ATIVIDADE INVESTIGATIVA PARA ENSINO DA REGRA DE CADEIA NOS CURSOS DE CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL REAL PARA ENGENHARIA

Nair Cristina Margarido Brondino – brondino@fc.unesp.br
UNESP – Faculdade de Ciências – Departamento de Matemática
Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01
CEP 17033-360 – Bauru - SP
Odney Carlos Brondino – ocbrondino@ig.com.br
UNESP – Faculdade de Engenharia
UNIP – Universidade Paulista
Rodovia Marechal Rondon, km 335
CEP 17048-290 – Bauru - SP

Resumo: *Este trabalho apresenta os resultados de uma atividade investigativa, dividida em dois exercícios, a qual foi aplicada a uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de engenharia. Tal atividade foi aplicada a 25 duplas de alunos e teve como objetivo introduzir o conceito da Regra da Cadeia. Por contemplar o uso de calculadora e a noção intuitiva de limite, a atividade se torna mais atraente, inclusive para o aluno que ainda não está familiarizado com métodos para calcular limites algebricamente. Todas as duplas participantes resolveram o primeiro exercício na íntegra, respondendo convenientemente as questões apresentadas. As três duplas que finalizaram o segundo exercício conseguiram enunciar a regra da cadeia corretamente. Desta forma, os resultados observados indicam que a tentativa é válida, mas as atividades devem sofrer algumas alterações como, por exemplo, o aumento do tempo para execução.*

Palavras-chave: *Experimentos de Ensino, Cálculo Diferencial e Integral, Função composta, Regra da Cadeia.*

1 INTRODUÇÃO

A idéia do tema abordado neste trabalho originou-se da preocupação em ensinar aos alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) do curso de engenharia, a utilização da Regra da Cadeia. Tal regra consiste em um método para derivar funções compostas de uma variável real. Se a compreensão de função composta pelo aluno ingressante já é um tópico delicado do ensino de cálculo, a aplicação de tal regra para derivação torna-se um tema ainda mais complexo. Na prática, observa-se que a própria compreensão do que vem a ser uma função não é um tema acessível a muitos alunos. Em geral, o aluno relaciona a função à sua expressão algébrica (equação) e ignora elementos importantes como o tipo de relação e até mesmo o domínio.

No tocante às funções compostas, de maneira geral, o que se observa na prática é uma dificuldade do aluno em reconhecer se dada função é uma função composta e, em um segundo momento, identificar todas as funções envolvidas na composição. Este reconhecimento é um passo indispensável não só para lidar com funções deste tipo, como também para posteriormente derivar corretamente tais funções. Entretanto, em se tratando da derivada, reconhecer que uma função é uma composta e quais são as funções envolvidas nessa composição, ainda não é suficiente, uma vez que o aluno também deve compreender o que ocorre com as funções envolvidas quando a variável independente varia.

Segundo BARBOSA (2009), "*A regra da cadeia é um tema em que os estudantes apresentam grande dificuldade no contexto da disciplina CDI I tratando-a, não raro, como apenas uma manipulação de símbolos*". Ainda, segundo a mesma autora, "*Alguns autores (CABRAL, 1992; COTTRILL, 1999; CURY, 2003, 2004; REZENDE, 2003) argumentam que os erros cometidos pelos estudantes no aprendizado da regra da cadeia parecem estar associados com a composição de funções que, na maioria das vezes, representa apenas uma operação que o estudante memoriza*" (p.12).

Em geral, antes de enunciar a Regra da Cadeia, alguns autores de livros de Cálculo (STEWART, 2010; LEITHOLD, 1994; SWOKOWSKI, 1994) introduzem o tema regra da cadeia, através da argumentação de que as regras de derivação como as da soma, produto e quociente, por exemplo, aplicam-se a um número limitado de funções, uma vez que não são suficientes para obter derivadas de funções compostas. Outros autores (FLEMMING & GONÇALVES, 2007; LARSON, 2011; ANTON, 2000), a partir de uma breve discussão sobre funções compostas e suas derivadas, enunciam diretamente tal regra e apresentam exemplos de aplicação. Os livros de Stewart (2010), Flemming & Gonçalves (2007), Thomas (2008) e Swokowski (1994) apresentam uma prova parcial da regra após seu enunciado, sendo que no primeiro uma prova formal é apresentada no Apêndice. Todos os livros mencionados anteriormente tratam o assunto de um ponto de vista algébrico. O livro de Guidorizzi (2001) também trata o assunto de forma algébrica, mas também considera uma interpretação geométrica na prova do teorema.

