

## SOLUÇÕES LIMITE NO ENSINO DE ENGENHARIA

**Jackson R. Eleoterio** – jreleote@furb.br

Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Regional de Blumenau, FURB,  
Rua São Paulo, 3250  
89030-000 – Blumenau - SC

**José Alexandre Borges Valle** – alex@furb.br

Departamento de Engenharia Química, Universidade Regional de Blumenau, FURB,  
Rua São Paulo, 3250  
89030-000 – Blumenau - SC

**Sávio Leandro Bertoli** – savio@furb.br

Departamento de Engenharia Química, Universidade Regional de Blumenau, FURB,  
Rua São Paulo, 3250  
89030-000 – Blumenau - SC

**Simone Leal Schwertl** – sileal@furb.br

Departamento de Matemática, Universidade Regional de Blumenau, FURB,  
Rua Antônio da Veiga, 140  
89010971 – Blumenau – SC

**Juliano de Almeida** – juliano@eqx.com.br – Acadêmico de Engenharia Química  
Universidade Regional de Blumenau, FURB;

**Resumo:** *Nos cursos de Engenharia as soluções limite e operações limite em geral, são apresentadas sucintamente, deste modo, não enfatiza-se o quão relevante o conceito de limite e o domínio de suas propriedades mostram-se adequadas para solucionar problemas de diversas áreas da engenharia. Desta forma, este trabalho tem por intenção difundir o uso de soluções limite e operações limite em aplicações de problemas em Engenharia. Demonstra-se neste artigo, a extensão da aplicabilidade do método, utilizando-se como exemplo problemas de transferência de massa (secagem). Sob esta perspectiva, diversas soluções analíticas encontradas na literatura são obtidas, utilizando-se exclusivamente de operações limite.*

**Palavras-chave:** *Soluções limite, Operações limite, Soluções analíticas, Secagem, Aplicações em engenharia;*

### 1 INTRODUÇÃO

As soluções e operações limite, embora sejam apresentadas em cursos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral em Engenharia, acabam sendo utilizadas de maneira escassa e com poucas aplicações, geralmente na definição de derivadas e integrais. O presente trabalho visa explorar o conceito de operação limite na obtenção de soluções particulares partindo-se de uma solução geral. Através de técnicas analíticas que serão detalhadas na sequência, é possível determinar as soluções limites sem a necessidade de resolver em cada caso um novo conjunto de equações. O estabelecimento dos valores limite dos parâmetros permite uma

compreensão física mais ampla da forma pela qual as soluções particulares são obtidas e possibilita manter uma interrelação entre a solução geral e as soluções limite.

Neste contexto, pretende-se que as técnicas apresentadas neste trabalho possibilitem incrementar o uso das operações limite e a determinação de soluções limite nos cursos de Engenharia.

Para explorar estes aspectos, o artigo está organizado na seguinte forma:

Na seção 2 apresentam-se as ocorrências usuais de indeterminações que surgem na aplicação de operações limite em modelos da Física Matemática; em seguida, métodos de remoção destas indeterminações são propostos. Na seção 3 os modelos matemáticos do estudo de caso de difusão de umidade através de uma placa plana. Na seção 4, aplica-se o método proposto na seção 2 para o caso em estudo (secagem). Finalmente, na seção 5 relatam-se as conclusões obtidas.

## **2 MÉTODO PARA OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES LIMITE**

O método proposto e os procedimentos para a obtenção de soluções limite são apresentados na sequência. O método consiste basicamente em um procedimento de identificar e levantar as indeterminações. Em geral, estas indeterminações surgem devido à:

- (a) Funções presentes nos termos da solução e/ou na equação de raízes;
- (b) Termos da solução correspondentes à raiz nula;
- (c) Termos da solução correspondentes à raízes não nulas;
- (d) Termos da equação de raízes;
- (e) Uma combinação dos itens anteriores;

Alguns dos procedimentos (ex: regra de L'Hospital) para levantar estas indeterminações são conhecidos nos cursos de Cálculo e outros são propostos no presente trabalho. As técnicas utilizadas são respectivamente:

- (a) Regra de L'Hospital e/ ou escrever as funções em representações equivalentes na forma de séries e/ ou, uma mudança de variáveis;
- (b) Utilizar as condições iniciais do problema removendo-se valores sem significado físico;
- (c) Reconstrução algébrica dos termos em representação equivalente com remoção de indeterminações e/ ou uso da equação de raízes;
- (d) Rearranjo dos parâmetros na equação de raízes visando eliminar as indeterminações e/ ou reescrever a equação de raízes em forma equivalente.
- (e) Uma combinação dos itens anteriores.

