ANÁLISE DE CIRCUITOS ALGÉBRICOS LINEARES UTILIZANDO MÉTODOS GERAIS

Yaro Burian Jr. – burian@fee.unicamp.br
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Caixa Postal 6101, 13083-970 Campinas, S. Paulo
Ana Cristina C. Lyra – acclyra@fee.unicamp.br
Caixa Postal 6101, 13083-970 Campinas, S. Paulo

Resumo. *A disponibilidade de computadores pessoais e calculadoras científicas vem modificando o tratamento inicial da teoria de circuitos. Cada vez mais se tornam importantes métodos gerais e sistemáticos que permitam obter conjuntos de equações necessárias e sem redundância para as soluções. A análise nodal modificada fornece um destes métodos. Circuitos lineares contendo resistores e fontes, de tensão e/ou corrente; circuitos em regime permanente senoidal, incluindo capacitores e indutores, circuitos lineares em geral, através do emprego de transformações (Laplace) podem ser tratados de forma elegante e sistemática. As leis de Kirchhoff se exprimem com emprego da matriz de incidência; relações entre tensões e correntes nos diversos bipolos se exprimem por matrizes de admitância ou de impedância de bipolos. A análise nodal modificada permite ainda desenvolver conceitos importantes, como os equivalentes de Thévenin.*

Palavras-chave: *Equações de circuitos, Análise nodal, Análise nodal modificada.*

1. INTRODUÇÃO

Uma abordagem comum na análise de circuitos – que poderia ser chamada de analítica – é bem representada pelo conhecimento dos alunos que ingressam na Universidade tendo feito já um curso técnico de eletricidade. As equações de um circuito são escritas uma a uma, em geral equações de tensões percorrendo as malhas (se o circuito é plano), até ser obtido um número suficiente de equações. Se aparecem equações em excesso não há problema: implicitamente pensa-se na solução manual destas equações. Raramente é feita a formalização completa do método de malhas e muito menos de outros métodos, como o método de nós. Nesta abordagem a *experiência* tem papel fundamental: cada circuito é um caso particular. As listas de exercícios extensas são importantes.

O desenvolvimento tecnológico obriga a incluir nos cursos de engenharia cada vez mais conhecimento, mas sem crescimento significativo da carga horária. Em conseqüência são necessárias novas abordagens, mais sintéticas, mesmo para disciplinas básicas como Circuitos Elétricos (Burian (1993), Chua et al (1993), Orsini (1993), Ho et al (1975)). Uma segunda razão em favor destas novas abordagens é a utilização crescente de computadores para a solução das equações e mesmo até o desenvolvimento de *softwares* específicos para solução de circuitos. É importante conhecer o número de variáveis e obter as equações necessárias: nem mais, nem menos. Assim, a partir da formulação matricial das leis de Kirchhoff (de preferência com utilização da matriz incidência) chega-se ao método de nós e também ao método de nós modificado (que é o fundamento, por exemplo, do *Spice*).

As duas abordagens devem ser utilizadas nas disciplinas de Circuitos. Elas são, de fato, complementares e é importante explorar as ligação entre elas.

2. VARIÁVEIS E EQUAÇÕES

Associam-se, normalmente, a um circuito constituído de b bipolos e tendo n nós as variáveis elétricas tensões e correntes de bipolos. São b tensões e b correntes, ou $2b$ variáveis.

A maneira como os bipolos são associados permite escrever as equações decorrentes das leis de Kirchhoff. Considerados, para simplificar a exposição, circuitos conexos, são n-1 equações independentes de correntes e b-n+1 equações independentes de tensões, totalizando b equações algébricas lineares; cada bipolo é caracterizado por uma relação entre tensão e corrente: mais b equações. Em princípio o circuito está equacionado.

