

METODOLOGIAS PARA O ESTUDO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS: DE HOLZER AOS ELEMENTOS FINITOS

Fábio Raia – raia@mackenzie.com.br
Universidade Presbiteriana Mackenzie
Rua da Consolação 930, prédio 6 – Consolação
01302-907 – São Paulo – São Paulo
Hélio Pekelman – hel1217@ig.com.br
Alfonso Pappalardo Júnior – alfonso@mackenzie.br

Resumo: *As vibrações mecânicas surgem na presença de forças dinâmicas, que variam ao longo do tempo e atuam sobre elementos dos sistemas mecânicos ou partes da estrutura. A resposta à vibração, de um dado sistema, depende da intensidade dessas forças, do tipo de excitação e das características de inércia, rigidez e amortecimento. Por outro lado, a isolação das vibrações pode ser realizada considerando-se medidas de prevenção na fase de projeto e de controle na fase de execução. Com relação às forças de excitação provocadas pelo ambiente, tais como; abalos sísmicos, carregamentos ocasionados pelo vento, ondas, ação de pessoas ou veículos sobre pontes viadutos, passarelas, estruturas de prospecção ou ainda propulsores e equipamentos auxiliares podem ser calculadas assim que sejam escolhidos os vários componentes destes sistemas. A resposta dinâmica dependerá dos parâmetros vibracionais do sistema mecânico sobre o qual se realiza a análise. As frequências naturais de tais estruturas podem ser calculadas com precisão por meio de programas de computador, desenvolvidos para se obter respostas às deformações aos carregamentos e tensões associadas. Dentre eles, mais conhecido é o método dos elementos finitos (MEF). No entanto, boas aproximações podem ser obtidas com razoável exatidão por meio de programas de computador generalistas, Excel, por exemplo, capazes de modelar um determinado sistema contínuo através de métodos discretos aproximados. O objetivo do presente trabalho é descrever metodologias passíveis de serem abordados em sala de aula para o estudo de frequências naturais em sistemas discretos pelo método de Holzer.*

Palavras-chave: *Método de Holzer, Método numérico, Vibrações torcionais*

1 INTRODUÇÃO

H. Holzer em seu trabalho “Die berechnung der drehschwingungen” de 1921 (o cálculo das vibrações de torção) descreve um método tabular utilizado para a determinação da frequência natural para vibrações livres ou forçadas, com ou sem amortecimento. Ele é baseado em estimativas sucessivas da frequência natural, na busca de um momento residual, no estado permanente, igual ou próximo de zero. (SPAETTGENS, 1951), expõe o método para calcular as características vibracionais forçadas amortecidas para um eixo de um motor marítimo de dez cilindros e ainda fornece um exemplo numérico para ilustrar o processo. É certo que o amortecimento acrescenta um grau de dificuldade no modelamento de um sistema. (HARTOG, 1956) vislumbra a aplicação do método para a determinação das frequências naturais de um eixo de um motor de combustão interna, enquanto que, ressalva a complexidade do modelo e impõe simplificações, deixando claro que a partir de então trata-se

de uma boa aproximação. Ayre (1958) descreve um sistema mecânico complexo com ramificações e impõe simplificações por um modelo equivalente para torná-lo realizável. Uma simplificação do modelo também pode ser encontrada em (FONSECA, 1963) que sinaliza o amortecimento moderado como pouco influente nos valores das frequências naturais. Isso é interessante, pois torna o processo de cálculo mais amigável e menos trabalhoso devido à simplificação do modelo. Church (1963), menciona que, devido ao formato tabular, a técnica poderia ser implementada por meio de procedimentos computacionais. A incipiência da informática durante esse período certamente foi um entrave para a disseminação automática do método. Por outro lado, cabe lembrar que o método batizado por (CLOUGH, 1960), conhecido hoje como MEF, que é a base da tecnologia CAE, também contribuiu para que os métodos algébricos caíssem no esquecimento nas aplicações práticas. No âmbito acadêmico livros continuaram a ser impressos e o método passou a servir como um preparatório para análises de múltiplos graus de liberdade. Seto (1971) ainda apresenta o método como sendo particularmente útil para cálculo de vibrações em eixos e apresenta vários exemplos de aplicação não só torcionais como também translacionais. Dimarogonas (1996) apresenta o método como sendo passivo de uma formulação computacional e o trata como uma extensão do método de matrizes de transferência. Rao (2008) descreve o método como sendo particularmente útil para a determinação das frequências naturais em sistemas torcionais, com vários graus de liberdade, por meio da aplicação dos recursos computacionais disponíveis atualmente. Isso fica evidente, pois o autor não parte de simplificações iniciais, comum em outros livros e artigos, deixando a busca de raízes (frequências naturais) por conta do algoritmo computacional. A menção do termo, modos de vibração, bem como a obtenção numérica desses valores e a possível confecção gráfica do comportamento torcional é também deixada para que o algoritmo exiba os resultados.

