequência fundamental das pontes, obtido a partir da resolução do problema de autovalor, pode-se comparar esse valor de frequência com a da excitação, neste caso associado a uma frequência de carregamento, ou de travessia, $f_t=v/l$, associada ao movimento dos veículos sobre o tabuleiro, como descrito no item 3.2 do trabalho.

Deste modo, a partir de uma análise baseada em comparações, bastante simples, entre valores de frequências (autovalores), pode-se, de forma preliminar, evitar o fenômeno físico da ressonância, que pode vir a comprometer a durabilidade e a segurança das obras de arte.

Na seqüência do trabalho, as Figuras 4 a 9 apresentam os modos fundamentais de vibração para os modelos analisados com referência a situação em que as pontes se encontram descarregadas e carregadas.

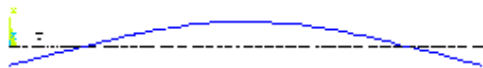


Figura 4 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=24\text{m}$ e $L_b=6\text{m}$.
Ponte descarregada. $f_D=8,89\text{Hz}$.

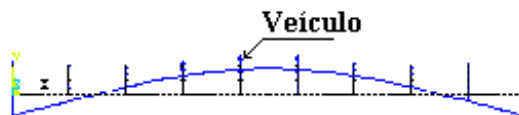


Figura 5 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=24\text{m}$ e $L_b=6\text{m}$.
Ponte carregada. $f_C=9,08\text{Hz}$.



Figura 6 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=30\text{m}$ e $L_b=7,5\text{m}$.
Ponte descarregada. $f_D=5,80\text{Hz}$.

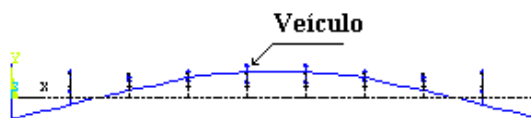


Figura 7 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=30\text{m}$ e $L_b=7,5\text{m}$.
Ponte carregada. $f_C=6,43\text{Hz}$.

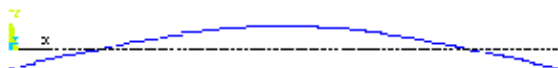


Figura 8 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=36\text{m}$ e $L_b=9,0\text{m}$.
Ponte descarregada. $f_D=4,20\text{Hz}$.

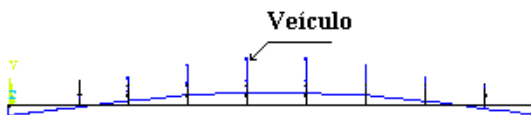


Figura 9 - Modo fundamental de vibração.
Características do modelo: $L=36\text{m}$ e $L_b=9,0\text{m}$.
Ponte carregada. $f_C=5,12\text{Hz}$.

Com base na observação dos modos de vibração das pontes estudadas, de acordo com as Figuras 4 a 9, verifica-se que existe uma ótima concordância nas configurações modais fornecidas pelo modelo computacional desenvolvido, quando comparadas com a literatura técnica (ROEHL, 1981; SILVA, 1999).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do presente trabalho de pesquisa é o de contribuir no que tange ao ensino de engenharia, a partir da desmistificação do emprego corrente dos conceitos teóricos associados ao problema clássico de autovalores e autovetores, estudado correntemente na disciplina de Álgebra Linear, no ciclo básico da graduação dos cursos de engenharia, principalmente, no caso específico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

Procede-se a uma breve exposição acerca do referido problema, como vem sendo tratado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos.

Diante do exposto, ao longo de todo o presente trabalho, pode-se concluir que o embasamento teórico adquirido no ciclo básico é, sem sombra de dúvida, de grande relevância para um melhor aproveitamento nos cursos de graduação em engenharia. Assim sendo, disciplinas como, por exemplo, Álgebra Linear, poderiam ter um enfoque didático mais direcionado aos problemas correntes da engenharia, de modo a motivar os alunos de graduação, contribuindo para que esses apresentem um grau de maturidade maior, de forma a aplicar esses conceitos em sistemas estruturais, como no caso das pontes rodoviárias.



Assim sendo, são selecionados modelos estruturais de pontes rodoviárias para se proceder a uma análise das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores), considerando-se, inclusive, a interação dinâmica existente entre os veículos que trafegam sobre as pontes e a própria estrutura.

Com base em uma análise preliminar, bastante simples, foi mostrada com clareza a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração de pontes rodoviárias associadas à prática corrente de projeto. Estudos dessa natureza não só motivam os alunos de graduação, como também conferem aos mesmos uma experiência maior no que tange a modelagem computacional e a análise de estruturas.

Finalmente, foi evidenciado, também, que uma análise preliminar, baseada em comparações simples entre os valores da frequência fundamental da ponte e da frequência da excitação, pode evitar o fenômeno físico da ressonância, o qual pode vir a comprometer a durabilidade e a segurança das pontes rodoviárias.

Agradecimentos

Os autores deste trabalho de pesquisa agradecem a Direção da Faculdade de Engenharia, FEN/UERJ, e ao Laboratório de Computação do Ciclo Básico, LabBas/FEN/UERJ.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS, **Swanson Analysis Systems**, Inc., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 5.5, Basic analysis procedures, Second Edition, 1998.

LIPSCHUTZ, S., **Álgebra Linear**, McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1977.

NETTO, C.C.; ADÃO, H.F., **Práticas Elementares de Álgebra Linear**, 1995.

ROEHL, J.L.P., **Dinâmica Estrutural. Análise no Domínio do Tempo**, Volume I, Departamento de Engenharia Civil, DEC/CIV/PUC-Rio, 1981.

SILVA, J.G.S. da, **Dynamical Load Factor for Highway Bridge Decks with Pavement Irregularities**, IABSE Symposium, Structures for the Future - The Search for Quality, Rio de Janeiro, Brazil, 1999.

SILVA, J.G.S. da; SOEIRO, F.J. da C.P.; VELLASCO, P.C.G. da S.; GUIMARÃES, L.P.; VELOZO, L.T., **Uma Experiência Acadêmica nos Cursos de Graduação da Faculdade de Engenharia da UERJ a Partir da Utilização do Programa Ansys**. In: XXIX CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, COBENGE 2001, Porto Alegre, Anais publicados em CD-ROM, 2001.

SILVA, J.G.S. da; VELOZO, L.T., **The Influence of Transition Slabs on the Dynamical Response of Highway Bridge Decks with Pavement Irregularities**. In: THIRD JOINT CONFERENCE OF ITALIAN GROUP OF COMPUTATIONAL MECHANICS AND IBERO-LATIN AMERICAN ASSOCIATION OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Giulianova, Italy, Anais publicados em CD-ROM, 2002.