## **3 ESTUDO DE CASO – DIFUSÃO DE UMIDADE EM UMA PLACA PLANA**

Para ilustrar o uso das técnicas anteriores analisam-se os casos limite que podem ser obtidos a partir das soluções de dois modelos de difusão de umidade em placa plana (ilustrada na “Figura 1”) com condições de contorno de primeiro e terceiro tipos. As hipóteses e as equações governantes são descritas a seguir:

- (1) As amostras são representadas por placas retangulares infinitas;
- (2) O conteúdo inicial de umidade é uniformemente distribuído nas amostras;
- (3) Os efeitos de encolhimento não são considerados;
- (4) A secagem ocorre pelas duas faces.

A equação governante é conhecida como a segunda lei de Fick (Equação 1). A obtenção de soluções para esta equação significa obter funções que relacionem o teor de umidade em função da distância e do tempo para uma dada temperatura. Estas soluções são alcançadas a partir do estabelecimento das condições de contorno e do conhecimento do significado físico das condições de contorno impostas (PADILHA, 1997).

Convém salientar que as equações (1)-(4) descrevem o modelo I, enquanto que o modelo II é composto pelas equações (1),(2),(5) e (6).

Equação Governante:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (1)$$

Onde:

$M$  é o teor de umidade ( $kg$  de líquido/ $kg$  de sólido seco);

$D$  é o coeficiente de difusão do líquido aplicado ao movimento através do sólido ( $m^2/s$ );

$t$  é o tempo ( $s$ );

$x$  é a posição a partir do centro da placa ( $m$ );

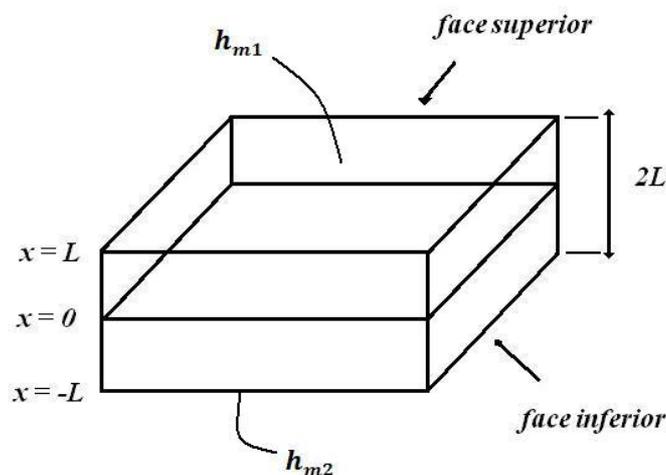


Figura 1 –Placa plana.

Condição Inicial:

$$M = M_0; -L \leq x \leq L; t = 0 \quad (2)$$

Condições de Contorno:

$$M = M_e; x = -L; t > 0 \quad (3)$$

$$M = M_e; x = L; t > 0 \quad (4)$$

$M_e$  é o teor de umidade no equilíbrio (*kg de líquido/kg de sólido seco*);

$M_0$  é o teor de umidade inicial (período no qual a secagem é controlada por difusão) (*kg de líquido/kg de sólido seco*);

$2L$  representa a espessura total da placa (*m*);

O modelo II difere do modelo I por considerar efeitos convectivos na superfície da placa, neste caso, as “Condições de contorno (3) e (4)” são substituídas por:

$$-D \frac{\partial M}{\partial x} + h_{1m}(M - M_e) = 0; x = -L; t > 0 \quad (5)$$

$$D \frac{\partial M}{\partial x} + h_{2m}(M - M_e) = 0; x = L; t > 0 \quad (6)$$

Onde  $h_m$  é o coeficiente convectivo de transferência de massa (*m/s*);