Ao contrário dos demais, o livro de Thomas (2008) introduz o assunto com um exemplo onde a função $y = \frac{3}{2}x$ é interpretada como a composta das funções $y = \frac{1}{2}u$ e $u = 3x$. No exemplo, são calculadas as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ e atenção é chamada para o fato de que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, que é a Regra da Cadeia para funções de duas variáveis na notação de Leibniz. Antes do enunciado da regra, Thomas (2008) ainda propõe um segundo exemplo no qual a função $y = (3x^2 + 1)^2$ é interpretada como a composta das funções polinomiais $y = u^2$ e $u = 3x^2 + 1$. O produto $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ é então calculado. Na sequência, o binômio $(3x^2 + 1)^2$ é expandido, obtendo-se a função polinomial $y = 9x^4 + 6x^2 + 1$, a qual também é derivada. O exemplo finaliza com a observação de que, mais uma vez, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Pode-se citar, ainda, a tese de Barbosa (2009), que traz uma atividade onde o tema é abordado com a utilização de software gráfico. No trabalho em questão, o aluno é instigado a refletir sobre a regra, a partir dos resultados observados nos gráficos de algumas funções e de suas derivadas.

Observa-se que nenhum dos trabalhos citados anteriormente contempla uma abordagem numérica para introduzir o tema. Neste contexto, este artigo apresenta e traz os resultados da aplicação de uma atividade investigativa realizada com o uso de calculadora e cuja proposta tem como base uma parte da demonstração do teorema sobre a Regra da Cadeia. Além de motivar o entendimento da Regra da Cadeia, o objetivo secundário e não menos importante, é reforçar o entendimento de funções compostas. A atividade em questão é apresentada na seção 2, juntamente com os resultados de sua aplicação aos alunos de um curso de engenharia. Na sequência, a seção 3 apresenta as considerações finais.

2 METODOLOGIA E RESULTADOS OBSERVADOS

Ao final da abordagem do conteúdo sobre limites, definiu-se taxa média de variação e taxa instantânea de variação. Desta forma, o conceito de derivada foi introduzido a partir de sua interpretação como uma taxa instantânea de variação, ao contrário do que era feito anteriormente, quando este conceito era introduzido a partir de sua noção geométrica. A inversão, que é contemplada em livros de CDI I, como STEWART (2010) e THOMAS (2008), foi feita de maneira proposital para, posteriormente, utilizar o conceito nas atividades que viriam a ser propostas.

Após a apresentação inicial, onde se introduziu o conceito de derivada enquanto uma taxa instantânea de variação seguiu-se a discussão sobre sua interpretação geométrica. Na sequência, as derivadas de algumas funções (constante, linear, seno, cosseno, logarítmica e exponencial) foram determinadas a partir da definição. Ainda utilizando a definição, foram tratadas algumas regras operatórias.

Antes de qualquer discussão acerca da Regra da Cadeia, que se constitui no próximo tópico a ser abordado, foi proposta uma atividade investigativa. Para a realização da atividade em questão, que compreendeu a execução de dois exercícios, foi solicitado aos alunos que trouxessem calculadoras. O primeiro exercício tratava a composição de apenas duas funções e deveria ser realizado em seis etapas. Escolheu-se a função $f(x) = ln(3x^2)$ para este exercício. A função f pode ser escrita como $f(x) = h(u(x))$, onde $h(u) = ln(u)$ e $u(x) = 3x^2$. Tal escolha é justificada pelo fato de que derivada da função h já havia sido determinada, assim como as derivadas de funções polinomiais, como a função u. Deve-se observar também que as funções escolhidas são ambas deriváveis.

Como a função f dada anteriormente é uma composta, pela Regra da Cadeia, sua derivada, na notação de Newton, é dada por:

$$f'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{1}{3x^2} \cdot 6x = \frac{2}{x} \tag{1}$$

A atividade foi aplicada a 25 duplas de um curso de Engenharia e é apresentada na sequência. Cada item do exercício é enunciado, seguindo-se uma breve apresentação dos resultados esperados e dos observados em cada etapa.

ATIVIDADE INVESTIGATIVA – REGRA DA CADEIA

EXERCÍCIO 1: *Considere a função* $f(x) = ln(3x^2)$.

a) Na sua opinião, qual é a derivada de f(x)? Calcule o valor de $f'(2)$ *neste caso.*

Neste item, espera-se que o aluno use apenas o seu conhecimento prévio para inferir sobre a derivada no ponto $x_1 = 2$.