A eliminação sistemática de algumas das variáveis é feita nos diversos métodos gerais: por exemplo, as equações de tensões permitem exprimir b-n+1 tensões em função das demais n-1 (tensões independentes); se as equações dos bipolos permitirem exprimir, para cada bipolo, a corrente em função da tensão, as n-1 equações independentes de correntes podem ser expressas em função das n-1 tensões independentes.

Os diversos passos assim descritos precisam ser sistematizados: como escolher equações independentes de tensões e correntes, como escolher tensões (ou correntes) independentes?

2.1 Árvore

Uma forma de sistematização é baseada na escolha de uma árvore para o circuito: um conjunto de n-1 bipolos ligando todos os nós, mas não incluindo nenhum laço. Os b-n+1 bipolos não pertencentes à árvore constituem a co-árvore. Os b-n+1 laços fundamentais (laços contendo apenas um ramo da co-árvore) permitem escrever b-n+1 equações independentes de tensões (pois a tensão de cada bipolo da co-árvore só aparece em uma equação). As tensões dos bipolos da árvore formam um conjunto de tensões independentes (pois é possível, a partir das equações de tensões escrever as tensões dos bipolos da co-ávore em função dos bipolos da árvore). De mesma forma, os n-1 cortes fundamentais (cortes contendo apenas um ramo da árvore) permitem escrever n-1 equações independentes de correntes (pois a corrente de cada bipolo da árvore só aparece em uma equação). As correntes dos bipolos da co-árvore formam um conjunto de correntes independentes (pois é possível, a partir das equações de correntes escrever as correntes dos bipolos da árvore em função das correntes dos bipolos da co-árvore).

Esta forma de sistematização apresenta interesse por permitir, facilmente, decidir que bipolos terão tensões independentes (serão incluídos na árvore) e que bipolos terão correntes independentes (serão incluídos na co-árvore). Impossibilidade de construir uma árvore satisfazendo estas condições caracteriza alguma *patologia* do circuito – muitas vezes impossibilitando sua solução através, por exemplo, do Spice (circuito contendo laços de fontes de tensão).

2.2 Outras variáveis: tensões de nós e correntes de malhas

Em lugar de usar, como variáveis, correntes ou tensões de bipolos, os métodos de malhas e de nós adotam novas variáveis, respectivamente correntes de malha e tensões de nós. Existe, entretanto, uma restrição: correntes de malha só podem ser definidas para circuitos planos. Correntes de malha ou tensões de nós podem coincidir com correntes ou tensões de bipolos mas também podem não coincidir.

Escolhido um nó (chamado de *referência* ou *terra*) as tensões de nós são as n-1 tensões entre os outros nós e o nó de referência. Estas tensões podem, facilmente, ser medidas (de fato, tensões observadas com um osciloscópio são, usualmente, tensões de nós). Seria possível dizer que as tensões de nós sempre têm *existência real* nos circuitos. E, além disso, como não formam laços, as tensões de nós são independentes.

Um circuito plano tem b-n+1 malhas internas. Associa-se a cada malha interna uma corrente de malha. As correntes de malha são independentes.

Quando alguma corrente de malha não coincide com uma corrente de bipolo, não é possível medi-la diretamente. Então correntes de malha podem ser consideradas, às vezes, abstrações matemáticas. E também, como diferentes representações de um circuito podem apresentar malhas diferentes, as correntes de malha não são univocamente determinadas para um circuito.

O conceito de nó também permite escolher um conjunto de equações independentes de correntes: as equações de correntes escritas para quaisquer n-1 nós do circuito. Usualmente é excluído o nó de referência. O que deixa de ser trivial, neste caso (e sem recurso ao conceito de árvore), é a escolha de correntes independentes.

E analogamente, o conceito de malha permite escolher um conjunto de equações independentes de tensões: as equações de tensões escritas para as malhas internas são independentes. E também o que não é trivial (novamente sem recurso ao conceito de árvore) é a escolha de tensões independentes.

