



ABORDAGEM PEDAGÓGICA DE PROCEDIMENTOS PASSO-A-PASSO PARA A ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Diogo Folador Rossi – rossi.diogo@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Av. Fernando Ferrari, 514, Campus de Goiabeiras
CEP 29075-910 – Vitória - ES

Paulo Providência – provid@dec.uc.pt

Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil, INESC Coimbra
Rua Luís Reis Santos, FCTUC – Pólo II
3030-788 Coimbra – Portugal

Walnório Graça Ferreira – walnorio@pesquisador.cnpq.br

Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Av. Fernando Ferrari, 514, Campus de Goiabeiras
CEP 29075-910 – Vitória - ES

Resumo: *Existem vários procedimentos para a solução da equação de movimento de sistemas estruturais. Uma primeira opção seria fazer a análise no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Uma segunda opção seria decidir se se usaria ou não métodos de superposição. Para problemas não lineares, porém, os métodos que usam superposição não são os mais adequados. Nesses casos, os procedimentos indicados são os métodos passo-a-passo, nos quais a ideia central é dividir o carregamento e o histórico de resposta em uma sequência de intervalos, sendo a resposta calculada em cada intervalo a partir das condições iniciais existentes no seu início, com a inclusão da variação do carregamento. Assim, a solução para cada iteração se torna uma análise independente, não havendo necessidade de superposição. Este artigo faz uma abordagem pedagógica dos métodos passo-a-passo, apresentando aqueles que se originam de equações integrais, especificamente os procedimentos de Euler-Gauss e os métodos de Newmark-beta, por serem poderosos e eficazes. Os métodos aqui envolvidos são aplicados tanto nos sistemas de um grau de liberdade quanto nos sistemas com múltiplos graus de liberdade. No final, apresenta-se um exemplo numérico.*

Palavras-chave: *Vibrações estruturais, Métodos passo-a-passo, Ensino na engenharia*

1 INTRODUÇÃO

Existem duas abordagens gerais que podem ser usadas na determinação da resposta dinâmica de estruturas. A primeira envolve a avaliação da contribuição independente de várias respostas que são combinadas para obter a resposta total, usando o conceito de superposição de efeitos. Vários são os métodos descritos na literatura que fazem uso dessa

Realização:



Organização:





abordagem, como o método da Integral de Duhamel (que trabalha com as equações no domínio do tempo) e o método da Transformada de Fourier (procedimento realizado no domínio da frequência). Por causa do uso da superposição de efeitos na obtenção do resultado, tais métodos não podem ser usados em estruturas de comportamento não linear, ficando limitados somente à análise de sistemas lineares. A segunda abordagem geral de problemas dinâmicos de estruturas é o uso de procedimentos numéricos iterativos do tipo “passo-a-passo”, que podem ser aplicados em sistemas de comportamento não linear, já que não fazem o uso de superposição de efeitos. A ideia central presente nesses métodos é dividir o carregamento e o histórico de resposta da estrutura em uma sequência de intervalos de tempo, sendo calculada a resposta em cada intervalo de forma iterativa a partir das condições iniciais (deslocamento e velocidade) existentes no início daquele intervalo, e a partir da variação do carregamento durante o mesmo. Com isso, a solução para cada intervalo se torna uma análise independente, não havendo necessidade de combinar diferentes contribuições de outras soluções através de superposição. Frequentemente, o comportamento não linear pode então ser considerado simplesmente assumindo que as propriedades da estrutura permanecem constantes durante cada incremento de tempo. Esse artigo apresenta uma abordagem didática acerca desses procedimentos numéricos iterativos.

2 SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

A estrutura desse artigo, suas figuras e simbologia apoiam-se fortemente no livro de dinâmica estrutural de Clough e Penzien (1995). Considerando o sistema dinâmico massa-mola (Figura 1) de um grau de liberdade, com amortecimento viscoso, submetido a uma carga dinâmica $p(t)$, tem-se, para a equação diferencial de equilíbrio que governa o movimento:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \quad (1)$$

Nessa equação, m é a massa do sistema, k é a constante de rigidez elástica da mola e c é o coeficiente de amortecimento viscoso. Fazendo uso dos métodos numéricos do tipo passo-a-passo para a obtenção do histórico de resposta dessa equação de movimento, a variável tempo t deve ser discretizada, e o equilíbrio é alcançado por um processo de integração sequencial. Dessa forma os deslocamentos da estrutura são computados em instantes de tempo separados por incrementos de tempo de integração (Figura 2). A equação de movimento assume, dessa maneira, a forma discreta seguinte, em um dado passo de tempo i :