1.1 Descrição do método

O método de Holzer modelamento se aplica a sistemas que executam uma rotação ou translação, a “Figura 1” simboliza o modelamento de um sistema mecânico torcional composto por três inércias ligadas por rigidezes. Os extremos são livres e não são consideradas as influências dos mancais. A não ser pelo amortecimento que eles impõem. No entanto, a localização destes é importante pois o comprimento do eixo influencia no valor da frequência. A metodologia se aplica a sistemas ramificados e com extremos fixos. Toma-se inicialmente uma frequência, partindo-se de uma das extremidades do eixo, buscando-se um balanceamento de torques e deslocamentos. O torque externo para realizar o balanço é chamado de torque ou momento residual. Se o torque é nulo, a frequência escolhida é uma das frequências naturais.

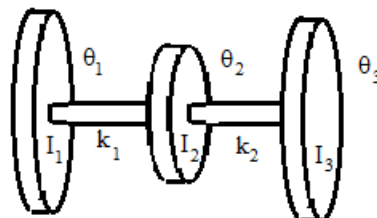


Figura 1- Modelo com três massas simbolizando um sistema mecânico.

O padrão de formulação geral para um sistema de três massas, duas molas com uma vibração em estado permanente e uma função senoidal pode ser escrito como:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -k_1 \theta_1 + k_1 \theta_2 \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = k_1 \theta_1 + k_2 \theta_3 - k_1 \theta_2 - k_2 \theta_2 \quad (2)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 = k_2 \theta_2 - k_2 \theta_3 + \tau \quad (3)$$

Somando as três expressões membro a membro, verifica-se que o resultado é nulo indicando que o momento residual é iguala a zero. Considerando $\tau=0$, se obtém:

$$\sum_{i=1}^n I_i \ddot{\theta}_i = 0 \quad (4)$$

Para a solução geral, com uma excitação harmônica do tipo $\theta_n = \phi_n \text{sen} \omega t$, derivando, voltando às expressões anteriores e generalizando chega-se na equação (5), que pode ser tabulado conforme a tabela 1:

$$\phi_n = \phi_{n-1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \omega^2 I_i \phi_i \quad (5)$$

Tabela 1 - Disposição das parcelas para a tabulação dos dados

item	I	$I\omega^2$	ϕ	$I\omega^2 \phi$	$\sum \omega^2 I_i \phi_i$	k	$\sum \omega^2 I_i \phi_i / k$
------	---	-------------	--------	------------------	----------------------------	---	--------------------------------

Na segunda coluna são colocadas as massas na sequência em que aparecem no modelamento, na terceira coluna é realizada a multiplicação da massa pela frequência inicial (atribuída), na quarta coluna, primeiro cálculo, é atribuído o valor 1, na quinta coluna é realizada a multiplicação da terceira pela quarta coluna. Como a equação (9) descreve uma somatória, a primeira soma tem como valor anterior zero. Então, na sexta coluna, primeira interação, repete-se o valor da quinta coluna. Na sétima coluna, são colocados os valores das rigidezes, para na oitava coluna ser realizada a divisão do valor da sexta coluna pela sétima coluna. Como se trata de uma equação de regressão realiza-se a diferença do valor da quarta coluna pelo valor da oitava coluna e deposita-se em baixo do valor da quarta coluna, repetindo-se o procedimento até extinguir todos os itens (primeira coluna). Feito isso, analisa-se o valor final da sexta coluna, se ele for pequeno, próximo de zero, a frequência atribuída é uma das frequências e os valores da quarta coluna representam os modos de vibrar para essa frequência.

