O ENSINO DO CÁLCULO ATRAVÉS DA ANÁLISE DE SITUAÇÕES CONCRETAS

Mariana Karoline Costa Ferreira – mkkaroline_@hotmail.com
UniChristus - Centro Universitário Christus
Avenida Dom Luís, 911 - Meireles.
60160-230 – Fortaleza – Ceará

Daniel Brandão Menezes – brandaomenezes@hotmail.com
UniChristus - Centro Universitário Christus
Avenida Dom Luís, 911 - Meireles.
60160-230 – Fortaleza – Ceará

Resumo: *O presente estudo se justifica pela necessidade de desenvolver o estudo da disciplina de Cálculo diferencial e integral lecionada nos cursos de engenharia civil sob uma visão contextualizada, ou seja, fazer uma análise de uma situação desafiadora ligada ao conteúdo teórico a ser ensinado. A problemática gerada pela situação concreta escolhida para este estudo foi entender qual seria o melhor lugar para sentar-se no cinema e para o desenvolvimento do artigo foi necessário o uso de um conceito matemático utilizado no nível superior: derivadas. A metodologia utilizada foi o levantamento bibliográfico com pesquisas em artigos e livros que descreviam as principais definições a serem utilizadas no transcorrer do trabalho: trigonometria e o cálculo diferencial, bem como, fazer uma releitura do que alguns autores já escreveram sobre o tema. O estudo revela a possibilidade de integrar a situação concreta com as definições do Cálculo e é mais uma fonte bibliográfica que pode auxiliar alunos e professores no estudo de derivadas.*

Palavras-chave: *Ensino do Cálculo diferencial, Derivada, Situação concreta.*

1. INTRODUÇÃO

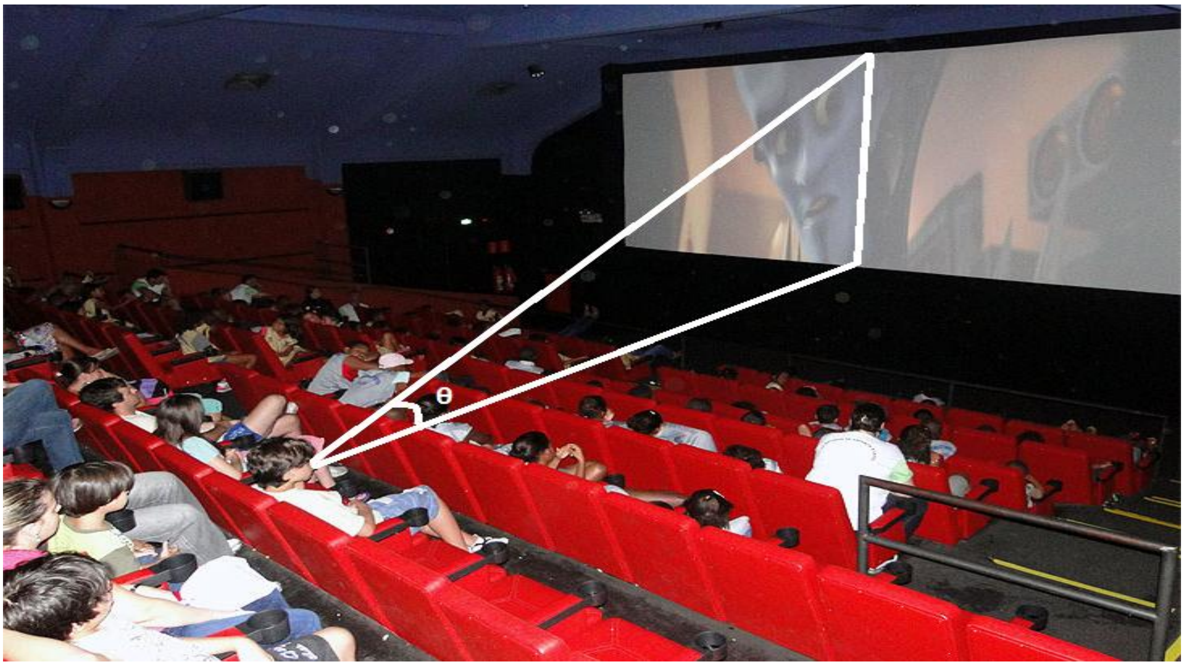
Com o intuito de gerar uma aplicabilidade do cálculo diferencial e integral nos conflitos diários da engenharia surgiu o interesse em abordar um problema rotineiro, mas que em seu íntimo está relacionado ao cálculo propriamente dito.