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + k u_i = p_i \quad (2)$$

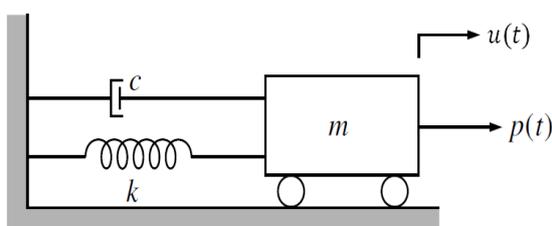


Figura 1 – Sistema massa-mola com 1 grau de liberdade

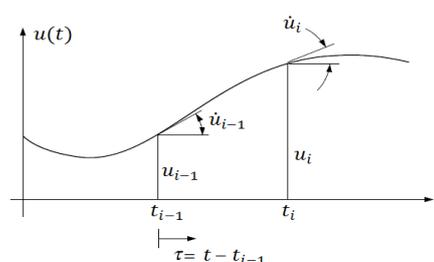


Figura 2 – Histórico de respostas de deslocamentos



É importante citar que esse tipo de discretização permite encontrar soluções que satisfazem aproximadamente as equações de movimento durante cada passo, visto que o carregamento também é aproximado em valores discretos. Várias considerações devem ser feitas acerca da precisão e estabilidade do método numérico escolhido, dependendo do objetivo da análise a ser realizada.

2.1 Equações de integração

As equações básicas usadas nos métodos descritos a seguir se baseiam no uso da integração das grandezas dinâmicas dentro do passo de tempo, a partir das condições iniciais de cada passo até as condições finais, ao término do intervalo de comprimento Δt . O conceito essencial é representado pelas seguintes equações:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (3)$$

$$u_i = u_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \dot{u}(\tau) d\tau \quad (4)$$

As equações (3) e (4) expressam a velocidade e deslocamento finais em termos dos valores iniciais destas grandezas somadas com uma expressão integral. A Figura 2 ilustra a variável de integração τ tomada ao longo do passo i de duração Δt . A variação da velocidade depende da integral da aceleração \ddot{u} e a variação do deslocamento depende da integral da velocidade \dot{u} correspondente. Para realizar esse tipo de análise é necessário primeiramente assumir como a aceleração varia durante o passo. Essa suposição controla a variação da velocidade, assim como torna possível proceder ao próximo passo da análise.

2.2 Aceleração constante – Procedimento de Euler-Gauss

O método mais simples, conhecido como método de Euler-Gauss, é baseado na suposição de que a aceleração tem um valor constante fixo no intervalo do passo i . A consequência dessa suposição é que a velocidade deve variar linearmente e que o deslocamento varia segundo uma curva quadrática durante o incremento Δt (Figura 3). É assumido que a aceleração constante desse método seja igual à média entre os valores finais e iniciais tomados durante o passo. Dessa forma, a expressão para a aceleração fica igual a da equação (5) seguinte, e os valores finais da velocidade e deslocamento, obtidos combinando a equação (5) com a (3) e a (4), são dados nas equações (6) e (7), respectivamente.

$$\ddot{u}_{méd} = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (5)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (6)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (7)$$

Para iniciar esse tipo de análise em qualquer passo, é necessário primeiro encontrar as acelerações inicial e final, \ddot{u}_{i-1} e \ddot{u}_i , para o cálculo da aceleração constante $\ddot{u}_{méd}$. A



aceleração inicial pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico dada na expressão (2), no tempo $t = t_{i-1}$, ou seja:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{1}{m}(p_{i-1} - c \dot{u}_{i-1} - k u_{i-1}) \quad (8)$$