Em resumo, os nós de circuito acrescentam novas n-1 tensões, totalizando b+n-1 tensões, das quais as tensões de nós são independentes. Os nós também fornecem n-1 equações independentes de correntes, mas não fornecem um caminho para a escolha de correntes independentes.

De mesma forma, as malhas acrescentam b-n+1 correntes, totalizando 2b-n+1 correntes, das quais as correntes de malha são independentes. E fornecem b-n+1 equações independentes de tensões, mas não fornecem um caminho para a escolha de tensões independentes.

3. MÉTODO DE NÓS

Como as tensões de nós são independentes, é possível escrever as tensões dos bipolos em função das tensões de nós. E se for possível, para cada bipolo, escrever a corrente como função da tensão (isto é, se os bipolos forem todos *controlados a tensão*), será possível escrever as equações independentes de correntes para os nós expressas em função das tensões de nós. Serão n-1 equações e n-1 incógnitas.

A condição importante é serem os bipolos controlados a tensão. Fontes ideais de tensão são excluídas (embora fontes reais que possam ser representadas por equivalentes de Norton sejam permitidas).

Para aplicação do método de nós em circuitos contendo fontes ideais de tensão, estes são previamente modificados: fontes de tensão em série com resistores são substituídas pelos respectivos equivalentes de Norton, eventualmente após transformações de Blakesley (ou *deslocamentos de fontes de tensão através de nós*). Estas transformações têm uma conseqüência interessante: cada fonte transformada reduz em uma unidade o número de nós e portanto o número de equações e incógnitas. Mas têm também uma desvantagem: o circuito resolvido é diferente do original. Desaparecem algumas tensões e correntes no circuito e aparecem outras. A solução completa do circuito passa a exigir um passo adicional após a solução das equações, o retorno ao circuito original.

3.1 Leis de Kirchhoff

Para a construção do método de nós é utilizado o enunciado mais usual da lei das correntes : *a soma algébrica das correntes que saem de cada nó é nula*. Considerados *n*-1 nós (é excluído normalmente o nó de referência para as tensões de nós), há *n*-1 equações (algébricas lineares) independentes podem ser escritas em notação matricial. Definido o vetor **i** das correntes dos bipolos (numerados de 1 a *b*)

$$\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ \Lambda \ \ i_b]^{\mathbf{T}}$$

estas equações ficam

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

A matriz **A**, *n*-1 por *b*, é a matriz de incidência (ou, para alguns autores, matriz de incidência reduzida). Os nós são numerados de 1 a *n*-1 (lembrando que um nó é excluído) e a linha *i* da matriz corresponde ao nó *i*. A coluna *j* da matriz corresponde ao bipolo *j*. Os elementos da matriz são +1, -1 ou 0, conforme a corrente convencionada para o bipolo *saia*, *entre* ou o bipolo não esteja ligado ao nó. Evidentemente cada coluna tem, no máximo, dois elementos não nulos, de sinal contrário (quando o bipolo correspondente não estiver ligado ao nó de referência).

A lei das tensões, por sua vez, é enunciada de preferência em forma já envolvendo as tensões de nós: *a tensão de cada bipolo é a diferença entre as tensões dos nós aos quais o bipolo é ligado*. Nesta forma (que permite facilmente deduzir a forma mais usual, *a soma das tensões em cada laço é nula*) são obtidas *b* equações (também algébricas lineares) relacionando *b*+*n*-1 tensões. Fica evidente serem independentes as *n*-1 as tensões de nós. E definindo os vetores **v** (de dimensão *b*) das tensões de bipolos e **e** (de dimensão *n*-1) das tensões de nós

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \Lambda \ \ v_b]^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \Lambda \ \ e_{n-1}]^{\mathbf{T}}$$

as equações ficam, em forma matricial,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e} \qquad (2)$$

desde que seja sempre utilizada a convenção de receptor (a corrente em cada bipolo entra pelo terminal marcado +). *A mesma matriz de incidência das equações de corrente aparece nas equações de tensões*.