Ao corrigir este item, observou-se que:

- 6 duplas responderam que $f'(x) = \frac{1}{3x^2}$, ou seja, assumiram que $f'(x) = \frac{1}{u(x)}$, o que leva a acreditar que tais duplas não perceberam que *f* é uma função composta.

- 12 duplas responderam que $f'(x)=\dfrac{1}{6x}$, ou seja, assumiram que $f'(x)=\dfrac{1}{u'(x)}$. Tais duplas perceberam que *f* é uma função composta e consideraram a derivada da função *u* na sua avaliação.

- 1 dupla determinou *f´(x)* usando a definição de derivada e chegou ao resultado correto.

- 1 dupla aplicou a Regra da Cadeia, apesar de o conteúdo ainda não ter sido apresentado, também chegando ao resultado correto.

- 2 duplas aplicaram propriedades do logaritmo e chegaram à derivada da soma de duas funções conhecidas, respondendo corretamente.

- 3 duplas deram outras respostas.

b) Vamos analisar o comportamento de f(x) na vizinhança de $x_1 = 2$. Para isso, calcule a taxa média de variação de y = f(x), denotada por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para x nos seguintes intervalos:

b1) [1,9; 2,0] $(\Delta x = 0{,}1)$
b2) [2,0; 2,1] $(\Delta x = 0{,}1)$
b3) [1,99;2,00] $(\Delta x = 0{,}01)$
b4) [2,00; 2,01] $(\Delta x = 0{,}01)$

Observe as alternativas b1) a b4) e responda: que valor você espera obter para $f'(2)$?

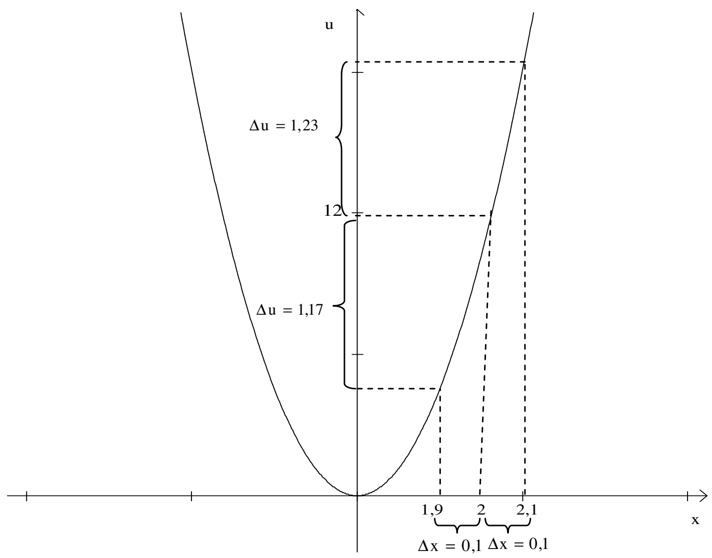
Neste item, como o conteúdo acerca da derivada como uma taxa instantânea de variação já foi tratado, espera-se que ele infira, através de seus cálculos e usando a noção intuitiva de limite, que o valor esperado para $f'(2)$ é igual a 1. Após os cálculos, 100% das duplas chegou à conclusão de que $f'(2)$ para este caso seria igual a 1.

c) O valor obtido em b) é condizente com o valor obtido em a)? Se não, qual entre os dois valores você acha que se aproxima mais de $f'(2)$ e a que você atribui esta diferença?

Se o aluno errou em seu palpite inicial, ao realizar este item, percebe que falta alguma informação, uma vez que ele espera que a derivada de *f* no ponto $x_1 = 2$ seja igual a 1, valor calculado no item b).

Neste item, das 21 duplas que erraram o palpite inicial para a derivada, 100% acreditaram que a resposta correta era a do item b), ou seja, que o valor para a derivada da função *f* no ponto $x_1 = 2$ deveria ser igual a 1. Destas, somente três duplas atribuíram a diferença à maneira incorreta de derivar a função.

d) Observe que f é uma função composta. Chame $u = u(x) = 3x^2$. Observe o gráfico de u e atente para o fato de que, quando x sofre uma variação Δx, u sofre uma variação Δu. Observe também que para $x_1 = 2$, $u(x_1) = u(2) = 12$.