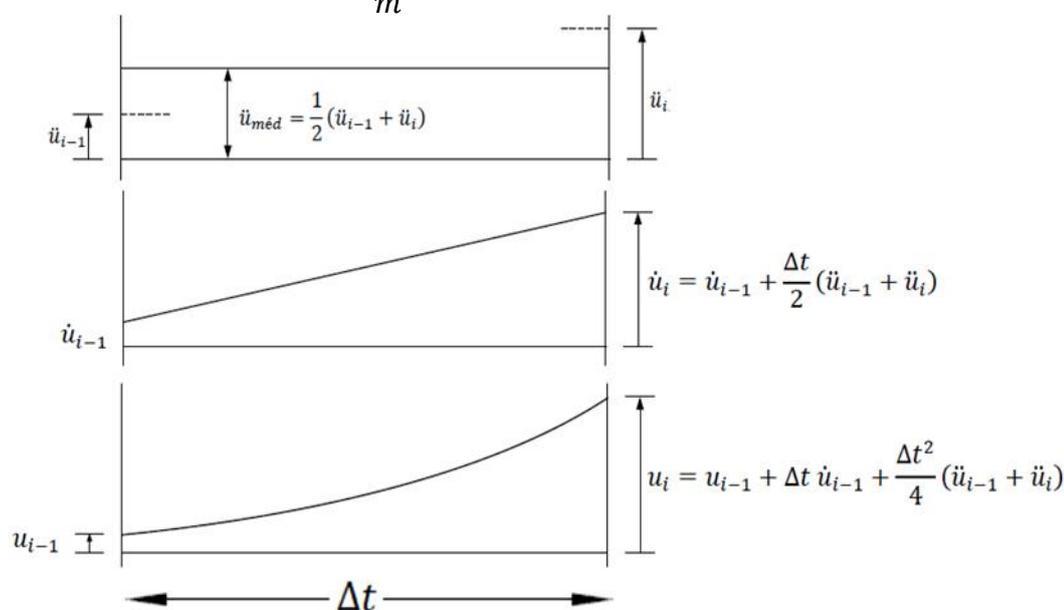


Figura 3 – Aceleração, velocidade e deslocamento no método de Euler-Gauss

Já a aceleração final é obtida por meio de iterações: Começando com um valor arbitrário para \ddot{u}_i , valores para \dot{u}_i e u_i são obtidos das equações (6) e (7), assim um valor refinado de \ddot{u}_i é calculado da condição de equilíbrio dinâmico no tempo $t = t_i$ usando uma expressão equivalente a da equação (8), o que leva a valores mais refinados da velocidade \dot{u}_i e deslocamento u_i . Eventualmente, a iteração converge para um valor fixo da aceleração final neste passo, e a análise pode assim proceder para o passo seguinte. Quando as expressões que fornecem os novos valores para um dado passo incluem um ou mais valores pertencentes àquele passo, necessitando realizar iterações, o método numérico é classificado como implícito (Cintra, 2008). “A grande vantagem desse método de aceleração constante é que ele é incondicionalmente estável; isto é, os erros não são amplificados de um passo para o próximo não importando o quão grande o intervalo de tempo é escolhido” (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 121, tradução nossa).

2.3 Aceleração Linear

Outro método muito aplicado na prática se baseia na suposição de que a aceleração varia linearmente durante o incremento de tempo entre seu valor inicial \ddot{u}_{i-1} e final \ddot{u}_i . Dessa forma, a expressão para a aceleração em cada instante τ durante o passo de tempo é dada pela equação de uma reta igual à expressão (9) seguinte, e os valores finais da velocidade e deslocamento, obtidos combinando a equação (9) com a (3) e a (4), são dados nas equações (10) e (11), respectivamente.



$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_{i-1} + \left(\frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{\Delta t} \right) \tau \quad (9)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (10)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{u}_i \quad (11)$$

Novamente percebe-se que a formulação é implícita, visto que devem ser feitas iterações para se chegar ao valor final da aceleração \ddot{u}_i , necessário à realização da análise (o valor de \ddot{u}_{i-1} é obtido da equação (8)). Definindo T como o período de oscilação livre do sistema, tem-se que, diferente do que ocorre com o método da aceleração constante, “o método da aceleração linear é apenas condicionalmente estável; ele será instável a menos que $\Delta t/T \leq \sqrt{3}/\pi$ ” (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 122, tradução nossa).