Não nos é incomum a indecisão de onde sentar, seja no teatro, no cinema ou em uma orquestra. Enfrentamos a difícil decisão de onde se obteria a melhor visão do espetáculo, isto é um problema que envolve geometria e derivadas. Geometria por envolver ângulos, triângulos e trigonometria. Derivadas por envolver a taxa de variação do ângulo em relação às distâncias em questão.

Devem-se levar em conta algumas variáveis de que depende a solução do problema. Como por exemplo; altura da tela, ângulo de inclinação das cadeiras, distância entre as fileiras, altura do observador, ângulo de visão do observador, distância da tela à primeira fileira, comprimento da tela.

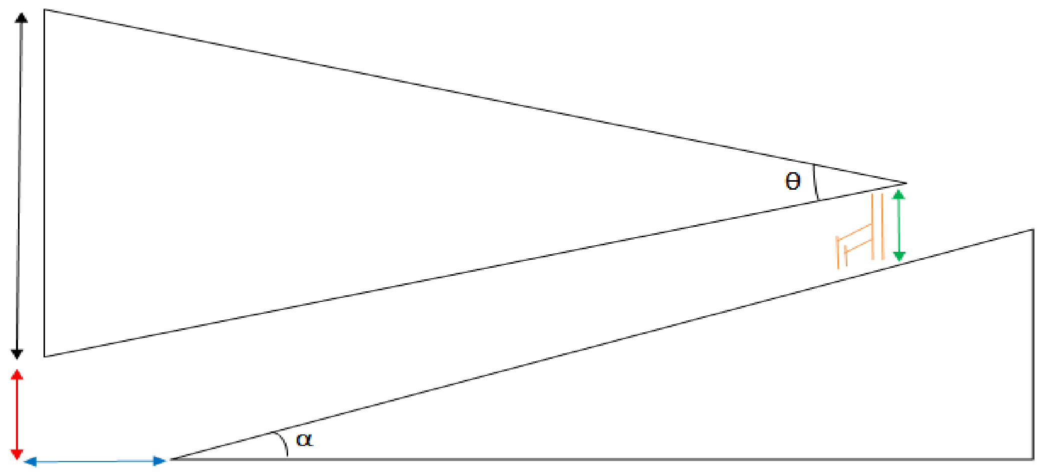
O objetivo é gerar o maior ângulo de visão possível para o observador. Desta forma vamos demonstrar a situação na figura 1.

Figura 1 – Demonstração da situação problema.



2. REFERENCIAL TEÓRICO

Figura 2 – Variáveis envolvidas na situação do observador.



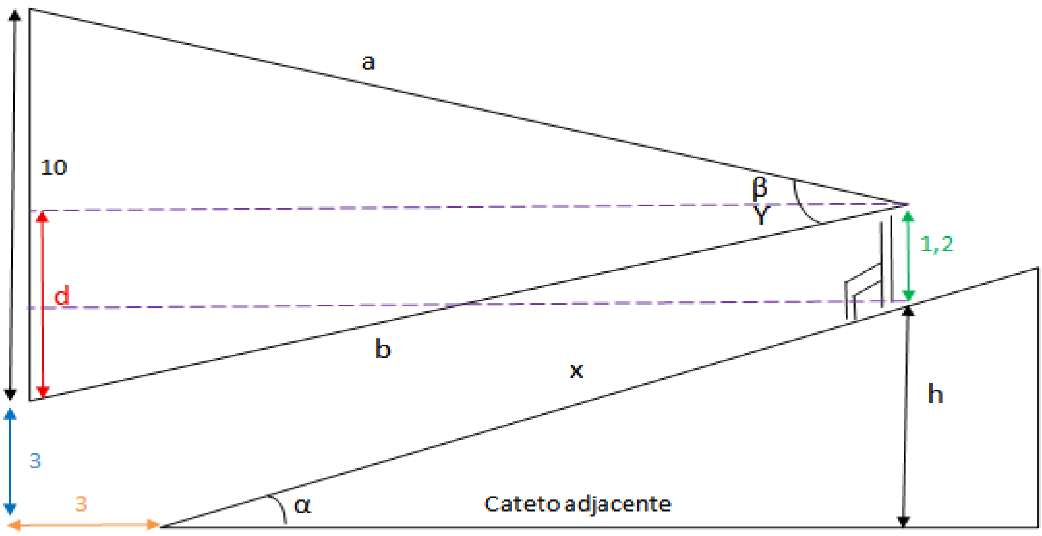
De acordo com a figura 02 podemos obter a situação e suas variáveis. Podemos supor que tenhamos 21 fileiras, isso nos daria um intervalo de fileiras que se disporia $0 \leq x \leq 20$, onde x=0 indica a primeira fila, suporemos também que o ângulo de inclinação das cadeiras seja de 20 graus, que a distância dos pés da cadeira aos olhos do observador equivale a 1,2 metros, que a tela está a 3 metros do solo, que a primeira fileira de cadeiras está a 3 metros da parede, que a tela tem 10 metros de comprimento e que a distância entre fileiras é de 1 metro.