3.2 Correntes em função de tensões; equações de nós

Para completar o método de nós é necessário escrever as correntes dos bipolos em função das tensões dos bipolos.

Esta relação pode ser algébrica (para os resistores e fontes de corrente; como já observado, fontes ideais de tensão não são permitidas) ou envolver derivadas ou integrais (capacitores e indutores); pode ser linear ou não linear. E ainda cada corrente pode depender apenas da tensão no bipolo ou também da tensão em outros bipolos (no caso de fontes vinculadas ou de indutores com indução mútua).

Representando a relação entre correntes e tensões na forma

$$\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \tag{3}$$

as equações de nós, obtidas a partir da Eq.(1), da Eq.(2) e da Eq.(3) ficam

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}\right) = \mathbf{0}$$

No caso de circuitos lineares resistivos, contendo apenas resistores e fontes de corrente a Eq.(3) é algébrica e pode ser escrita

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{v} + \mathbf{I}_b \tag{4}$$

A matriz b por b (chamada matriz admitância de ramos) $\mathbf{Y}_b$ é diagonal e tem na linha j a condutância do bipolo j (ou zero se este bipolo for uma fonte ideal de corrente). O vetor $\mathbf{I}_b$ (vetor de fontes de corrente de ramos) tem a corrente das fontes de corrente nas linhas correspondentes a estas fontes (e zero nas demais linhas). Neste caso as equações de nós ficam

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b \tag{5}$$

As incógnitas são as tensões de nós, constituindo o vetor **e**. A matriz quadrada de coeficientes é simétrica (o que decorre da simetria de matriz admitância de ramos). Pode-se lembrar que a Eq.(5) muitas vezes é escrita diretamente *por inspecção* do circuito: na diagonal principal da matriz de coeficientes aparecem as somas das condutâncias ligadas a cada nó e fora da diagonal principal, com sinal negativo, a soma das condutâncias que ligam diretamente cada par de nós. E no segundo membro, que é o vetor de fontes de corrente de nós, aparecem com sinal positivo, as fontes de corrente que entram em cada nó (e negativo as que saem).

A partir da Eq.(5) e levando em conta as Eq.(2) e Eq.(4) é possível explicitar todas as variáveis do circuito, tensões de nós, tensões e correntes de bipolos:

$$\mathbf{e} = -\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b$$

$$\mathbf{i} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}\right] \cdot \mathbf{I}_b \tag{6}$$

A matriz I é a matriz identidade de dimensão adequada, b por b.

3.3 Generalização

Os resultados anteriores se generalizam sem dificuldade. Assim, em circuitos resistivos lineares contendo fontes de corrente vinculadas a tensão a Eq.(4) tem a mesma forma, mas a transcondutância destas fontes aparece fora da diagonal principal da matriz admitância de ramos. E como esta matriz deixa de ser simétrica, a matriz de coeficientes na Eq.(5) também deixa de ser simétrica.

Deve-se notar que, assim como fontes de tensão independentes, fontes de tensão vinculadas não são permitidas no método de nós. Circuitos que as contenham devem ser previamente modificados. E também fontes de corrente vinculadas a corrente não são permitidas, sendo necessário inicialmente exprimir estas correntes em função de tensões de bipolos.

Circuitos em regime permanente senoidal. O método de nós pode ser empregado para análise de circuitos lineares contendo fontes de corrente e impedâncias, em regime permanente senoidal. Basta notar que os diversos vetores de tensões e correntes passam a conter os fasores que representam estas grandezas. E, naturalmente, a matriz admitância de ramos contém as admitâncias complexas dos diversos bipolos.