2.4 Métodos de Newmark Beta

Uma formulação mais geral foi proposta por Newmark (1959), a qual engloba os dois métodos precedentes como casos especiais, e que pode ser aplicado em muitas outras versões. No método de Newmark, as equações básicas de integração exibidas nas expressões (3) e (4), para a velocidade e deslocamento finais, são dadas por:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{u}_i \quad (12)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{i-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_i \quad (13)$$

Nestas equações, fica claro que o fator γ provoca uma ponderação linear entre a influência das acelerações final e inicial na variação da velocidade. Da mesma forma, o fator β promove uma ponderação entre as influências dessas acelerações na variação do deslocamento. Através de um estudo do desempenho desta formulação notou-se que o fator γ controla a quantidade de amortecimento artificial induzido por esse procedimento e que não há amortecimento artificial se $\gamma = 1/2$, sendo esse o valor recomendado para as análises padrões. Adotando $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$, as equações (12) e (13) ficam iguais as (6) e (7), ou seja, para $\beta = 1/4$, o método se reduz ao da aceleração constante média. Já adotando $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$, as equações (12) e (13) ficam iguais as (10) e (11), e o método se reduz ao da aceleração linear.

2.5 Formulação incremental para análise não linear

Os procedimentos tratados anteriormente são aplicáveis a análises de sistemas lineares nos quais as forças atuantes são expressas em termos dos valores totais da velocidade e deslocamento que se desenvolveram na estrutura até o presente instante. Entretanto, para análises não lineares, é assumido que as propriedades físicas do sistema permanecem constantes somente durante um curto incremento de tempo ou de deformação. Por isso, é importante reformular as expressões propostas em termos de equações incrementais de movimento, como descrito a seguir.



Supondo que as propriedades de rigidez elástica e de amortecimento sejam funções do tempo (como mostrado nos gráficos da força elástica e de amortecimento F_S e F_C da Figura 4), então a equação de equilíbrio no instante $t = t_i$ é dada por:

$$m \ddot{u}_i + c(t_i) \dot{u}_i + k(t_i) u_i = p_i \quad (14)$$

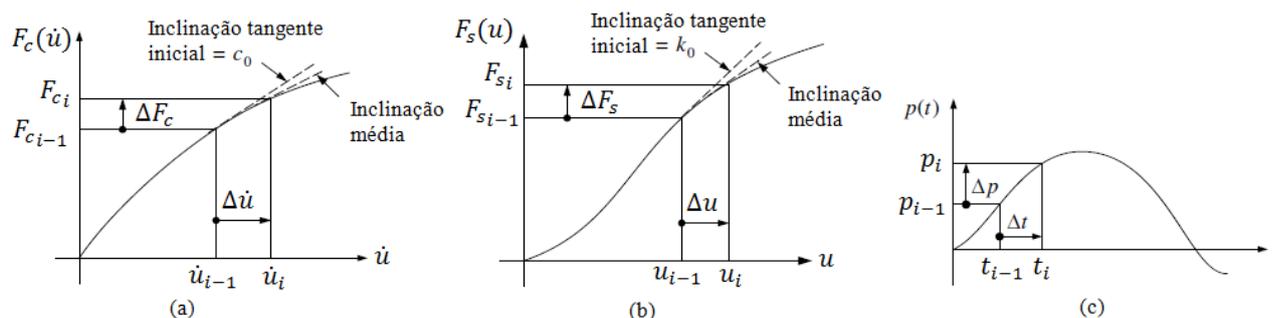


Figura 4 – Sistema dinâmico não linear

Já no instante $t = t_{i-1}$ o equilíbrio é dado por:

$$m \ddot{u}_{i-1} + c(t_{i-1}) \dot{u}_{i-1} + k(t_{i-1}) u_{i-1} = p_{i-1} \quad (15)$$

Subtraindo as equações (14) e (15), obtém-se

$$m \Delta \ddot{u} + c_0 \Delta \dot{u} + k_0 \Delta u = \Delta p \quad (16)$$

onde Δu , $\Delta \dot{u}$ e $\Delta \ddot{u}$ são as variações do deslocamento, velocidade e aceleração (Figura 4) e c_0 e k_0 são os valores de $c(t)$ e $k(t)$ sobre os quais se assume que se mantenham constantes entre t_{i-1} e t_i . Os termos c_0 e k_0 podem ser aproximados como os valores médios das propriedades de amortecimento e de rigidez que variam durante o intervalo Δt , como indicado pelas inclinações médias nas Figura 4 (a) e (b), respectivamente. Porém, segundo Clough e Penzien (1995), “na prática, essas inclinações médias são obtidas somente por iterações [...] Para evitar aplicar essas iterações, é comum usar na prática as inclinações tangentes iniciais” (tradução nossa). As inclinações tangentes iniciais para as forças exibidas na Figura 4 são dadas por:

$$c_0 = \left. \frac{\partial F_C}{\partial \dot{u}} \right|_{t_{i-1}} \quad k_0 = \left. \frac{\partial F_S}{\partial u} \right|_{t_{i-1}} \quad (17)$$

