

A INTEGRAL DE DUHAMEL E SUA IMPORTÂNCIA NO ENSINO DE VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS

Diogo Folador Rossi – rossi.diogo@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Av. Fernando Ferrari, 514, Campus de Goiabeiras
CEP 29075-910 – Vitória - ES

Walnório Graça Ferreira – walnorio@pesquisador.cnpq.br

Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Av. Fernando Ferrari, 514, Campus de Goiabeiras
CEP 29075-910 – Vitória - ES

Rodrigo Silveira Camargo – rodrigo_camargo2000@yahoo.com

COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro – Centro de Tecnologia, Bloco B, sala 101
Cidade Universitária-RJ

Paulo Providência - provid@dec.uc.pt

Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil, INESC Coimbra
FCTUC – Pólo II, 3030 -788 Coimbra, Portugal

Igor Badke Ferreira– ibadke_hc@hotmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física
Av. Fernando Ferrari, 514, Campus de Goiabeiras
CEP 29075-910 – Vitória – ES

Resumo: *A resposta de um sistema massa-mola de um grau de liberdade submetido a cargas dinâmicas pode ser calculada basicamente de duas maneiras: resolvendo-se a equação de movimento no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Para um curso com intenções pedagógicas para estudantes de engenharia civil ou mecânica o procedimento no domínio da frequência não é o mais adequado, pois faz uso de números complexos, o que acarreta dificuldades de assimilação ou até mesmo rejeição da parte dos alunos. Em contrapartida, no domínio do tempo são usadas variáveis reais, de fácil aceitação pelos estudantes. Dentre os procedimentos no tempo, a técnica que usa a integral de Duhamel é a de mais fácil entendimento, facilitando o ensino de vibrações estruturais em um nível inicial. Para sistemas de múltiplos graus de liberdade com comportamento linear, as equações podem ser desacopladas e a técnica da integral de Duhamel, a mesma usada para sistemas com um grau de liberdade, se aplica nas equações em coordenadas modais. Isso fortalece a importância dessa técnica para facilitar o ensino de vibrações estruturais. No final, apresenta-se um exemplo numérico de um sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade.*

Palavras-chave: *Integral de Duhamel, Ensino na engenharia, Vibrações estruturais*

1 INTRODUÇÃO

Quando em um sistema massa-mola atuam forças periódicas de forma geral, estas podem ser representadas por uma superposição de termos harmônicos de várias frequências. A resposta da equação diferencial de movimento para os deslocamentos de sistemas lineares é encontrada pela superposição da resposta harmônica de cada componente harmônico da carga. Quando a carga aplicada ao sistema é não periódica, várias técnicas podem ser aplicadas para

se obter essa resposta, como o método da integral de Duhamel (solução no domínio do tempo), o método da transformada de Fourier (solução no domínio da frequência) ou usando-se um método passo-a-passo iterativo. Esse artigo apresenta o método da integral de Duhamel, que também pode ser chamado de método da integral de convolução. Nesse método a carga dinâmica é considerada como uma sucessão de impulsos de curta duração e a resposta de cada impulso, em vibração livre, torna-se uma contribuição separada para a resposta de deslocamentos total nos tempos subseqüentes.

2 SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Considerando o sistema massa-mola (Figura 1) com um grau de liberdade, sem amortecimento, submetido a um impulso de curta duração $p(t)$ atuando no intervalo de excitação t_d (muito menor que o período natural T_n , ou seja, $t_d \ll T_n$ - Figura 2) tem-se, para a equação diferencial de movimento do sistema:

$$m\ddot{v} + kv = \begin{cases} p(t), & 0 < t \leq t_d \\ 0, & t > t_d \end{cases} \quad (1)$$