1.2 Procedimentos para otimização do método

A equação característica gerada pela análise do sistema mecânico por meio das equações diferenciais apresenta duas incógnitas, a frequência natural e o modo de vibrar. Com a finalidade de diminuir o número de tentativas, reduz-se o sistema a um com dois graus de

liberdade. Isso é possível acumulando-se as massas sobre a menor rigidez, onde se supõem ocorrerá a frequência mais baixa. Tomando-se como exemplo o desenho 1, a redução teria o aspecto da “Figura 2”.

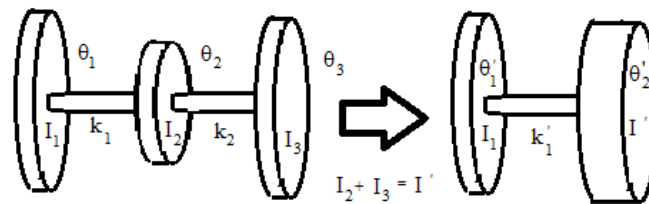


Figura 2 - Redução de um sistema de três graus de liberdade para um sistema com dois graus de liberdade

A frequência para essa situação é dada pela equação 6.

$$\omega = \sqrt{k'_1 \left(\frac{I_1 + I'}{I_1 \cdot I'} \right)} \quad (6)$$

O valor obtido da equação 6 é primeira aproximação para dar a partida no processo de regressão que tem como auxílio a tabela (1). É certo que outros valores terão que ser experimentados antes que se alcance um momento residual nulo da coluna 6, tabela (1). A escolha de um valor ou outro depende do conhecimento prévio do comportamento do momento em um sistema sob torção. Para um sistema com três massas distintas e extremos livres, o momento se apresenta como a “Figura 3”. Realizando o processo de forma manual, com uma calculadora científica simples, levando em consideração um conjunto formado por três massas e duas rigidezes, cujos parâmetros físicos, respectivamente foram, $k_1=k_2=10^7$ Nm/rad, $I_1= 10,0$ kgm², $I_2= 5,0$ kgm² e $I_3=15,0$ kgm². Completando a Tabela 1 para todas com os valores e realizando as interações, os resultados para todas as tentativas, após um tempo total aproximado de 20 min exibiu os seguintes resultados: $\omega_1=0,0$ rad/s modos de vibrar 0,0 ; 0,0 ; 0,0, $\omega_2=142,4$ Hz modos de vibrar 1,0 ; 0,2 ; -0,68 e $\omega_3= 348,9$ Hz modos de vibrar 1,0;-3,8;0,5.

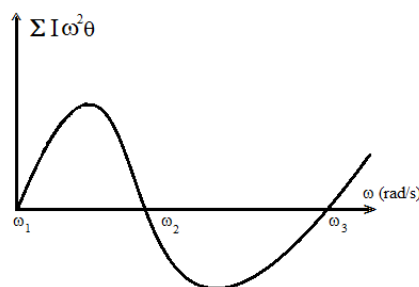


Figura 3 - Aspecto geral do comportamento dinâmico do momento residual em um sistema mecânico discretizado com três graus de liberdade.

2 IMPLEMENTAÇÃO COM O SOFTWARE GENÉRICO EXCEL®

Como o método se apresenta adequado para a tabular, utilizou-se recursos computacionais com o software Excel®, sobre o qual foi feito uma “macro” para a resolução do sistema. Com os mesmos parâmetros a macro conseguiu uma rápida convergência para a raiz (frequência natural) com ótima exatidão. O tempo total, desde a construção da macro até o cálculo final estimou-se um tempo de 30 min. As outras raízes apareceram pelo mesmo processo que podem ser vistos na tabela 2, onde na quarta coluna se mostram os modos de vibrar.