Reescrevendo as equações do método geral de Newmark e introduzindo a notação incremental, as expressões básicas (12) e (13) se tornam:

$$\Delta \dot{u} = (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{u}_i \quad (18)$$

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{i-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_i \quad (19)$$



E a equação de equilíbrio dinâmico que fornece o valor refinado da aceleração no final do passo fica (o valor de \ddot{u}_{i-1} é obtido da equação (8)):

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m} (\Delta p - c_0 \Delta \dot{u} - k_0 \Delta u) + \ddot{u}_{i-1} \quad (20)$$

As equações reformuladas com o uso da notação incremental funcionam tanto para análises lineares quanto para não lineares. Quando o sistema for linear, as grandezas c_0 e k_0 permanecem constantes durante toda análise. A velocidade e o deslocamento no final do incremento de tempo são então obtidos por:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u} \quad (21)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u \quad (22)$$

2.6 Conversão para formulação explícita

As formulações implícitas dos métodos expostos são em geral inconvenientes, porque é necessário realizar iterações para determinar a aceleração no final do passo de tempo. Por essa razão esses métodos são usualmente convertidos numa forma explícita, em que os novos valores da resposta calculados em cada passo dependem somente de quantidades obtidas no passo anterior. O objetivo dessa conversão é expressar a aceleração final em termos de outras grandezas conhecidas. De fato, ao observar as equações (18), (19) e (20) do método geral de Newmark (na forma incremental) observa-se que elas formam um sistema de três equações lineares que possui três incógnitas, nomeadamente as variações da velocidade e deslocamento e a aceleração no final do passo. Dessa forma, fica claro que é possível usar um método alternativo de solução dessas equações que não recorra ao uso de iterações, como algum método de eliminação de variáveis, por exemplo, ou a inversão da matriz quadrada de ordem 3 que compõe os coeficientes do sistema de equações. Porém, com o objetivo de expandir a conversão para a forma explícita aos sistemas de múltiplos graus de liberdade, é conveniente usar uma maneira específica de substituição de variáveis, como explicado a seguir.

Resolvendo a equação (19) para \ddot{u}_i e substituindo na equação (18) encontra-se:

$$\Delta \dot{u} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_{i-1} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_{i-1} \quad (23)$$

Tomando novamente a solução da equação (19) para \ddot{u}_i e subtraindo-a de \ddot{u}_{i-1} encontra-se:

$$\Delta \ddot{u} = \left[\Delta u - \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right] \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad (24)$$

Substituindo (23) e (24) na equação de equilíbrio (16) obtém-se:

$$\bar{k} \Delta u = \bar{\Delta p} \quad (25)$$

que tem a forma de uma equação de equilíbrio estático, envolvendo a rigidez efetiva \bar{k} e o carregamento efetivo incremental $\bar{\Delta p}$, dados, respectivamente por:



$$\bar{k} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c_0 + k_0 \quad (26)$$

$$\bar{\Delta p} = \Delta p + m \left(\frac{\dot{u}_{i-1}}{\beta \Delta t} + \frac{\ddot{u}_{i-1}}{2\beta} \right) + c_0 \left[\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_{i-1} \right] \quad (27)$$

Ao resolver a equação (25) para o incremento de deslocamento Δu , o incremento de velocidade $\Delta \dot{u}$ pode ser calculado através da equação (23). O deslocamento e velocidade finais podem então ser obtidos pelas equações (21) e (22). Já a aceleração final poderia ser encontrada através da equação (20), ou usando a (24), mas como podem ocorrer mudanças nos parâmetros c_0 e k_0 devido a não linearidade, a aceleração no início do próximo passo é obtida por imposição da condição de equilíbrio, semelhantemente à equação (8), da seguinte forma:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{1}{m} (p_{i-1} - c_0 \dot{u}_{i-1} - k_0 u_{i-1}) \quad (28)$$