Calcule Δu *e a taxa média de variação* $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ *para x na vizinhança de* $x_1 = 2$*, usando os seguintes intervalos:*

d1) [1,9; 2,0] $(\Delta x = 0{,}1)$
d2) [2,0; 2,1] $(\Delta x = 0{,}1)$
d3) [1,99;2,00] $(\Delta x = 0{,}01)$
d4) [2,00; 2,01] $(\Delta x = 0{,}01)$

Observe as alternativas d1) a d4) e responda:

- o que acontece com Δu *quando* Δx *tende a zero?*

- que valor você espera obter para $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ *quando* $x_1 = 2$*?*

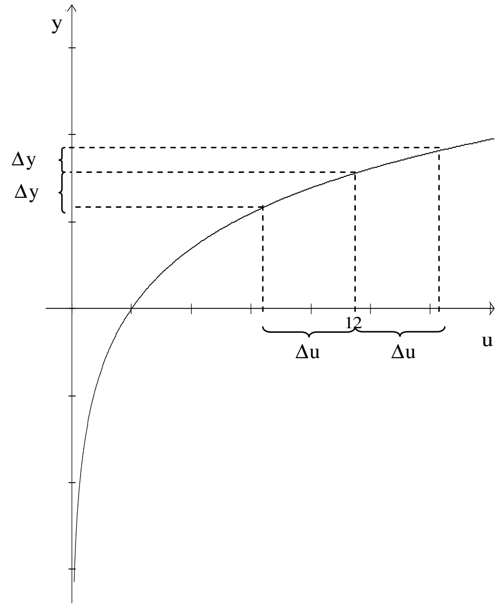
Ao realizar este item, espera-se que o aluno perceba que uma variação em x provoca uma variação em *u*. Atenção também é chamada para o fato de que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Ele também deve inferir, através da noção intuitiva de limite, que $u'(2) = 12$. Nesta etapa, todas as duplas concluíram que o valor esperado para $u'(2)$ era 12.

e) Substitua $u = u(x) = 3x^2$ *em* $y = h(u) = \ln(u)$*. Observe que, quando* $x_1 = 2$*,* $u_1 = 12$ *e que* $f(x) = h(u(x))$*. Vamos verificar agora o que acontece com* $h(u) = \ln(u)$ *na vizinhança de* $u_1 = 12$*, quando u sofre uma variação* Δu*. Observe o gráfico.*

Calcule a taxa média de variação $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ *para u na vizinhança de* $u_1 = u(2) = 12$*, usando os seguintes intervalos:*

e1) [11,9; 12,0] $(\Delta u = 0{,}1)$
e2) [12,0; 12,1] $(\Delta u = 0{,}1)$
e3) [11,99;12,00] $(\Delta u = 0{,}01)$
e4) [12,00; 12,01] $(\Delta u = 0{,}01)$

Que valor você espera obter para $h'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ *quando* $u_1 = 12$ $(x_1 = 2)$*?*



Neste item, pretende-se que o aluno infira, através da noção intuitiva de limite, que a derivada de $h = h(u)$ no ponto $u_1 = 12$ seja igual a 0,08333. Nesta etapa, 24 duplas chegaram ao resultado de que $h'(12) = 0{,}08333$. Uma dupla errou os cálculos e chegou a um resultado distinto, mas, mesmo assim, concluiu que a derivada de h no ponto $u_1 = 12$ é igual ao resultado obtido em suas contas.

f) Calcule o produto $h'(u).u'(x)$ para $x_1 = 2$ ($u_1 = 12$) usando os resultados obtidos nos itens d) e e). Compare este resultado com o valor obtido em b) para $f'(x)$ quando $x_1 = 2$. O que você observa?

Após a execução do item f), espera-se que o aluno perceba que $f'(2) = h'(12) \cdot u'(2)$, ou seja, que a derivada de f no ponto $x_1 = 2$ seja igual ao produto entre as derivadas de h no ponto $u_1 = 12$ e de u no ponto $x_1 = 2$.

Ao final do Exercício 1, observou-se que todas as duplas perceberam que $f'(2) = h'(12) \cdot u'(2)$.

EXERCÍCIO 2: *Reproduza o passo a passo anterior para o comportamento da função $f(x) = \sqrt{sen(x^3 + 1)}$ na vizinhança de $x_1 = 1$. Observe que agora a função f é uma composta três funções. É possível estabelecer uma regra para a derivada de funções compostas? Descreva com suas palavras a regra que acabou de descobrir.*

Com este exercício espera-se, em um primeiro momento, que o aluno reconheça quais são as funções envolvidas na composição. Em um segundo momento, após sua execução e confronto com os resultados observados no Exercício 1, espera-se que ele esteja apto a enunciar da Regra da Cadeia.