Uma menção particular deve ser feita aos circuitos contendo indutâncias com indução mútua. Para exprimir correntes em função de tensões será necessário inverter a matriz indutância. Correntes em alguns bipolos dependem também de tensões em outros bipolos. Aparecem novamente elementos não nulos fora da diagonal principal da matriz admitância de ramos. Neste caso a matriz permanece simétrica, assim como a matriz de coeficientes das equações de nós. Mas aparece mais uma restrição: o método de nós não aceita circuitos que tenham indução mútua com acoplamento unitário, uma vez que neste caso não é possível inverter a matriz indutância.

Transformadas de Laplace. O método de nós também pode ser empregado na obtenção das equações de circuitos lineares contendo fontes de corrente, resistores, capacitores e indutores, já expressas em transformadas de Laplace. Os diversos vetores de tensões e correntes passam a conter as transformadas de Laplace destas grandezas. Como as transformadas de Laplace das correntes em um resistor (de resistência R), um indutor (de indutância L) ou em um capacitor (de capacitância C) se relacionam com as transformadas de Laplace das tensões nos mesmos elementos, respectivamente, por

$$I(s) = \frac{1}{R} V(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0)$$

a matriz admitância de ramos conterá as admitâncias transformadas destes elementos, na forma $1/R$, $1/sL$ e sC respectivamente. Além disso as correntes iniciais nos indutores e as tensões iniciais nos capacitores serão incluídas no vetor de fontes de correntes de ramos.

Considerações semelhantes às feitas no caso de circuitos com indução mútua em regime permanente senoidal podem ser feitas neste caso. Assim, por exemplo, não é possível tratar de circuitos com acoplamento unitário.

4. MÉTODO DE NÓS MODIFICADO

Para aplicar o método de nós a um circuito contendo uma fonte ideal de tensão seria necessário modificar o circuito, com a desvantagem já citada, do circuito resolvido ser diferente do original.

Uma alternativa é fornecida pelo método de nós modificado: a corrente *i* através da fonte é mantida entre as incógnitas. Mas como o número de incógnitas aumenta, é necessário incluir uma nova equação. Esta equação será a equação da fonte ideal de tensão. Uma fonte ideal de tensão *E* entre os nós *k* e *l* do circuito fornece a equação

$$e_k - e_l = E$$

No caso de circuitos lineares resistivos obtém-se, em lugar da Eq.(5), equações com uma incógnita adicional *i* no vetor de incógnitas e a matriz de coeficientes *bordada* com uma nova linha e uma nova coluna. A matriz de coeficientes permanece simétrica.

A utilização do método de nós modificado não é restrita aos circuitos contendo bipolos cuja corrente não pode ser expressa em função da tensão. Embora todas as correntes de um circuito possam ser obtidas a partir da Eq.(6), quando a variável desejada for uma corrente pode ser interessante também não eliminá-la.

4.1 Formulação matricial do método de nós modificado para circuitos lineares

Além das equações de correntes, escritas para *n*-1 nós e expressas, sempre que *possível* ou *conveniente*, em função das tensões de nós, é necessário considerar as equações dos bipolos para os quais a corrente não se exprimiu em função daquelas tensões. Estes bipolos serão chamados de *bipolos controlados a corrente*.

A numeração dos bipolos deve terminas pelos bipolos controlados a corrente. Em conseqüência, a matriz de incidência **A** pode ser vista como a justaposição de duas matrizes $\mathbf{A}_v$ e $\mathbf{A}_i$:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_v \;\; \mathbf{A}_i]$$

As colunas da matriz $\mathbf{A}_i$ correspondem aos bipolos controlados a corrente.