3 SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Nesta secção continuaremos a utilizar o referido livro de Clough e Penzien como referência principal. É trivial a generalização do comportamento e análise do sistema com um grau de liberdade a sistemas com múltiplos graus de liberdade. Porém, enquanto que o estado do primeiro é caracterizado por um único deslocamento, a descrição do estado dos segundos, num dado instante t , envolve n deslocamentos. De forma a possibilitar uma representação compacta, estas quantidades são reunidas em vetores de dimensão n , denotados com caracteres em negrito. Por exemplo, o deslocamento dos n graus de liberdade é reunido no vetor

$$\mathbf{u}^T = [u_j]^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \quad (29)$$

definindo-se de forma similar os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$. Se se designar por Δu_j a variação da componente j do deslocamento durante o intervalo Δt definido pelos instantes t_{i-1} e t_i , é igualmente possível definir o vetor variação de deslocamento $\Delta \mathbf{u}$ que reúne estas componentes. Deste modo, a expressão incremental (16) para o equilíbrio dinâmico de um grau de liberdade pode ser estendida a n graus de liberdade, escrevendo-se

$$\mathbf{m} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}_0 \Delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_0 \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{p} \quad (30)$$

sendo $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ e $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ os vetores variação de velocidade e de aceleração, \mathbf{m} a matriz de massa, que se admite ser constante, e \mathbf{c}_0 e \mathbf{k}_0 matrizes constantes que aproximam, respectivamente, a matriz de amortecimento $\mathbf{c}(t)$ e rigidez $\mathbf{k}(t)$ no intervalo Δt . Como se referiu anteriormente é habitual adotar matrizes tangentes estabelecidas para o instante inicial t_{i-1} . O vetor no membro direito da expressão (30) reúne a variação no intervalo Δt das forças aplicadas segundo os n graus de liberdade. A generalização dos métodos passo-a-passo já apresentados para sistemas com um único grau de liberdade a sistemas com múltiplos graus de liberdade é quase imediata. Nesta comunicação consideraremos unicamente o método da aceleração



média constante e o método da aceleração linear, por serem métodos que conjugam uma grande simplicidade com precisão e estabilidade adequadas. Como se explicou nas seções 2.2 e 2.3 nestes métodos é admitida uma forma simples para a variação da aceleração no intervalo Δt , a qual permite estabelecer relações simples entre deslocamentos, velocidades e acelerações, que reduzem a equação incremental de equilíbrio dinâmico a um sistema linear de equações em $\Delta \mathbf{u}$.

No caso do método da aceleração média constante este sistema é uma generalização da relação (25), sendo dado por

$$\bar{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{u} = \bar{\Delta \mathbf{p}} \quad (31)$$

em que $\bar{\mathbf{k}}$ e $\bar{\Delta \mathbf{p}}$ generalizam os termos definidos pelas expressões (26) e (27), ou seja,

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c}_0 + \mathbf{k}_0 \quad (32)$$

$$\bar{\Delta \mathbf{p}} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{m} \left(\frac{\ddot{\mathbf{u}}_{i-1}}{2\beta} + \frac{\dot{\mathbf{u}}_{i-1}}{\beta \Delta t} \right) + \mathbf{c}_0 \left[\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{u}_{i-1} \right] \quad (33)$$

Como se explicou na seção 2.4, o método da aceleração média constante é determinado a partir das relações anteriores fazendo $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$,

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{c}_0 + \mathbf{k}_0 \quad (34)$$

$$\bar{\Delta \mathbf{p}} = \Delta \mathbf{p} + 2\mathbf{m} \left(\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} \right) + 2\mathbf{c}_0 \dot{\mathbf{u}}_{i-1} \quad (35)$$

De modo a evitar a acumulação de erros, é conveniente determinar o vetor aceleração no início de cada passo através da condição de equilíbrio dinâmico

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} = \mathbf{m}^{-1} (\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{c}_0 \dot{\mathbf{u}}_{i-1} - \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_{i-1}) \quad (36)$$

a qual generaliza a expressão (8), mas requer a inversão da matriz de massa. Esta inversão pode ser evitada no caso do método da aceleração média constante, e a expressão (35) simplificada, se se substituir este valor do vetor aceleração no início do intervalo, vindo

$$\bar{\Delta \mathbf{p}} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} - 2\mathbf{k}_0 \mathbf{u}_{i-1} \quad (37)$$