Agora vamos aos cálculos, suporemos que a melhor posição para que haja uma melhor observação do espetáculo seja no maior valor do ângulo de visão que o observador pode atingir. Dessa forma:

A seta vermelha equivale aos 3 metros de altura a que se encontra a tela. A seta azul indica a distância entre a parede e a primeira fileira que é de 3 metros. A seta verde se refere à altura do pé a cadeira aos olhos do observador que é de 1,2 metros. A seta preta é o representa o comprimento de 10 metros da tela. Alfa (α) é o ângulo de inclinação das cadeiras e teta (θ) o ângulo de visão do observador.

Partindo desta descrição, podemos dividir o ângulo de visão do observador em duas partes, fazendo com que o ângulo inicial seja igual à soma dos dois novos ângulos gerados. E fazendo com que o triângulo isósceles se torne a soma de dois triângulos retângulos.

Figura 3 – Variáveis envolvidas na situação do observador com valores especificados.



$$\theta = \beta + \gamma \quad (1)$$

$$cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{x}$$

$$cateto\ adjacente = x.cos\alpha \quad (2)$$

$$a^2 = (10 - d)^2 + (3 + x.cos\alpha)^2 \quad (3)$$

$$b^2 = d^2 + (3 + x.cos\alpha)^2 \quad (4)$$

$$1{,}2 = d - (h - 3) \quad (5)$$

$$sen\beta = \frac{10 - d}{a} \quad (6)$$

$$cos\beta = \frac{3 + x.cos\alpha}{a} \quad (7)$$

$$sen\gamma = \frac{d}{b} \quad (8)$$

$$cos\gamma = \frac{3 + x.cos\alpha}{\text{b}} \quad (9)$$

$$h = x.sen\alpha \quad (10)$$

Daí podemos substituir o valor encontrado na equação 10 na equação 5 e assim obtermos:

$$d = -1{,}8 + x.sen\alpha \quad (11)$$

Podemos substituir o valor de d encontrado na equação 11 nas equações 3 e 4 e assim encontraremos:

$$a^2 = (11{,}8 - x.sen\alpha)^2 + (3 + x.cos\alpha)^2 \qquad (12)$$

$$b^2 = (-1{,}8 + x.sen\alpha)^2 + (3 + x.cos\alpha)^2 \qquad (13)$$

A equação do cosseno do arco duplo é: $cos\theta = cos(\beta + Y) = cos\beta.cosY - sen\beta.senY$. Dessa maneira, utilizando as equações 6, 7, 8 e 9:

$$cos\beta.cos\gamma = \frac{(3 + x.cosa)^2}{ab}$$

$$sen\beta.sen\gamma = \frac{10d - d^2}{ab}$$

E daí obtém-se:

$$cos\theta = \frac{(3 + x.cos\alpha)^2 - 10d + d^2}{ab} \qquad (14)$$

Ao somar a² + b² a partir das equações 3 e 4 obtêm-se:

$$a^2 + b^2 = \left[(10 - d)^2 + (3 + x.cosa)^2\right] + [d^2 + (3 + x.cos\alpha)^2]$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 100}{2} = -10d + d^2 + (3 + x.cos\alpha)^2 \qquad (15)$$