Tabela 2 - Tabulação dos dados do modelo citado, realizado com uma macro do software Excel®

item	I	$I\omega^2$	θ	$I\omega^2\theta$	$\Sigma I\omega^2\theta$	k	$\Sigma I\omega^2\theta/k$
1	10	$8,264.10^6$	1,000	$8,264.10^6$	$8,264.10^6$		$8,264.10^{-1}$
2	5	$4,132.10^6$	$1,736.10^{-1}$	$7,173.10^6$	$8,981.10^6$		$8,981.10^{-1}$
3	15	$1,240.10^7$	$-7,245.10^{-1}$	$-8,981.10^6$	$-4,843.10^{-8}$		

n	I	$I\omega^2$	θ	$I\omega^2\theta$	$\Sigma I\omega^2\theta$	$\Sigma I\omega^2\theta/k$
1	10	$4,840.10^7$	1,000	$4,840.10^7$	$4,840.10^7$	4,840
2	5	$2,420.10^7$	-3,840	$-9,294.10^7$	$-4,454E.10^7$	-4,454
3	15	$7,260.10^7$	$6,134.10^{-1}$	$4,454.10^7$	$8,196.10^{-8}$	

3 IMPLEMENTAÇÃO COM A CALCULADORA HP50G

Outra alternativa para a resolução do sistema foi a elaboração de um algoritmo implantado no ambiente da calculadora científica Hewlett Packard modelo Hp 50g. O problema de vibração é o mesmo tratado no item anterior, três graus de liberdade com inércias e rigidezes conhecidas. A partir dos dados de entrada, realizou-se uma busca unidimensional reversa no sentido de interceptar uma frequência natural utilizando-se o método de Holzer para o cálculo do momento residual. Privilegiando-se do teorema de Bolzano, observa-se que quando ocorrer a troca de sinal do momento residual, necessariamente, uma raiz foi encontrada. A partir desta situação, o programa utilizou o método da bisseção para encontrar a raiz mais próxima à exatidão. Foi utilizado o incremento da frequência angular ao quadrado de $100000,0 \text{ (rad/s)}^2$ para a busca da raiz e a precisão de 0,01 para o critério de convergência do método da bisseção. O valor arbitrado para o incremento foi utilizado com base no bom desempenho frente à velocidade de convergência para a solução do problema. O tempo de construção do algoritmo com os dados disponíveis foi fixado em duas oportunidades em três horas. As “Figuras 4a e 4b” e “Figura 5b e 5b” mostram os visores da calculadora com a entrada de dados e as respectivas frequências naturais e os modos de vibração.

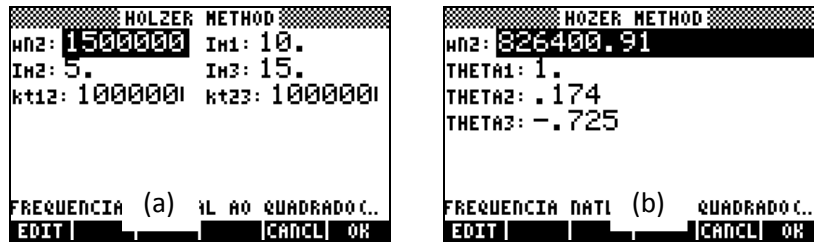


Figura 4 - Interface para entrada de dados e resultados convergidos para o valor inicial $\omega_N^2=1,5 \cdot 10^6$ (rad/s)²

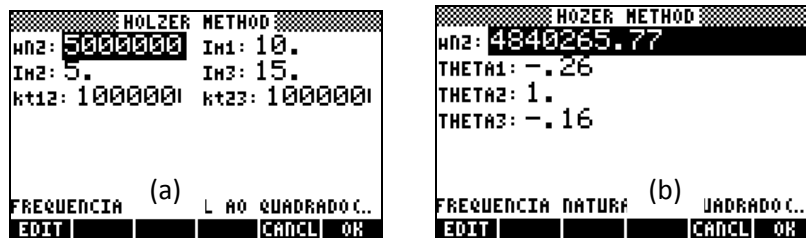


Figura 5 - Interface para entrada de dados e resultados convergidos para o valor inicial $\omega_N^2=5,0 \cdot 10^6$ (rad/s)²

4 MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS

A verificação do processo iterativo de Holzer foi testada via elementos finitos e o objetivo desta seção é apresentar a resolução do problema de vibração torcional livre e não-amortecida, produzida por um sistema com três graus de liberdade. Para tanto, foram desenvolvidos três modelos distintos, modelo unifilar com massa discreta, modelo sólido (3D) com massa distribuída parcialmente e modelo sólido (3D) com massa distribuída total, descritos a seguir.

