

## ESTUDO COMPARATIVO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS FINAS

**Maris Stela C Silveira** – mstela@unifei.edu.br

Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, Instituto de Engenharia Mecânica

Av BPS, 1303, Pinheirinho

37500901 – Itajubá - MG

**Wlamir C Oliveira** – wlamir@unifei.edu.br

**Pedro A Rodrigues** – pearodrigues@yahoo.com.br

Graduando em Engenharia Mecânica

***Resumo:** O objetivo do trabalho é apresentar um estudo comparativo das cinco primeiras frequências naturais de uma estrutura de placa fina retangular engastada em um de seus lados. Os valores das frequências foram obtidos usando três procedimentos: experimental, analítico e Método dos Elementos Finitos (MEF). No procedimento experimental, a estrutura foi excitada por um instrumento de impacto. O sistema de aquisição de sinais, através da captação de um transdutor de respostas (acelerômetro), forneceu os sinais das frequências naturais da estrutura. Para validação do experimento, os resultados foram comparados com os valores obtidos pelo método analítico, bem como com os encontrados pelo MEF. O trabalho proposto possibilitou a identificação e análise do comportamento vibracional da placa evidenciando a importância da prática no fator motivacional do aluno. Esta interação "ambiente de aprendizagem laboratorial" proporcionou crescimento, amadurecimento e descobertas de assuntos correlacionados, tais como soluções analíticas e utilização de métodos numéricos, no caso, o MEF. Neste contexto, o aluno de graduação do curso de engenharia mecânica, pôde vivenciar os pilares propostos por Delors(1966) experienciando com maior interesse e motivação as correlações dos assuntos apresentados.*

***Palavras-chave:** Placas finas, Vibrações, Aprendizagem*

### 1 INTRODUÇÃO

Contrastando com a teoria behaviorista, onde o sujeito é observado e seu comportamento analisado acarretando em indivíduos passivos, a teoria sócio-interacionista aborda o indivíduo não como um ser vazio, passivo e sim como um sujeito que realiza sua interação com o ambiente. A aprendizagem é fruto da atividade social e cultural realizada em sociedade a começar pela família (VYGOTSKY, 1989), entretanto a aprendizagem autêntica requer esforço construtivo pessoal onde a cognição e o ato de conhecer é acentuada pela construção do conhecimento. O professor, figura mediadora, atuando na zona de desenvolvimento proximal, ajuda o aluno na habilidade de pensar, avançar, superar dificuldades, acarretando em indivíduos ativos, sujeitos de sua própria história (REGO,1995). A prática docente, centrada no aluno, apresenta-se em construção e permanente aperfeiçoamento de metodologias visando o "aprender a aprender".

O estímulo do raciocínio lógico e aprendizagem dirigida ("aprender a fazer"), as reflexões, debates e relacionamentos ("aprender a conviver") e o desenvolvimento de posturas

e atitudes ("aprender a ser") são atividades que resgatam os pilares da educação (DELORS, 1996).

O professor busca formas mais adequadas de integrar as tecnologias e os procedimentos metodológicos gerenciando o processo de aprendizagem, coordenando e gerindo as diferenças e as convergências. Neste sentido, o educador tem papel fundamental na transformação de "ambientes de aprendizagem" em ambientes interativos, onde ocorra a construção partilhada do saber.

O pensamento teórico, o mundo das idéias, a reflexão abstrata não existe jamais separada do plano objetivo e, portanto desligado da prática. Em contrapartida, não há trabalho nem ação prática que não dê como resultado uma representação teórica e não determine o aparecimento de novas idéias (PIMENTA, 1995).

O fundador do Instituto Eletrotécnico e Mecânico de Itajubá em 1913, Theodomiro Carneiro Santiago, já na ocasião, apregoava a importância da prática no ensino de Engenharia e instigava os alunos "a pensar". Seu lema ecoa até os dias atuais na Instituição UNIFEI: *"Revelemo-nos mais por atos do que por palavras para sermos dignos deste grande País"*.

Os professores, parceiros neste trabalho, mantendo a tradição da prática na Universidade, propiciaram reflexões sobre um experimento realizado no "laboratório de vibrações". Uma placa fina retangular engastada, foi submetida a uma excitação. O educando, membro ativo no processo, pôde fazer a análise dos parâmetros de frequências naturais obtidos e validar os resultados experimentais através da solução analítica e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Para efeito de validação, foram consideradas apenas as cinco primeiras frequências naturais da placa.

Este trabalho proporcionou construção compartilhada de conhecimento, onde os educadores atuaram na reflexão sobre a prática pedagógica.