Definindo-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$x^* \equiv \frac{x}{2L} \quad (7)$$

$$t^* \equiv \frac{tD}{4L^2} \quad (8)$$

$$M^* = \frac{M(x, t) - M_e}{M_0 - M_e} \quad (9)$$

as “Equações (1)-(4)” são reescritas na forma:

$$\frac{\partial M^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 M^*}{\partial x^{*2}} \quad (10)$$

$$M^* = 1; -1 \leq x^* \leq 1; t^* = 0 \quad (11)$$

$$M^* = 0; x^* = -1; t^* > 0 \quad (12)$$

$$M^* = 0; x^* = 1; t^* > 0 \quad (13)$$

e as “Equações (5) e (6)” para o modelo II assumem a seguinte forma:

$$-\frac{\partial M^*}{\partial x^*} + Bi_m M^* = 0; x^* = -1; t^* > 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial x^*} + Bi_m M^* = 0; x^* = 1; t^* > 0 \quad (15)$$

Onde  $Bi_m$  é o “Número de Biot mássico”, definido por:

$$Bi_m = \frac{h_m L}{D} \quad (16)$$

Este número representa a relação entre a resistência interna à difusão de um determinado soluto no meio em que se intenta estudar o fenômeno de transferência de massa e a resistência à convecção mássica associada ao meio externo que envolve o primeiro. O número de Biot mássico definido pela “Equação (16)” é válido na situação em que o soluto se encontra diluído no meio externo; no caso de ele estar concentrado, a relação de equilíbrio é considerada em separado (CREMASCO, 2002)

Assume-se também que:

$$h_m = h_{1m} = h_{2m} \quad (17)$$

A solução do modelo I é encontrada, por exemplo, em Crank (1975):

$$M^*(x^*, t^*) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 t^*\} \cos\left[\frac{(2n+1)}{2} \pi x^*\right] \quad (18)$$

Para o modelo II, a solução também pode ser encontrada em Crank (1975):

$$M^*(x^*, t^*) = 2Bi_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x^*) \exp(-4\beta_n^2 t^*)}{(\beta_n^2 + Bi_m^2 + Bi_m) \cos \beta_n} \quad (19)$$

Onde “ $\beta_n$ ” são as raízes positivas de

$$\beta \tan \beta = Bi_m \quad (20)$$

## 4 DETERMINAÇÃO DAS SOLUÇÕES LIMITE

Nesta seção, aplicando o método proposto na seção 2, demonstra-se como algumas soluções limite dos modelos da seção 3 são obtidos.

### 4.1 Solução para o modelo II quando $Bi_m \rightarrow \infty$

Neste caso, a “Equação de raízes (20)”, assume a forma:

$$\tan \beta = \infty \Rightarrow \beta_n = \frac{\pi}{2} (2n+1) ; n = 0, 1, 2 \dots \quad (21)$$

Nota-se que ao aplicar  $\lim_{Bi_m \rightarrow \infty} M^*(x^*, t^*)$  na “Equação (19)”, surgem indeterminações da forma  $(\infty/\infty)$  correspondente a indeterminação do item (c) da seção 2 e o procedimento (de acordo com a seção 2) para levantar essa indeterminação consiste na reconstrução algébrica e o uso das equações de raízes.

Iniciando-se pela reconstrução algébrica da “Equação (19)”, tem-se:

$$M^*(x^*, t^*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x^*) \exp(-4\beta_n^2 t^*)}{\left(\frac{\beta_n^2}{Bi_m} + Bi_m + 1\right) \cos \beta_n} \quad (22)$$

Observa-se que mesmo após a reconstrução algébrica, a forma dada pela “Equação(22)” ainda mantém uma indeterminação da forma  $(\infty \times 0)$  no denominador de cada termo da série. Para levantar esta indeterminação, utiliza-se a “Equação de raízes(20)” na “Equação anterior”, obtendo-se:

$$M^*(x^*, t^*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x^*) \exp(-4\beta_n^2 t^*)}{\left(\frac{\beta_n^2}{Bi_m^2} + 1 + \frac{1}{Bi_m}\right) \beta_n \operatorname{sen} \beta_n} \quad (23)$$

Aplicando-se agora a operação  $\lim_{Bi_m \rightarrow \infty} M^*(x^*, t^*)$  obtém-se com o uso da “Equação (21)”:

$$\lim_{Bi_m \rightarrow \infty} M^*(x^*, t^*) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 t^*\} \cos \left[ \frac{(2n+1)}{2} \pi x^* \right] \quad (24)$$

Observa-se que a solução limite dada pela “Equação (24)” corresponde exatamente a solução do modelo I expressa pela “Equação (18)”. Este é um resultado fisicamente esperado uma vez que  $Bi_m \rightarrow \infty$  significa que a transferência por convecção na superfície da partícula é muito maior do que a difusão de umidade no seu interior, o que faz com que as superfícies mantenham-se na umidade de equilíbrio, isto é, exatamente nas condições de contorno descritas do modelo I.