4.1 Modelo unifilar com massa discreta

Este modelo é composto por dois tipos de elementos finitos: VIGA-3D e MASSA-3D. A rigidez à torção do eixo de transmissão será considerada pelo elemento unidimensional VIGA-3D. Não será considerada a massa do eixo de transmissão, por meio da simples inclusão da matriz de massa associada a esta formulação. A massa dos componentes será introduzida pelo elemento sem dimensão de massa concentrada MASSA 3D, onde será fornecido a momento de inércia de massa em relação ao eixo X (global), conforme mostrado na “Figura 6”. A matriz de rigidez restrita do elemento VIGA-3D, apenas para os graus de liberdade de rotação em torno do eixo, e a matriz de massa restrita do elemento MASSA-3D, anteriormente descritos, são dadas por:

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{ij} & -k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{ij} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{i}_i = [I_i] \quad (7)$$

sendo: $k_{ij} = GJ/L_{ij}$ a rigidez à torção do eixo de transmissão, onde G (kN/m²) é o módulo de elasticidade transversal do material do eixo, J (m⁴) é o momento de inércia à torção, L_{ij} (m) é o comprimento do eixo e I_i (kg·m²) é o momento de inércia rotacional em relação ao eixo. A

“Figura 6 ” mostra o aspecto de um modelo idealizado para um sistema com três graus de liberdade. Neste modelo idealizado, considera-se apenas rotação axial, tal modelo é uma aproximação de um problema real, onde as distribuições das massas, as condições de contorno e os detalhes geométricos são tratados de forma simplificada. Considerando que o eixo seja produzido em aço estrutural, podem-se assumir os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade transversal $G = 80,0$ GPa, diâmetro do eixo $d = 0,248$ m e comprimento $L = 3,00$ m, que resulta na rigidez torcional $k = 10^7$ N·m/rad.

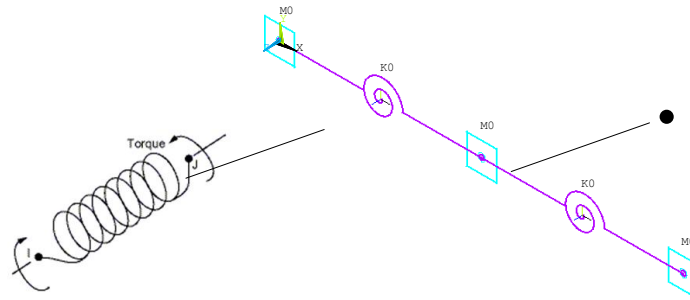


Figura 6 - Modelo de elementos finitos 1D e 0D

A partir da equação governante de um sistema discreto de vibrações livres e não amortecidas dada por:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Pode-se escrever particularmente para o sistema analisado, a seguinte equação matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 \cdot 10^7 & -1 \cdot 10^7 & 0 \\ -1 \cdot 10^7 & 2 \cdot 10^7 & -1 \cdot 10^7 \\ 0 & -1 \cdot 10^7 & 1 \cdot 10^7 \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{ccc} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{array} \right] \cdot \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

Cuja solução leva aos seguintes autovalores, ou frequências naturais:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0 \\ \omega_2^2 = 826400,964 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \\ \omega_3^2 = 4840265,76 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 144,68 \text{ Hz} \\ f_3 = 350,15 \text{ Hz} \end{cases}$$

e os modos das frequências naturais normalizados, apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Frequências naturais e modos de vibração

MODO	1	2	3
FREQUÊNCIA NATURAL (Hz)	0	144,68	350,15
MODO DE VIBRAÇÃO	0,0,0	1,0;0,174;0,750	0,26;1,0;0,160

A análise modal foi realizada utilizando-se o programa ANSYS® e a sua linguagem paramétrica nativa *Ansys parametric language* (APDL). Desenvolveu-se uma rotina para análise paramétrica automática deste problema. Os dados de entrada são introduzidos por meio de caixas de diálogo, executadas em APDL, apresentadas na “Figura 8”. A tabela 4 mostra a saída dos dados.