## 2 O EXPERIMENTO

O processo de organização das informações e de integração do material à estrutura cognitiva denominado pelos cognitivistas de "aprendizagem" é um processo imbuído de afetividade, relação e motivação (BOCK, 1999). A prática, como atividade experimental, desperta um grande interesse no aluno propiciando uma situação de investigação consolidando conhecimentos novos, complementares e relacionados com conceitos relevantes, claros e já existentes na estrutura cognitiva.

À partir do experimento realizado no "laboratório de vibrações" da UNIFEI, pôde-se verificar a mobilização do aspecto dinâmico da "ação" desencadeada pelo fator "motivação" vinculada a relações estabelecidas entre o ambiente, a necessidade e o objeto de satisfação.

### 2.1 A montagem do experimento para obtenção das frequências naturais

A "Figura 1" apresenta o esquema do aparato instrumental utilizado no experimento.

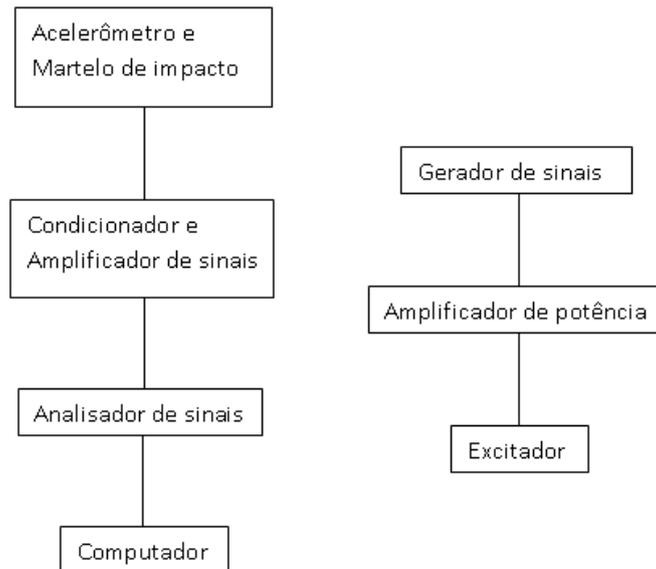


Figura 1 - Esquema do aparato instrumental

A relação dos equipamentos usados para a realização do experimento é apresentada conforme "Tabela 1".

Tabela 1 - Equipamentos utilizados no experimento

Relação dos equipamentos	
Analisador de sinais	Modelo Spider8 - HBM - 8 Canais.
Amplificador de potência	B&K - Modelo 2712
Excitador (Shaker)	B&K - Modelo 4808
Acelerômetro	B&K - Modelo 4375 - Massa: 2,4 g
Amplificador/condicionador de sinais	B&K - Modelo 2626
Sistema Computacional	Catman 5.0
Martelo de Impacto	B&K - Modelo 8202 Massa: 280g Massa da ponta de borracha 4,1 g;
Gerador de sinais	Labo - Modelo gf-03 Frequência máxima: 100 kHz, em ondas senoidais, triangulares e quadradas.

A estrutura de placa fina de aço, submetida à análise experimental, foi engastada em um dos seus lados (lado maior) e montada entre trilhos de uma base inercial por intermédio de parafusos. A localização dos pontos de excitação e resposta foi determinada a partir de ensaios realizados em diferentes posições dos pontos na placa.

As "Figuras 2 e 3" mostram a montagem dos equipamentos no laboratório de vibrações.



Figura 2 - Montagem do experimento



Figura 3 - Experimento: *shaker* e areia

## 2.2 Obtenção dos modos de vibrar

A "Figura 4" apresenta as cinco primeiras frequências obtidas pela utilização do acelerômetro.

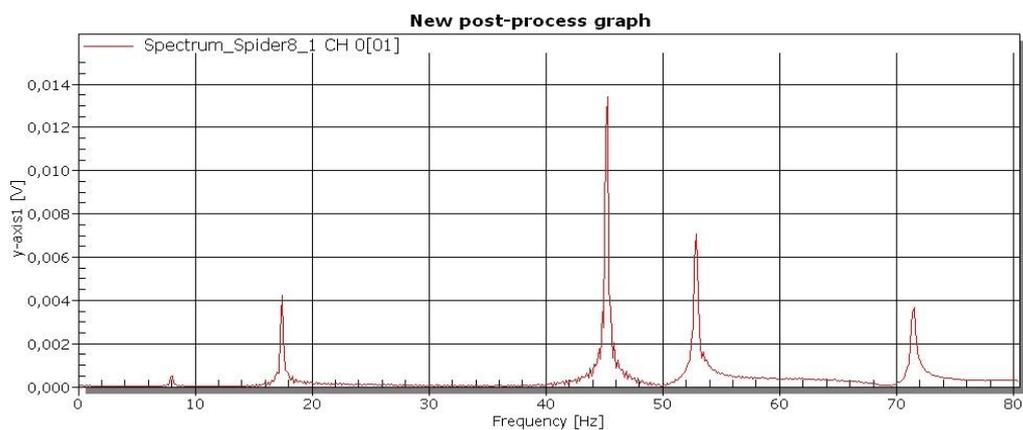


Figura 4 - Frequências obtidas a partir do acelerômetro

As "Figuras 5 a 9" ilustram os modos de vibrar da placa. Foi utilizada a técnica da areia, para melhor visualização das formas de vibração.