Mas, dividindo dos dois lados da equação 15 por ab têm-se:

$$\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab} = cos\theta$$

$$\theta = arc\ cos\ \frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab} \qquad (16)$$

Sabendo que:

sen 20º = 0,342020143

cos 20º = 0,93969262

$$a = \sqrt{139{,}24 - 23{,}6x.sen20º + x^2.(sen20º)^2 + 9 + 6x.cos20º + x^2.(cos20º)^2}$$

$$a = \sqrt{148{,}24 + 6xcos20º - 23{,}6xsen20º + x^2} \qquad (17)$$

$$b = \sqrt{x^2.(sen20º)^2 - 3{,}6x.sen20º + 3{,}24 + 9 + 6x.cos20º + x^2.(cos20º)^2}$$

$$b = \sqrt{12.24 - 3{,}6x.sen20º + 6x.cos20º + x^2} \qquad (18)$$

$$a^2 + b^2 = 148{,}24 + 6x.cos20º - 23{,}6x.sen20º + x^2) + (12.24 - 3{,}6x.sen20º + 6x.cos20º + x^2)$$

$$a^2 + b^2 = (148{,}24 + 6x.cos20º - 23{,}6x.sen20º + x^2) + (12.24 - 3{,}6x.sen20º + 6x.cos20º + x^2) \qquad (19)$$

$$a.b = \sqrt{148{,}24 + 6x.cos20º - 23{,}6x.sen20º + x^2].\sqrt{[12.24 - 3{,}6x.sen20º + 6x.cos20º + x^2}}$$

$$a.b = \qquad (20)$$

$$\sqrt{1814{,}45 - 822{,}52x.sen20º + 962{,}88x.cos20º + 160{,}48x^2 - 162{,}76x^2.(sen20º).(cos20º) + 36x^2.(cos20º)^2 + 12x^3.(cos20º) + 84{,}96x^2.(sen20º)^2 - 27{,}2x^3.(sen20º) + x4}$$

Substituindo os valores de seno e cosseno nas equações 19 e 20 obteremos:

$$a^2 + b^2 = 160{,}48 + 12x.cos20º - 27{,}2x.sen20º + 2x^2$$

$$a^2 + b^2 = 160{,}48 + 11{,}27x - 9{,}3x + 2x^2$$

$$a^2 + b^2 = 160{,}48 + 1{,}97x + 2x^2 \qquad (21)$$

$$a.b =$$

$$\sqrt{1814{,}45 - 822{,}52x.sen20º + 962{,}88x.cos20º + 160{,}48x^2 - 162{,}76x^2.(sen20º).(cos20º) + 36x^2.(cos20º)^2 + 12x^3.(cos20º) + 84{,}96x^2.(sen20º)^2 - 27{,}2x^3.(sen20º) + x4}$$

$$a.b = \sqrt{1814{,}45 - 281{,}31x + 904{,}81x + 160{,}48x^2 - 52{,}31x^2 + 31{,}78x^2 + 11{,}27x^3 + 9{,}93x^2 - 9{,}3x^3 + x4}$$

$$a.b = \sqrt{1814{,}45 + 623{,}5x + 149{,}88x^2 + 1{,}97x^3 + x4} \qquad (22)$$

$$\theta = arc\cos\frac{160{,}48 + 1{,}97x + 2x^2 - 100}{2\sqrt{1814{,}45 + 623{,}5x + 149{,}88x^2 + 1{,}97x^3 + x4}} \qquad (23)$$