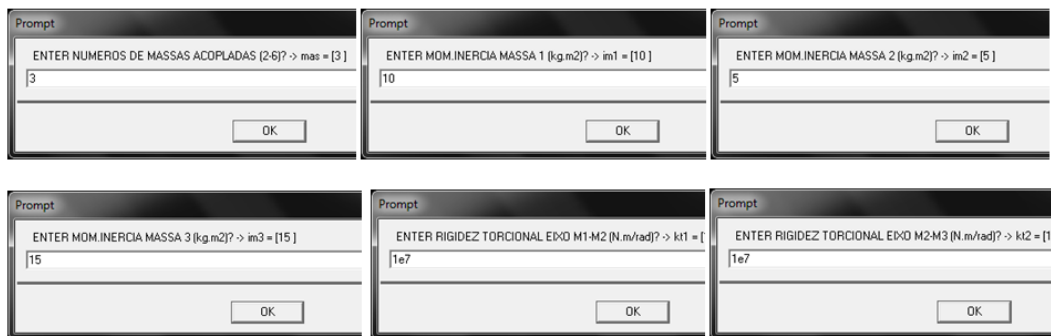


Figura 8 - Apresentação da entrada dos parâmetros do sistema mecânico.

Tabela 4 - Dados de saída da rotina ANSYS® (modificado).

SET	1	2	3
TIME/FREQ	0	144,68	350,15

4.2 Modelo Sólido (3D) com Massa Distribuída Parcialmente

Este modelo é composto por um elemento finito sólido: hexaédrico de oito nós, esquematizado na “Figura 9”, para a representação espacial dos eixos de transmissão, do gerador, da turbina e dos acoplamentos.

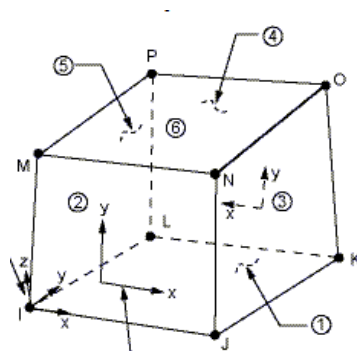


Figura 9 - Elemento finito hexaédrico de oito nós.

O modelo tridimensional permite uma representação geométrica mais rigorosa. Pode-se levar em conta a massa distribuída para a captura de outros modos, além dos torcionais, o tipo de ligação entre componentes e condições de contorno e de amortecimento muito mais realistas do modelo anterior, além da distribuição espacial da massa do sistema. A adoção

deste modelo leva a um projeto mais confiável no ponto de vista de segurança estrutural, sem a necessidade da idealização do modelo, que em alguns casos esta abstração pode tornar-se complexa. O problema na adoção deste modelo incide no aumento considerável dos custos de aquisição do programa, operacional e computacional que exige um pessoal bem treinado com máquinas de alto desempenho. A “Figura 10” apresenta o modelo geométrico adotado para representar o problema analisado. Considerando-se a massa distribuída uniformemente para os componentes, foram definidos três discos de aço fictícios de 0,10 m de espessura com os diâmetros de 0,300 m, 0,252 m e 0,332, respectivamente, de modo a produzir, por equivalência, os momentos de inércia de massa em torno do eixo axial de $10,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $5,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e $15,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Considerou-se a densidade do aço estrutural igual a $\rho = 7850,0 \text{ kg}/\text{m}^3$.

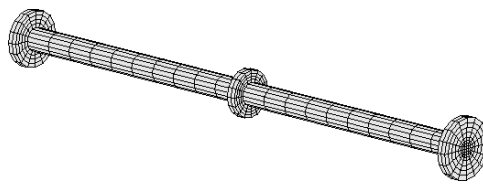


Figura 10 - Modelo de elementos finitos sólidos hexaédrico (8 nós).