Figura 5 - 1º modo de vibração



Figura 6 - 2º modo de vibração



Figura 7 - 3º modo de vibração.

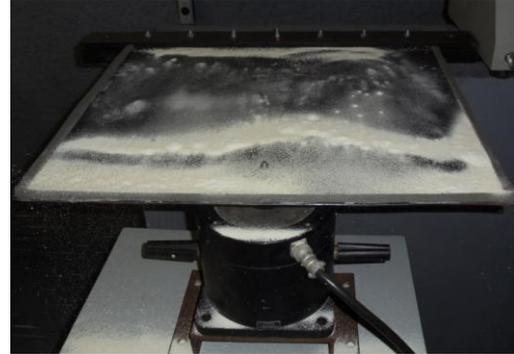


Figura 8 - 4º modo de vibração



Figura 9 - 5º modo de vibração

### 3 SOLUÇÃO ANALÍTICA

#### 3.1 Parâmetros da placa utilizada no experimento

A "Tabela 2" apresenta os parâmetros geométricos e físicos da placa utilizada no experimento.

Tabela 2 - Parâmetros da placa

Parâmetros geométricos		Parâmetros físicos
$a$	0,56 m	$E = 200 \text{ GPa}$
$b$	0,70 m	$\nu = 0,3$
$a/b$	0,80	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
$h$	0,0032 m	$\rho' = 24,96 \text{ kg/m}^2$

onde:

$a$  ... Comprimento do lado menor

$b$  ... Comprimento do lado maior

$h$  ... Valor da espessura da placa

$E$  ... Módulo de elasticidade do material

$\nu$  ... Coeficiente de Poisson do material

$\rho$  ... Massa específica  $\equiv$  Massa / Unidade de volume

$\rho' = 7800 h$  ... Massa / Unidade de área

### 3.2 Cálculo das frequências naturais

Os valores das frequências naturais de uma placa fina retangular podem ser obtidas a partir da relação  $a/b$  e do parâmetro de frequência  $\varpi$  (LEISSA, 1969) dado por:

$$\varpi = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho'}{D}} \quad (1)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular em rad/s, e

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

onde  $D$  é definido como rigidez à flexão da placa. A "Tabela 3" apresenta o resultado pela solução analítica dos cinco primeiros parâmetros de frequência e as correspondentes frequências naturais.

Tabela 3 - Parâmetros de frequências e frequências naturais [Hz]

Solução Analítica	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$\varpi_i$	3,479	7,27	18,49	22,2	28,0
$f_i$	8,658	18,093	46,017	55,250	69,685

## 4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

O Método dos Elementos Finitos é o procedimento numérico utilizado, neste trabalho, para determinar as frequências naturais da placa fina ensaiada. Foi desenvolvido um código computacional em linguagem FORTRAN para gerar a matriz de rigidez dos elementos de placa fina. As hipóteses de Kirchhoff (UGURAL, 1981) para placas finas, são usadas na formulação do elemento. O elemento de placa fina formulado, como mostra a "Figura 10(a)", tem quatro pontos nodais com três graus de liberdade por ponto nodal, sendo um deslocamento vertical e duas rotações, totalizando doze graus de liberdade, "Figura 10b". Para garantir a convergência dos resultados, foi utilizado o processo de refinamento versão- $h$  do MEF (ZIENKIEWICZ & MORGAN, 1993). Adotou-se o valor de 0,2% como fator de diferenças das frequências naturais determinadas em malhas subsequentes. Este fator foi estipulado como valor limite para convergência no processo de refinamento. A malha formada por vinte elementos (cinco elementos na direção do lado maior e quatro na direção do lado menor) atendeu o critério de parada do procedimento numérico.

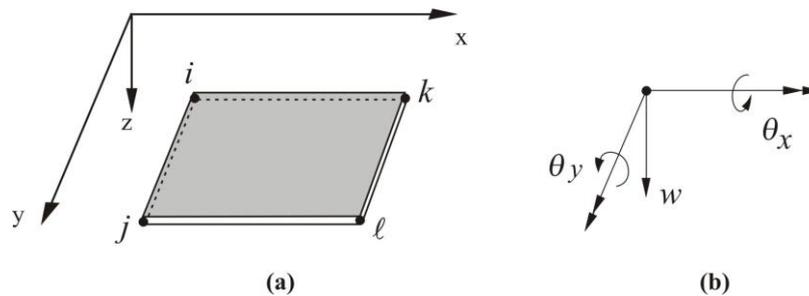


Figura 10 - (a) Elemento de placa fina; (b) Graus de liberdade de um ponto nodal

## 5 VALIDAÇÃO DO EXPERIMENTO

A "Tabela 4" mostra os erros percentuais das cinco primeiras frequências naturais encontradas pelo procedimento experimental e pelo Método dos Elementos Finitos com relação aos resultados obtidos pela solução analítica (LEISSA, 1969).