Os vetores **i**, correntes dos bipolos, e **v**, tensões dos bipolos, são também colocados como justaposição de vetores

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_v \\ \mathbf{i}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_v \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}$$

As equações de corrente, dadas por Eq.(1), ficam, então

$$\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{i}_v + \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{i}_i = 0 \tag{7}$$

e a expressão das tensões dos bipolos em função das tensões de nós, dada por Eq.(2), pode ser escrita

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{A}_v^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e} \tag{8}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e} \tag{9}$$

As relações entre correntes e tensões dos bipolos, considerados apenas aqueles bipolos para os quais as correntes serão expressas em função das tensões serão expressas por

$$\mathbf{i}_v = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{v}_b + \mathbf{I}_b \tag{10}$$

Para os bipolos controlados a corrente pode-se escrever

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{i}_i + \mathbf{E}_b \tag{11}$$

Da Eq.(7) e da Eq.(10) vem

$$\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{v}_v + \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{i}_i = -\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{I}_b$$

e, levando em conta a Eq.(8),

$$\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}_v^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{i}_i = -\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{I}_b \tag{12}$$

Por outro lado, da Eq.(9) e da Eq.(11) vem

$$\mathbf{A}_i^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{i}_i = \mathbf{E}_b$$

Finalmente, agrupando a Eq.(12) e a Eq.(13),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}_v^{\mathbf{T}} & \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}} & -\mathbf{Z}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{i}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{I}_b \\ \mathbf{E}_b \end{bmatrix}$$

Estas são as equações de nós modificadas. E em geral é bastante simples escrever estas equações por inspecção do circuito, como feito no caso do método de nós.

Naturalmente o método de nós modificado pode também ser generalizado como foi o método de nós, por exemplo, para o regime permanente senoidal, ou com emprego das transformadas de Laplace.

A possibilidade de incluir correntes entre as incógnitas torna o método muito geral: além de fontes de tensão, independentes ou vinculadas a tensão, podem ser incluídas fontes de corrente ou de tensão vinculadas a corrente. Em circuitos com indução mútua não será necessário inverter a matriz indutância, o que, além de simplificar a formulação das equações, permite incluir na análise indutores com acoplamento unitário.

Quando se desejam as equações diferenciais do circuito é preferível usar, como incógnitas em indutores, suas correntes. Embora neste caso a formulação das equações de estado com utilização do conceito de árvore própria talvez seja preferível, o método de nós modificado também fornece uma alternativa.

5. OUTROS MÉTODOS DE ANÁLISE

5.1 Método de malhas

O método de malhas é fundamentado na escolha das correntes de malha como incógnitas. As equações são as equações de tensões escritas para as malhas (internas) do circuito, expressas em função das correntes de malha. Os bipolos devem ser controlados a corrente, o que exclui as fontes de corrente.

É utilizado o enunciado mais freqüente da lei das tensões*: a soma algébrica das tensões em cada malha é nula*, obtendo-se b-n+1 equações independentes. As correntes dos bipolos são combinações (soma ou diferença) das b-n+1 correntes de malha.

O método pode ser considerado dual do método de nós. Para isto adota-se um mesmo sentido (por exemplo, horário) para todas as correntes de malha. A lei das tensões é expressa, matricialmente, com emprego da matriz de malhas **M**, de dimensão b-n+1 por n-1. A lei das correntes é expressa na forma: *a corrente através de cada bipolo é a diferença das correntes das malhas que ele separa*. As equações de correntes, em conseqüência, também empregam a matriz de malhas (transposta).

Como o método de nós, o método de malhas pode ser generalizado (para o regime permanente senoidal, para transformadas de Laplace,...) e também pode ser modificado (para tratar de circuitos com bipolos controlados a tensão).

Embora seja muito usado, sobretudo para solução manual de circuitos pequenos, o método de malhas tem uma restrição muito importante: malhas só são definidas para circuitos planos. Além desta razão, existe uma outra para privilegiar o método de nós: uma descrição de um circuito sem emprego de uma representação gráfica é muito facilmente feita através da matriz de incidência. Suas colunas determinam os nós aos quais cada bipolo é ligado.

5.2 Métodos de laços fundamentais e de cortes fundamentais

Como já observado, escolhida uma árvore para o circuito, tem-se conjuntos de tensões ou correntes independentes: as tensões dos bipolos da árvore e as correntes dos bipolos da co-árvore. E tem-se também conjuntos de equações independentes de tensões (equações para os laços fundamentais) e de correntes (equações para os cortes fundamentais).