Novamente, a partir da equação governante de um sistema discreto de vibrações livres e não-amortecidas dada por:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Resultando, após a montagem das matrizes de rigidez e de massa globais, o problema de autovalores que leva aos resultados apresentados na “Tabela 5” e “Figuras 11 e 12”. Na equação matricial, dada anteriormente, n representa o número de graus de liberdade translacionais nas três direções ortogonais do modelo de elementos finitos.

Tabela 5 - Autovalores do modelo sólido com massa distribuída dos componentes

SET	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TIME/FREQ	0	138,4	342,26	2799,6	2799,6	3478,1	3558,5	3558,5	3578,1	3578,1

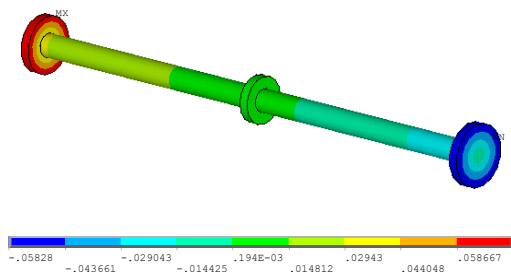


Figura 11 - Primeiro modo de vibração para a frequência natural de 138,40 Hz

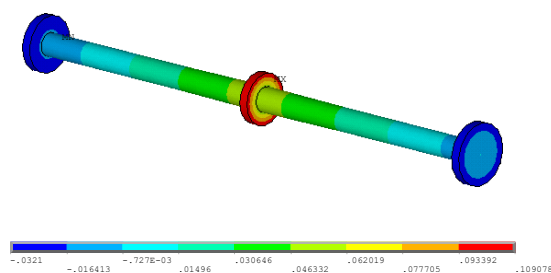


Figura 12 - Primeiro modo de vibração para a frequência natural de 342,26 Hz

4.3 Modelo sólido (3D) com massa distribuída total

Este modelo é idêntico ao anterior, com a diferença que a massa do eixo também será incluída. Neste caso, o modelo leva aos autovalores e autovetores apresentados na “Tabela 6” e “Figuras 13 e 14”.

Tabela 6 - Autovalores do modelo sólido com massa distribuída total

SET_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TIME/FREQ	0	122,52	256,85	549,43	661,19	1061,4	1138,5	1609	1666,1	2197,4