Tabela 4 - Comparação dos resultados

Frequências Naturais em Hz						
$f_i$	Solução Analítica	Experimental com <i>Shaker</i>	Experimental com Acelerômetro	Solução com MEF	Erro entre <i>shaker</i> e solução analítica (%)	Erro entre MEF e solução analítica (%)
1	8,658	9,000	8,000	8,868	3,95	2,43
2	18,093	18,500	17,800	18,471	2,25	2,09
3	46,017	46,000	46,000	47,165	-0,04	2,49
4	55,250	56,000	53,000	56,703	1,36	2,63
5	69,685	70,000	72,000	71,137	0,45	2,08

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificar e analisar o comportamento dinâmico de estruturas é fator significativo para o projeto nas diversas aplicações da engenharia. O Método dos Elementos Finitos mostrou ser uma ferramenta bastante poderosa, pois mesmo usando poucos elementos bons resultados foram obtidos. O processo de refinamento, versão-*h*, implementado no MEF com o elemento de placa fina, utilizado no exemplo numérico deste trabalho, prova ser realmente uma técnica bastante eficiente no cálculo de frequências naturais. A eficiência desta técnica pode ser observada através dos baixos valores dos desvios percentuais mostrados na "Tabela 4".

A escolha de sensores adequados para a análise, bem como o tipo de ponteira para o martelo, a habilidade em operar os equipamentos conectados ao programa de medição, a preocupação em manter o mesmo padrão utilizado no impacto na placa, citando também a obtenção da massa específica real da placa devido a falta de equipamento de precisão para tal medição, podem ser citados como fatores desafiadores no desenvolvimento do trabalho. O envolvimento com a problemática proporcionou reflexão, interesse, abertura para as interações, amadurecimento e significação do tema abordado. O objetivo do trabalho foi alcançado.

Trabalhos desta natureza reverenciam a memória do fundador da Instituição, fazendo com que a prática tenha seu papel fundamental no processo de ensino aprendizagem. O aluno de "receptor de informações" passou a atuar como "agente de seu próprio conhecimento". O entusiasmo, o interesse, o envolvimento, somando ao "querer aprender" foi fator diferencial para o aprendizado do aluno. Neste processo único o professor atua como elemento facilitador e estimulador na construção compartilhada do conhecimento despertando a curiosidade e criando as condições necessárias para o sucesso da educação formal e permanente do aluno.

### ***Agradecimentos***

Os autores agradecem ao funcionário do laboratório de mecatrônica, Ângelo de Souza, pela dedicação e presteza no acompanhamento do experimento.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BOCK, Ana M. Bahia (org). Psicologias: uma introdução ao estudo de Psicologia. 13ª ed. São Paulo: Saraiva, 1999.

DELORS, Jacques (Coord). Learning: The treasure within. UNESCO - Report of the International Commission on Education for the Twenty-first Century, 1996.

LEISSA, Arthur W. Vibration of Plates. National Aeronautics and Space Administration, Washington, 1969.

PIMENTA, S. G. O Estágio na Forma de Professora. Unidade Teoria e Prática? São Paulo: Cortez, 1995.

REGO, T. C. Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

UGURAL, A. C. Stress in Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, 1981.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C. ; MORGAN, K. Finite Elements and Approximations, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1993.

### **COMPARATIVE STUDIES OF NATURAL FREQUENCIES OF THIN PLATES**

***Abstract:*** The objective of this paper is to present a comparative study of the first five natural frequencies of a thin rectangular plate structure clamped in one of its sides. The values of frequencies were obtained using three procedures: experimental, analytical and Finite Element Method (FEM). In the experimental procedure, the structure was excited by an instrument of impact. The signal acquisition system, by capturing a transducer response

*(accelerometer), provided the signs of the natural frequencies of the structure. To validate the experiment, the results were compared with those obtained by the analytical method as well as with those found by MEF. The proposed paper enabled the identification and analysis of the vibrational behavior of plate showing the importance of practice in the student's motivational factor. This interaction "laboratory learning environment" provided growth, maturation and discoveries related matters such as use of analytical solutions and numerical methods, in this case, the FEM. In this context, an undergraduate in mechanical engineering, was able to experience the pillars proposed by Delors (1966) experiencing with great interest and motivation of the subjects in the correlations presented.*

**Keywords:** *Thin Plates, Vibrations, Learning.*