Assim, neste método, no início de cada intervalo de tempo determinam-se as matrizes de amortecimento e rigidez tangentes, atualiza-se a matriz $\bar{\mathbf{k}}$ de acordo com (34) e determina-se o vetor $\bar{\Delta \mathbf{p}}$ de acordo com (37). A solução do sistema linear (31) fornece o incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}$ no intervalo Δt . Com este vetor calcula-se o valor corrente dos deslocamentos $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}$ e o vetor variação das velocidades através da generalização de (23) para o método da aceleração média constante,

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{u} - 2\dot{\mathbf{u}}_{i-1} \quad (38)$$



e, finalmente, as velocidades $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \Delta\dot{\mathbf{u}}$. Esta operação conclui este passo, podendo passar-se ao passo seguinte definido, pois por (31), (34), (37) e (38). Note-se que neste método não é necessário calcular o valor corrente do vetor aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ porque este não consta das expressões (34), (37) e (38).

Como se mostrou na secção 2.4 o método da aceleração linear é determinado por $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$. Neste caso, as expressões (34), (37) e (38) escrevem-se

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{c}_0 + \mathbf{k}_0 \quad (39)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{p}} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{m} \left(3\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} \right) + \mathbf{c}_0 \left(\frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + 3\dot{\mathbf{u}}_{i-1} \right) \quad (40)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{3}{\Delta t} \Delta \mathbf{u} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{i-1} - 3\dot{\mathbf{u}}_{i-1} \quad (41)$$

devendo utilizar-se em (40) e (41), como se explicou, valores das acelerações que satisfaçam a condição (36). De modo a reduzir o custo computacional, deve calcular-se a inversa da matriz de massa, que consta desta condição, uma única vez no início do ciclo de passos. Como se referiu na secção 2.3, contrariamente ao método da aceleração média constante, incondicionalmente estável, a estabilidade numérica do método da aceleração linear para um sistema com vários graus de liberdade só estará assegurada se o incremento Δt não for superior a $\sqrt{3}/\pi$ do menor período de oscilação livre da estrutura.

4 EXEMPLO NUMÉRICO

Como exemplo de aplicação considerou-se um problema cuja resolução, utilizando o método de sobreposição nodal, foi apresentada por Rossi e Ferreira *et al* (2011). Trata-se de um edifício de tipo “Shear Building” com três pavimentos móveis, o qual tem, portanto, três graus de liberdade, conforme mostra o desenho esquemático da Figura 5. Apenas no piso superior atua um carregamento horizontal transiente durante 0,05 segundos, se anulando a partir deste instante (Figura 6). Considerou-se amortecimento proporcional de Rayleigh com uma taxa de amortecimento de 5 % para o 1º e 3º modos. Note-se que no caso dos métodos passo-a-passo o caráter proporcional do amortecimento é irrelevante. Além disso, como esta estrutura apresenta comportamento linear, as matrizes auxiliares $\bar{\mathbf{k}}$ definidas pelas expressões (34) e (39), e suas inversas, devem ser calculadas uma única vez no início do ciclo de passos.

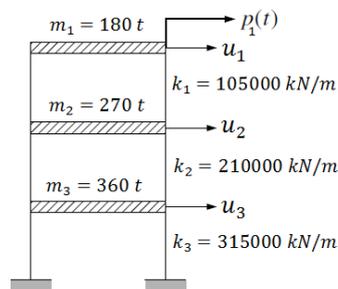


Figura 5 – Representação do Shear Building

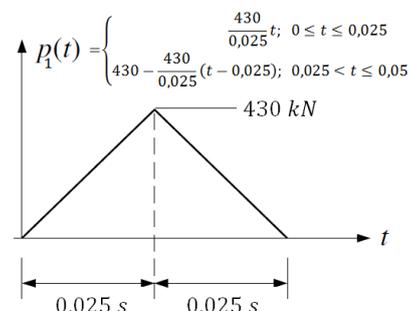


Figura 6 – Carregamento atuante no piso superior



A partir dos dados da Figura 5, podem-se construir as matrizes de massa e rigidez do sistema. As autofrequências se determinam do problema de autovalores, correspondendo-lhes os períodos 0.439, 0.205 e 0.138 s, e a matriz de amortecimento foi calculada na comunicação acima referida. Ignorando as unidades físicas, tem-se

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 0 \\ 0 & 0 & 360 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = 105 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{c} = 1,088 \mathbf{m} + 0,00167 \mathbf{k} \quad (43)$$

A Figura 7 representa o deslocamento dos três pisos, determinado pelo método da aceleração média constante para 200 ciclos com $\Delta t = 0,005s$. A solução calculada com o método da aceleração linear é praticamente coincidente com esta, motivo pelo qual não é apresentada. De modo a descrever adequadamente a curta ação, utilizou-se para ambos os métodos um valor muito pequeno para o intervalo Δt . Este valor é muito menor que o que seria necessário se apenas se pretendesse garantir a estabilidade numérica do método da aceleração linear.