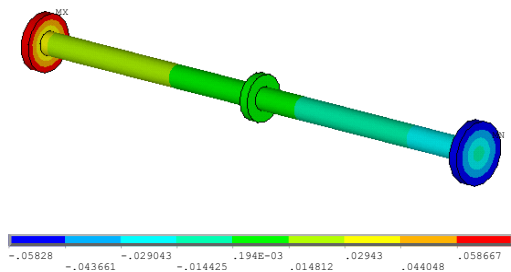


Figura 13 - Primeiro modo de vibração para a frequência natural de 256,85 Hz

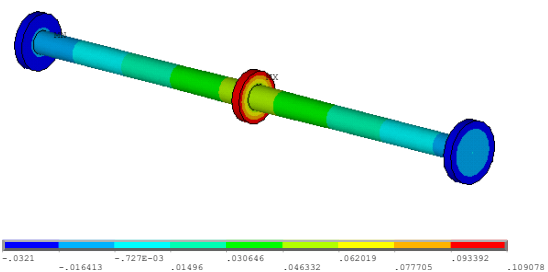


Figura 14 - Primeiro modo de vibração para a frequência natural de 122,52 Hz

Observa-se que a primeira frequência natural cai de 138,4 Hz (Figura 11) para 122,52 Hz (Tabela 6), enquanto que a segunda, decresce de 342,26 Hz para 256,85 Hz. As frequências obtidas no modelo atual são mais realistas, sendo menores devido à incorporação da massa do eixo de transmissão. É importante observar o surgimento novas frequências, acima de 500,0 Hz, que não foram observadas no modelo exposto na seção 4.2, por conta da incorporação da massa do eixo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos fenômenos vibratórios nos cursos de graduação e pós-graduação nas áreas da Mecânica e Civil é fundamental para a formação do futuro engenheiro. O presente estudo abordou metodologias para a análise das vibrações mecânicas em sistemas com dois ou mais graus de liberdade, especificamente as torcionais. O método base foi aquele desenvolvido por Holzer e apresentado por processos diferentes que mostraram que os resultados originais são válidos e têm consistência, significando que apesar de antigo apresenta resultados adequados perante os processos computacionais atuais. Na primeira situação foi considerado o cálculo tabular manual realizado com uma calculadora simples, posteriormente os mesmos cálculos foram efetuados por um macro desenvolvida no software Excel® e por um programa numérico desenvolvido na calculadora HP 50g. Finalmente, os mesmos parâmetros foram utilizados, em três situações diferentes, como entrada para análise em elementos finitos pelo software ANSYS®. A tabela 7 resume as análises e mostra a variação dos dados.

Tabela 7 - Valores obtidos pelos processos analisados

MÉTODO	1ª FREQUÊNCIA	2ª FREQUÊNCIA
Tabular simples	142,2 Hz	345,2 Hz
Excel	144,7 Hz	350,2 Hz
HP50g	195,0 Hz	356,1 Hz
ANSYS unifilar com massa discreta	144,7 Hz	350,2 Hz
ANSYS Sólido (3D) com Massa Distribuída Parcialmente	138,4 Hz	342,3 Hz
ANSYS Modelo sólido (3D) com massa distribuída total	122,5 Hz	256,8 Hz

Os procedimentos se mostram adequados e validam o uso tabular para extração de frequências e modos de vibrar em sistemas torcionais ou translacionais. É claro que a metodologia pelo MEF vai além das frequências discretas e determinam outras mais altas. No caso do método utilizado pela HP50g, entende-se que o método para a busca das raízes não tenha sido adequado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHURCH, Austin, H. Mechanical Vibrations, John Wiley and Sons, 1963.

DIMAROGONAS, Andrew, Vibration for Engineers 2ªed, Prentice Hall, 1996.

FONSECA, Adhemar, Vibrações, Ao livro Técnico, 1964

HARTOG, Jacob Pieter Den. Mechanical Vibrations. McGraw-Hill Book Company, 1934.

JACOBSEN, S, Lydik; AYRE, S, Robert. Engineering vibrations with applications to structures and machinery, McGraw-Hill Book Company, 1958

RAO, Singiresu, Vibrações mecânicas, Pearson Education, 2008.

SETO. Willian, W. Vibrações Mecânicas, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

SPAETGENS, W, T; VANCOUVER, B, C. Holzer method for forced-damped torsional vibrations, **Journal of Applied Mechanics**, New York, n.49, p. 59-63, 1950.

METHODOLOGIES FOR THE STUDY OF MECHANICAL VIBRATIONS: FROM HOLZER TO THE FINITE ELEMENTS

Abstract: Mechanical vibrations arise in the presence of dynamic forces that vary over time and act on elements of mechanical systems or parts of the structure. The response to vibration of a given system, depends on the intensity of these forces, the kind of excitement and the characteristics of inertia, stiffness and damping. On the other hand, the isolation of vibration can be performed considering preventive measures in the project phase and control during implementation stage. With respect to the forces of excitement caused by the environment, such as: earthquakes, loads caused by wind, waves, the action of people or vehicles on overpasses bridges, walkways, structures prospecting or thrusters and auxiliary equipment may be calculated so be chosen the various components of these systems. The dynamic

response will depend on the vibrational parameters of the mechanical system on which the analysis takes place. The natural frequencies of such structures can be calculated accurately by means of computer programs developed to obtain answers to strains with the shipments and tensions associated. Among them, the best known is the finite element method (FEM). However, good approximations can be obtained with reasonable accuracy by means of general computer programs, Excel, for example, capable of modeling a continuous system given by discrete approximate methods. The objective of this study is to describe methods that can be addressed in the classroom for the study of natural frequencies in discrete systems having as support the method of Holzer.

Keywords: Holzer method, numerical method, torsional vibrations