O método de laços fundamentais utiliza as equações de tensões escritas para os laços fundamentais expressas em função das correntes dos bipolos da co-árvore. Os bipolos devem ser controlados a corrente. Para a formulação das equações é utilizada a matriz dos laços fundamentais, usualmente notada **B**.

O método oferece uma alternativa interessante para o método de malhas: como aquele, utiliza equações de tensões, e as incógnitas são correntes. Porém agora as correntes são sempre correntes reais, existentes no circuito (e não abstrações matemáticas, como pode acontecer com as correntes de malha). E o método não é limitado a circuitos planos.

Finalmente o método de cortes fundamentais utiliza as equações de correntes escritas para os cortes fundamentais expressas em função das tensões dos bipolos da árvore. Os bipolos devem ser controlados a tensão. Para a formulação das equações é utilizada a matriz dos cortes fundamentais **Q**.

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O método de nós modificado pode ser empregado para mostrar de maneira simples vários resultados importantes da teoria de circuitos.

6.1 Circuito equivalente de Thévenin

O circuito equivalente de Thévenin, fundamental na teoria de circuitos, é bem conhecido. Cada vez que um circuito linear (contendo fontes e/ou com corrente inicial em indutores ou tensão inicial em capacitores não nulos) é ligado a uma carga apenas por dois nós comuns, é possível substituir o circuito linear pelo seu equivalente de Thévenin, constituído pelo mesmo circuito *morto* em série com uma fonte de tensão adequada. Por circuito morto entende-se o mesmo circuito com todas as fontes, correntes iniciais em indutores e tensões iniciais em capacitores anulados.

Para mostrar este resultado pode-se supor a carga ligada entre o nó 1 e o nó de referência. E para facilitar a exposição, será suposto um circuito resistivo.

Substituindo-se a carga por uma fonte de corrente i (com sentido do nó 1 para a referência) podem ser escritas as equações de nós (ou equações de nós modificadas) para o circuito. A corrente i aparecerá na primeira linha do vetor de fontes de corrente de nós, com sinal negativo.

É fácil ver que a tensão do nó 1 será dada pela diferença de duas parcelas, na forma

$$e_1 = E - R \cdot i$$

Este resultado é traduzido pelo circuito equivalente de Thévenin. A tensão E é a tensão de circuito aberto (isto é, para i nulo) e a resistência R é a resistência entre o nó 1 e o nó de referência com todas as fontes do circuito anuladas.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi ilustrada uma apresentação possível para o ensino da disciplina Circuitos Elétricos nos cursos de engenharia. A motivação é a redução do tempo necessário para o aprendizado, tornada possível pela disponibilidade de computadores pessoais e calculadoras científicas. Assim embora o método de nós modificado leve a sistemas com mais equações que o método de nós, a sua generalidade, associada à facilidade com que são escritas as equações e ao fato das soluções já representarem as variáveis do circuito, uma vez que não é necessário modificá-lo, justificam plenamente seu emprego.

REFERÊNCIAS

Burian Jr., Y., *Circuitos Elétricos*, Burian Editores, Campinas, SP, 1993

Burian Jr., Y., Lyra, A.C.C., *Circuitos Elétricos*, em preparo.

Chua, L., Desoer, C., Kuh, E., *Linear and Nonlinear Circuits,* McGraw Hill, NY, 1993

Orsini, L. Q., *Curso de Circuitos Elétricos*, vol. 1 e 2, Edgard Blucher, SP, 1993

Ho, C.W., Ruehli, ª E., Brennan, P. A, *The modified Nodal Approach to Network Analysis*, IEEE Transactions on Circuit and Systemas, vol. CAS-22, 6, p. 504-508, june 1975.