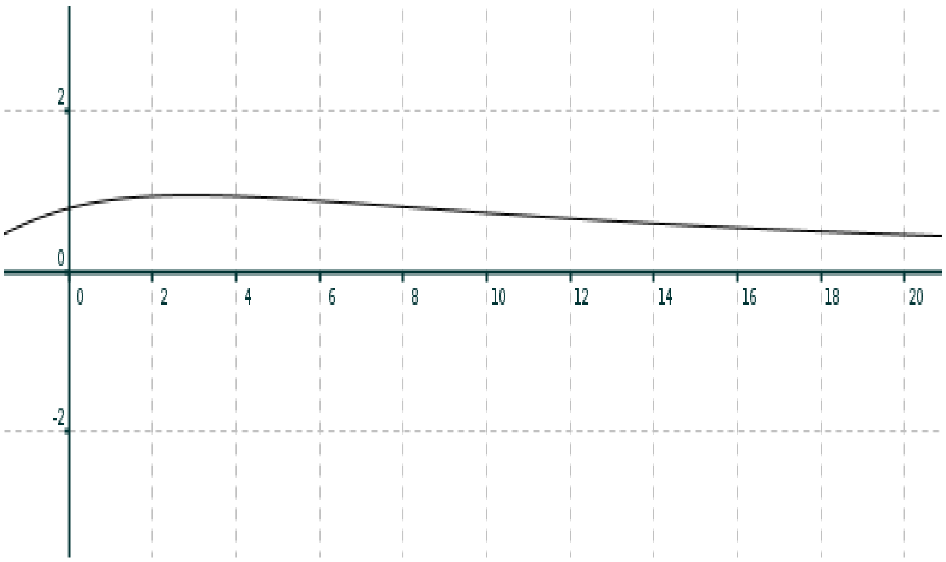
Desta forma, a partir do intervalo sugerido temos:

Tabela 1 – Relação ente fileira e ângulo de visão.

Valor de x	Valor de θ	Fileira
0	44,76º	1
1	50,94º	2
2	53,84º	3
3	54,54º	4 (Maior ângulo)
4	53,84º	5
5	52,41º	6
6	50,20º	7
7	48,70º	8
8	46,36º	9

9	43,94º	10
10	42,26º	11
11	39,64º	12
12	37,81º	13
13	35,90º	14
14	33,90º	15
15	32,85º	16
16	43,94º	17
17	29,54º	18
18	28,35º	19
19	27,12º	20 (Menor ângulo)
20	27,12º	21 (Menor ângulo)

Gráfico 1 – Função arco-cosseno.



A partir deste gráfico observamos que o ângulo maior se encontra entre x=2 e x=3, para definir o número exato desta posição, basta derivar a função e igualá-la a zero.

$$\theta = arc\ cos\frac{60{,}48 + 1{,}97x + 2x^2}{2\sqrt{1814{,}45 + 623{,}5x + 149{,}88x^2 + 1{,}97x^3 + x4}}$$

2.1 Máximos e mínimos da função

Os valores máximos e mínimos de uma função são chamados também de extremos da mesma. Algumas funções podem não possuir máximo, ou mínimo ou até mesmo nenhum dos dois. Não é o nosso caso nesta problemática.

Para a obtenção destes valores de máximos e mínimos, no cálculo diferencial, utilizamos a derivada primeira igualada a zero, pois serão os pontos críticos a função, onde a função deve ter derivada definida.

No nosso, como vimos no gráfico acima, a função só tem um ponto crítico e é justamente o ápice de θ, o valor pelo qual procuramos.

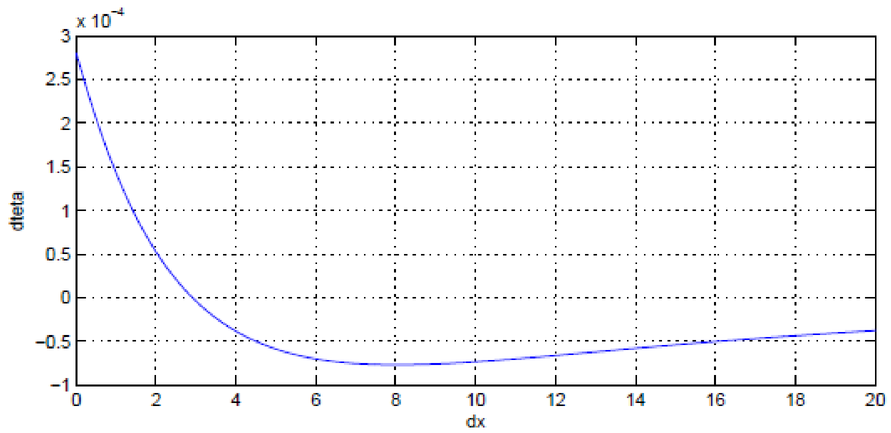
Derivando a função:

$$y = \operatorname{arc\,cos} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\dfrac{-30560{,}35 - 2385{,}58x + 3383{,}57x^2 - 353{,}72x^3}{(7257{,}8 + 2494x + 599{,}52x^2 + 7{,}88x^3 + 4x4).(1814{,}45 + 623{,}5x + 149{,}88x^2 + 1{,}97x^3 + x4)}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{60{,}48 + 1{,}97x + 2x^2}{2\sqrt{(1814{,}45 + 623{,}5x + 149{,}88x^2 + 1{,}97x^3 + x4)}}\right)^2}}$$

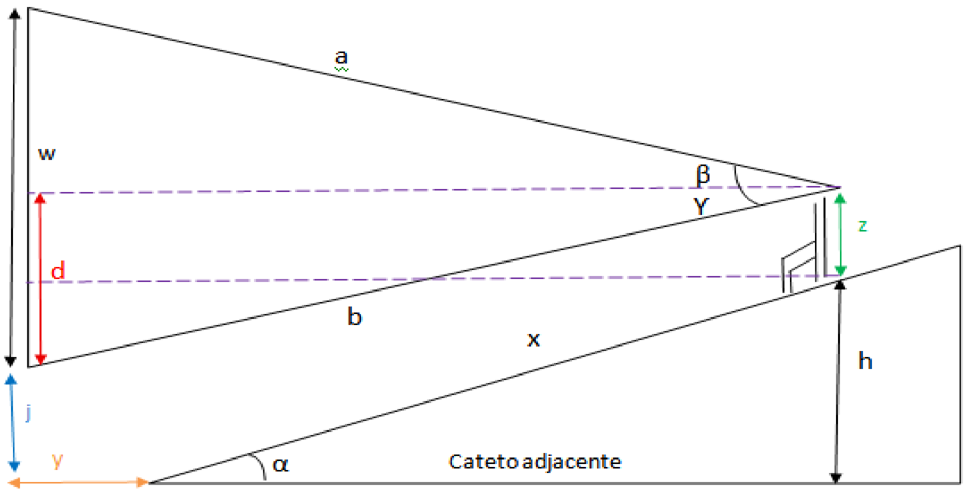
Ao derivá-la e igualá-la a zero obteremos seu ponto crítico, no nosso caso obteremos x = 2,9134, ou seja, aproximadamente x = 3 que seria a quarta fileira, o gráfico da derivação é o seguinte:

Gráfico 2 – Variação de $\frac{d\theta}{dx}$. (SENE, 2013).



Desta forma é possível definir uma equação geral que poderia ser resolvia alterando os valores das dimensões do local, e assim aplicar a qualquer estabelecimento nos mesmos moldes independendo de qual possa ser.

Figura 4 – Variáveis generalizadas envolvidas na situação do observador.



Sendo:

$$d = z - j + x.sen\alpha \tag{24}$$

Onde z indica a distância entre os pés da cadeira aos olhos do homem, j indica altura da tela, y refere-se à distância da parede à primeira fileira, w é o comprimento da tela e α é o ângulo de inclinação das cadeiras.

Daí obtém-se:

$$a^2 = (w - d)^2 + (y + x.cos\alpha)^2 \tag{25}$$

$$b^2 = d^2 + (y + x.cos\alpha)^2 \tag{26}$$

$$z = d - (h - j) \tag{27}$$

$$sen\beta = \frac{w - d}{a} \tag{28}$$

$$cos\beta = \frac{y + x.cos\alpha}{a} \tag{29}$$

$$sen\gamma = \frac{d}{b} \tag{30}$$

$$cos\gamma = \frac{y + x.cos\alpha}{b} \tag{31}$$

$$h = x.sen\alpha \tag{32}$$

Daí deve-se substituir o valor encontrado na equação 32 na equação 27 e assim obtermos:

$$z = d - (x.sen\alpha - j)$$

$$d = z - j + x.sen\alpha \tag{33}$$

Podemos substituir o valor de d encontrado na equação 24 nas equações 25 e 26 e assim encontraremos:

$$a^2 = (w - d)^2 + (y + x.cosa)^2$$

$$a^2 = (w - z + j - x.sen\alpha)^2 + (y + x.cosa)^2 \tag{34}$$

$$b^2 = d^2 + (y + x.cosa)^2$$

$$b^2 = (z - j + x.sen\alpha)^2 + (y + x.cosa)^2 \tag{35}$$

A equação do cosseno do arco duplo é: cosθ = cos (β + Υ) = cosβ.cosΥ – senβ.senΥ. Dessa maneira, utilizando as equações 28, 29, 30 e 31:

$$cos\beta.cos\gamma = \frac{(y + x.cosa)^2}{ab}$$

$$sen\beta.sen\gamma = \frac{wd - d^2}{ab}$$

E daí obtém-se:

$$cos\theta = \frac{-wd + d^2 + (y + x.cosa)^2}{ab} \tag{36}$$

Ao somar a² + b² a partir das equações 34 e 35 obtêm-se:

$$a^2 + b^2 = [(w - d)^2 + (y + x.cosa)^2] + [d^2 + (y + x.cosa)^2]$$

$$\frac{a^2 + b^2 - w^2}{2} = -wd + d^2 + (y + x.cosa)^2 \tag{37}$$

Mas, dividindo dos dois lados da equação 37 por ab têm-se:

$$\frac{a^2 + b^2 - w^2}{2ab} = \frac{-wd + d^2 + (y + x.cosa)^2}{ab}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - w^2}{2ab} = cos\theta$$

$$\theta = arc\cos\frac{a^2 + b^2 - w^2}{2ab} \tag{38}$$

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se concluir que é possível encontrar, depois de alguns cálculos, a resolução do problema e, além disso, através desse problema, observar que no dia a dia não será difícil os estudantes se depararem com situações que exigirão a utilização da ferramenta matemática aliada ao raciocínio descritivo e problematizado de situações.

Pode-se observar que a equação que define o problema é o quociente entre uma equação de segundo grau e a raiz quadrada de uma equação de quarto grau, logo é possível solucioná-la com o auxílio de um software que define gráficos equacionados, a exemplo do MATLAB e do GEOGEBRA.

O gráfico mostra que no caso de 21 fileiras seria a 4ª fileira de baixo para cima que atingirá o maior ângulo para uma melhor visão e na 20ª e 21ª fileira se obteria o menor ângulo possível de visão para o observador.

Por fim, esta pesquisa surge como mais uma fonte literária para os alunos e docentes e proporciona subsídios para pesquisas futuras que tentem abordar os desafios diários da engenharia.

Agradecimentos

À minha família, professores, amigos e colaboradores. Pelo apoio e incentivo, pela ajuda e pelo auxílio de todos, agradeço aos que acreditaram que eu conseguiria. Um abraço e minha gratidão.

4. REFERÊNCIAS

BERTOLOTO, F.J. SENE, H.A. **Cinco problemas aplicados de cálculo integral e diferencial.** Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index. php/horizontecientifico/article/view/17856. Acesso em 17 mar. 2014.

STEWART, J. **Cálculo.** Cengage Learning, São Paulo, vol. 1, 6a ed., 2009.

THOMAS, G.B. **Cálculo.** Always Learning, São Paulo, vol. 1, 12ª ed., 2012.

TEACHING THROUGH THE CALCULATION ANALYSIS OF CONCRETE SITUATIONS

Abstract: *This study is justified by the need to develop the study of the discipline of differential and integral Calculus taught courses in civil engineering in a contextualized view, ie, to analyze a situation linked to challenging academic content being taught . The problems generated by the situation chosen for this study using a mathematical concept used in higher level was to understand what would be the best place to sit in the cinema and the development of the product was necessary. The methodology used was the literature survey with research articles and books describing the main settings to be used in the course of work : trigonometry and differential calculus , as well as to re-read what some authors have written on the subject . The study reveals the possibility of integrating the actual situation with the definitions and the calculation is more a bibliographic source that can help students and teachers in the study of derived.*

Keywords: *Teaching of Differential Calculus, Derivative, concrete situation.*