Somente três duplas conseguiram executar o exercício 2 até o final e todas as três enunciaram corretamente a derivada de uma função composta por 3 funções.

Os resultados apresentados anteriormente encorajam a aplicação futura da atividade para outras turmas. Entretanto, para trabalhos futuros, percebeu-se que seria interessante aumentar o tempo para execução da atividade, uma vez que a maioria das duplas não conseguiu terminá-la em sala. Também seria interessante mudar a função, uma vez que, ao aplicar as propriedades de logaritmos, algumas duplas chegaram à forma correta da derivada de f. Uma sugestão seria substituir a função f pela função $g(x) = ln(3 + x^2)$. Além disso, pode-se contemplar o uso de algum software gráfico (como o *Winplot* ou o *Geogebra*) e de planilhas eletrônicas (como o Excel), buscando tornar a atividade mais atrativa.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Formas de ensinar aos alunos a Regra da Cadeia é alvo de preocupação de muitos docentes de Cálculo Diferencial e Integral 1. A maioria dos livros utilizados na disciplina traz uma abordagem algébrica do tema, o que torna o entendimento deste conteúdo de difícil absorção para o aluno ingressante. Neste sentido, o presente trabalho apresentou uma atividade investigativa que envolve o uso de calculadora e cujo objetivo é motivar os alunos dos cursos de engenharia para lidar com tal regra, antes da apresentação do enunciado do teorema. Tal atividade foi dividida em dois exercícios, sendo o que o primeiro tratou da composição de duas funções e o segundo de uma função composta de três funções e baseou-se na demonstração parcial do teorema, que é apresentada por alguns autores de livros de cálculo. Vinte e cinco duplas realizaram a atividade e todas resolveram o primeiro exercício na íntegra, respondendo convenientemente às questões colocadas. As três duplas que finalizaram o segundo exercício conseguiram enunciar a regra da cadeia para funções compostas de três funções, de maneira correta. Estes resultados indicam que a tentativa é válida, mas as atividades devem sofrer algumas alterações como, por exemplo, o aumento do tempo para execução. Por contemplar o uso de calculadora e a noção intuitiva de limite, a atividade se torna mais atrativa, inclusive para o aluno que ainda não está familiarizado com métodos para calcular limites algebricamente. A utilização de softwares gráficos e de planilhas eletrônicas com vistas a tornar a atividade mais interessante também está sendo analisada.

Agradecimentos
Os autores agradecem à FUNDUNESP – FUNDAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNESP, pelo apoio financeiro concedido. Também agradecem ao Departamento de Matemática e à Faculdade de Engenharia da UNESP-Bauru e à UNIP – Campus Bauru.

REFERÊNCIAS BILBIOGRÁFICAS

ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte volume 1, 6ª Ed. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. Bookman, Porto Alegre, 2000.

BARBOSA. Sandra Malta. UNESP – UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia. 2009. 199p. Tese (Doutorado).

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. 6ª.ed. rev. e ampl., São Paulo, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.

LARSON, R. Cálculo Aplicado, 1. ed. Tradução All Tasks; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. Cengage Learnig, São Paulo, 2011.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3.ed. Tradução de C. C. Patarra. São Paulo: Harbra, 1994. v.1.

STEWART, J. Cálculo, volume 1, 6ª ed., Cengage Learning, São Paulo, 2010.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. 2.ed. Tradução de A. A. Faria. São Paulo: Makron, 1994. v.1.

THOMAS, G. B. Calculo, volume 1, 11ª ed.. Addison Wesley/Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2008.

A PROPOSAL OF AN ACTIVITY TO TEACH THE CHAIN RULE IN THE COURSES OF CALCULUS OF ONE REAL VARIABLE IN ENGINEERING

Abstract: *This work presents the results of an investigative activity which was divided in two exercises and was applied to a class of Differential and Integral Calculus of one real variable of an engineering course. The activity was applied to a 25 pairs of students with the objective of to familiarize them with the concept of the Chain Rule, before to teach this concept. The student must use a calculator and the intuitive notion of limits, which make the activity most attractive to the students. All of the 25 pairs of students resolved the first exercise and answered conveniently. The three pairs of students that finished the second exercise enunciated the Chain Rule correctly. By this way, the results indicated that the tentative is valid but the exercises proposed must have some alterations like a longer time of execution.*

Keywords: *Teaching Experiment, Differential and Integral Calculus, Composition of functions, Chain Rule.*