## 4.2 Solução para o modelo II quando $Bi_m \rightarrow 0$

Nesse caso a equação de raízes assume a seguinte forma.

$$\lim_{Bi_m \rightarrow 0} \beta \tan \beta = 0 \Rightarrow \beta_n = n\pi ; j = 0,1,2, \dots \quad (25)$$

Ao aplicar-se  $Bi_m \rightarrow 0$  na “Equação (19)” todos os termos do somatório são nulos, exceto o primeiro termo que é indeterminado para “ $\beta = 0$ ”, portanto,

$$\lim_{Bi_m \rightarrow 0} M^*(x^*, t^*) = \lim_{(\beta_0, Bi_m) \rightarrow 0} \frac{Bi_m}{\beta_0^2} \quad (26)$$

trata-se então do caso (b) da seção 2. O procedimento correspondente para remoção dessa indeterminação (conforme a seção 2) é o uso da condição inicial “Equação (11)”:

$$\lim_{Bi_m \rightarrow 0} M^*(x^*, 0) = M_0 = \lim_{(\beta_0, Bi_m) \rightarrow 0} \frac{Bi_m}{\beta_0^2} \quad (27)$$

Assim,

$$\lim_{Bi_m \rightarrow 0} (M^*) = 1 = \frac{M - M_e}{M_0 - M_e} \quad (28)$$

Ou

$$M = M_0 \quad (29)$$

Como era de se esperar, pois fazendo-se  $Bi_m \rightarrow 0$  nas “Equações(14) e (15)”, a derivada assume valor nulo, conseqüentemente, implica em superfícies impermeáveis, retendo a placa o seu conteúdo inicial de umidade.

### 4.3 Solução Limite para o modelo II quando $D \rightarrow \infty$

Neste caso reecre-se a solução em termos de variáveis dimensionais,

$$\frac{M(x, t) - M_e}{M_0 - M_e} = 2 \frac{h_m L}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\beta_n \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\beta_n^2 \frac{tD}{L^2}\right)}{\left(\beta_n^2 + \left(\frac{h_m L}{D}\right)^2 + \frac{h_m L}{D}\right) \cos \beta_n} \quad (30)$$

Onde “ $\beta_n$ s” são as raízes positivas de:

$$\beta \tan \beta = \frac{h_m L}{D} \quad (31)$$

Quando  $\lim_{D \rightarrow \infty}$  é aplicado nas “Equações (30) e (31)” surge uma indeterminação da forma (0/0), correspondente ao item (a) da seção 2. Seguindo o método proposto (seção 2), para levantar esta indeterminação inicialmente realiza-se a seguinte mudança de variável:

$$\alpha \equiv \beta \sqrt{D} \quad (32)$$

Substituindo-se a “Equação (32)” nas “Equações (30) e (31)”, tem-se respectivamente:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{D}} \tan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{D}}\right) = \frac{h_m L}{D} \quad (33)$$

$$\frac{M(x, t) - M_e}{M_0 - M_e} = 2h_m L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\alpha_n x}{\sqrt{D}}\right) \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{L^2}\right)}{\left(\alpha_n^2 + \frac{(h_m L)^2}{D} + h_m L\right) \cos\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{D}}\right)} \quad (34)$$

Onde “ $\alpha_n$ s” são as raízes positivas da “Equação (33)”.