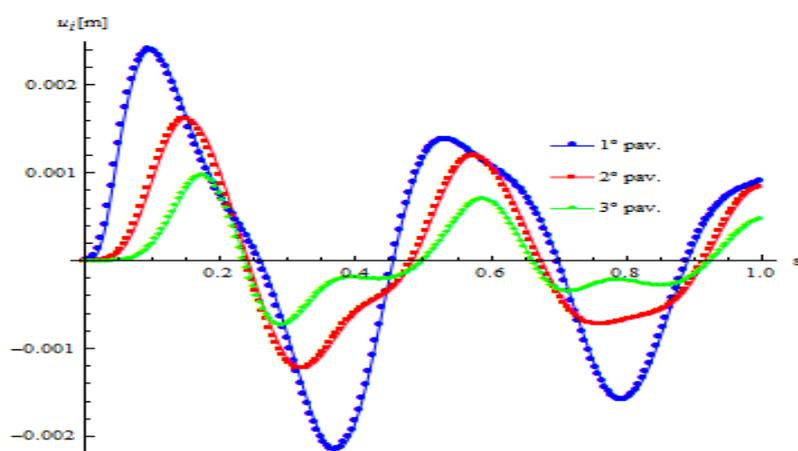


Figura 7 – Solução para o método da aceleração média constante.

5 CONCLUSÃO

Este artigo apresenta de forma didática a formulação dos procedimentos passo-a-passo que são originados de equações integrais, quais sejam, o procedimento de Euler-Gaus e os métodos de Newmark-Beta. Apresenta-se a formulação para sistemas de um grau de liberdade e sistemas de múltiplos graus de liberdade. Inicialmente é mostrada a formulação implícita, incremental e posteriormente a conversão do procedimento para a forma explícita. A formulação incremental é de vital importância para a análise não linear, visto que aceita mudanças nas propriedades físicas do sistema estrutural no incremento de tempo. Junto aos alunos de graduação de engenharia mecânica e , em especial, os alunos de engenharia civil, este artigo serve no aprendizado de solução de problemas de vibrações no âmbito dos



sistemas estruturais que se comportam não linearmente. A abordagem didática é finalizada com um exemplo numérico, bem representativo da realidade, visto que a carga transiente dada pode representar uma rajada de vento.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, à CAPES e à FAPES.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CINTRA, D. T. Uma estratégia de adaptação no tempo baseada na curvatura do histórico de deslocamentos. Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia civil da **Universidade Federal do Alagoas**, Maceió, p. 132, 2008.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3. ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995.

ROSSI, D. F. et al. A integral de duhamel e sua importância no ensino de vibrações estruturais. **XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**, Blumenau, 2011.

DIDACTIC APPROACH TO STEP-BY-STEP PROCEDURES IN DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURES

Abstract: *There are several procedures for solving the equation of motion in structural systems. A first option would be to perform the analysis in the time domain or in the frequency domain. A second option would be to decide whether or not use superposition methods. However, the procedures that apply superposition are not suited for problems with nonlinear behavior. In this case, it is more appropriate to use step-by-step procedures in which the loading and the response history are divided into a sequence of time intervals (steps), where the response during each step is calculated from the initial conditions at the beginning of the step and from the history of loading during the step. Thus the response for each step is an independent analysis problem, and there is no need to combine responses using superposition. This paper presents a didactic approach to the step-by-step methods, describing the procedures that make use of integral equations, specifically the Euler-Gauss procedures and the Newmark-beta methods, because they are powerful and effective. These methods can be applied to single degree of freedom systems as well as to multiple degree of freedom systems. At the end, a numerical example is presented.*

Key-words: *Structural vibration, Step-by-step methods, Engineering education*