Isolando-se “ $\alpha$ ” na “Equação (33)” e aplicando-se  $\lim_{D \rightarrow \infty}$ , obtém-se:

$$\alpha = (h_m L) \lim_{D \rightarrow \infty} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{D}}\right) \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{\text{sen}\left(\alpha/\sqrt{D}\right)} \right] = h_m L \times 1 \times \frac{0}{0} \quad (35)$$

Levantando-se esta última indeterminação por L'Hospital, resulta:

$$\alpha = (h_m L) \lim_{D \rightarrow \infty} \left[ \frac{-(1/2)D^{-\frac{3}{2}}}{-(1/2)\alpha D^{-\frac{3}{2}} \cos(\alpha/\sqrt{D})} \right] = \frac{h_m L}{\alpha} \quad (36)$$

Isto é,

$$\alpha^2 = h_m L \quad (37)$$

Tem-se, portanto, uma única raiz, que substituída na “Equação (34)” resulta:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{M(x, t) - M_e}{M_0 - M_e} = 2(h_m L) \lim_{D \rightarrow \infty} \left[ \frac{\cos\left(\frac{h_m}{\sqrt{D}}x\right) \exp\left(-h_m \frac{t}{L}\right)}{\left(h_m L + \frac{(h_m L)^2}{D} + h_m L\right) \cos\left(\frac{\sqrt{h_m L}}{\sqrt{D}}\right)} \right] \quad (38)$$

Ou:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{M(x, t) - M_e}{M_0 - M_e} = e^{-h_m \frac{t}{L}} = \frac{M(t) - M_e}{M_0 - M_e} \quad (39)$$

A “Equação (39)” corresponde exatamente a solução de um modelo a parâmetros concentrados para a secagem de uma placa plana de espessura “2L”. É interessante observar que matematicamente este resultado é obtido das equações do modelo II para  $D \rightarrow \infty$  na seção 4.3 e não  $Bi_m \rightarrow 0$  conforme a seção 4.2.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método utilizado mostrou-se bastante apropriado na obtenção de soluções de problemas da Física Matemática (CRANK, 1975), (CARSLAW & JAEGER, 1986); (ARPACI, 1991). As técnicas utilizadas no levantamento das indeterminações também foram estabelecidas, as quais são o ponto crucial para a obtenção das soluções limite.

A disciplina de cálculo diferencial e integral é uma disciplina da área básica e, portanto compõe a grade curricular das primeiras fases dos cursos de engenharia. Desta forma por conta das deficiências de formação do ensino médio, muitas vezes os professores não conseguem abordar todos os conceitos com a profundidade necessária.

A experiência lecionando a mais de dez anos em cursos de engenharia permite-nos colocar que este é o caso do conceito de limite. O estudo de caso apresentado, explorando problemas a partir da solução limite, aponta para mais uma oportunidade, ao longo do curso de engenharia, para o amadurecimento deste conceito, além de enfatizar a sua relevância.

Uma característica interessante na obtenção das soluções limite é que as indeterminações podem ser vistas como “bloqueios matemáticos”; sua correta identificação e remoção é a “trajetória” a ser percorrida para a obtenção da solução. Uma vez estabelecidos os valores limites dos parâmetros esta “trajetória” surge naturalmente.

Por fim, propõe-se que as técnicas de operações limite utilizadas neste artigo, possam sob uma ótica geral, disseminar na resolução de outros problemas no ensino de Engenharia, pois de fato, na há uma restrição específica referente à aplicação do método em outros campos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARPACI, Vedat S.; Conduction Heat Transfer, Pearson Custom Pub, New York, 1991.

CARSLAW, Horatio Scott; JAEGER, Julia.; Conduction of Heat in Solids, Oxford Science Publications, EUA, 1986.

CRANK, John. The Mathematics of Diffusion, Oxford Science Publications, EUA, 1975.

CREMASCO, Marco Aurélio. Fundamentos de Transferência de Massa, Editora da Unicamp, São Paulo, 2002.

PADILHA, Angelo Fernando; Materiais de Engenharia, Hemus, 1997.

## LIMIT SOLUTIONS IN ENGINEERING TEACHING

**Abstract:** *In engineering courses, limit solutions and limit operations are briefly displayed in general, however, they do not emphasize how relevant the concept of limit and the domain of its properties are adequate to solve problems in various areas of engineering. Thus, this article has the intention to spread the usage of limit solutions and limit operations in applications of engineering problems. It is demonstrated in this article, the extension of applicability of the method, using as example problems of mass transfer (drying). From this perspective, several analytical solutions found in literature are obtained, using only limit operations.*

**Key-words:** Solutions limit, limit operations, analytical solutions, drying, applications in engineering;