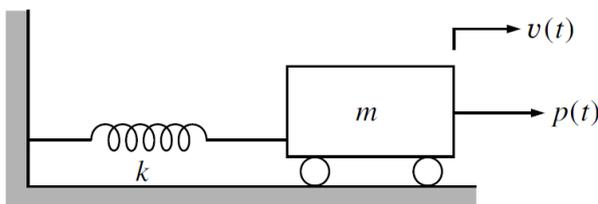


Figura 1 – Sistema massa-mola com 1 grau de liberdade submetido a um impulso

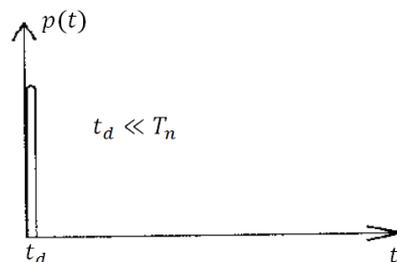


Figura 2 – Carregamento impulsivo

A equação para o caso de vibração livre, isto é, para $t > t_d$ (onde não há mais carga atuante), é uma equação diferencial homogênea linear de segunda ordem, a coeficientes constantes, onde a solução é dada por (CLOUGH e PENZIEN, 1995):

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right) \text{sen}(\omega t) \quad (2)$$

na qual $v_0 = v(0)$ e $\dot{v}_0 = \dot{v}(0)$ são as condições iniciais e ω é a frequência natural do sistema massa-mola, dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

A equação para o caso de vibração forçada, isto é, para $0 < t \leq t_d$ (onde a carga é igual a $p(t)$), pode ser integrada em relação ao tempo, em todo o intervalo $0 < t \leq t_d$, resultando na seguinte expressão, se as condições iniciais forem nulas:

$$m\dot{v}(t_d) + k \int_0^{t_d} v(t) dt = \int_0^{t_d} p(t) dt \quad (4)$$

Definindo o impulso I a que o sistema está submetido e o valor médio do deslocamento no tempo v_{avg} , respectivamente, como:

$$I = \int_0^{t_d} p(t)dt \quad \text{e} \quad v_{avg} = \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} v(t)dt \quad (5)$$

Então a equação (4) se torna:

$$m\dot{v}(t_d) + kt_d v_{avg} = I \quad (6)$$

Quando $t_d \rightarrow 0$ o segundo termo da equação (6) acima pode ser ignorado. Logo:

$$m\dot{v}(0^+) = I \quad (7)$$

Portanto, um impulso consistindo de uma força atuando em um curto espaço de tempo t_d , tem o efeito de dar à massa uma velocidade inicial dada por:

$$\dot{v}(0^+) = \frac{I}{m} \quad (8)$$

Ficando a massa com um deslocamento inicial dado por:

$$v(0^+) = 0 \quad (9)$$

As equações (8) e (9) podem ser usadas como condições iniciais para o caso de vibração livre no domínio $t > t_d$, cuja resposta é dada pela expressão (2). Usando esses valores na equação (2) a resposta ao impulso valerá:

$$v(t) = \left(\frac{I}{m\omega}\right) \text{sen}(\omega t) \quad (10)$$

Pode ser mostrado, também, que a resposta à carga impulsiva para o mesmo sistema de um grau de liberdade, porém com amortecimento viscoso $\xi < 1$, é dada por (CLOUGH e PENZIEN, 1995):

$$v(t) = \left(\frac{I}{m\omega_d}\right) e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega t) \quad (11)$$

Onde $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência amortecida do sistema.

2.1 Resposta para uma carga arbitrária

Ao se considerar o um sistema de 1 grau de liberdade sem amortecimento, iniciando do repouso e logo após submetido a uma força $p(t)$ qualquer, como mostrado na Figura 3, tem-se que a resposta do sistema causada pelo impulso infinitesimal $dI = p(\tau)d\tau$, obtida da equação (10) e denominada $dv(t)$ é dada por:

$$dv(t) = \left(\frac{dI}{m\omega}\right) \text{sen}(\omega(t - \tau)) \quad (12)$$

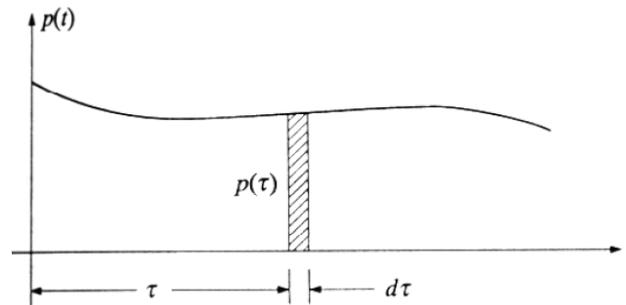


Figura 3 – Carga dinâmica arbitrária

A resposta total devida à excitação dinâmica é obtida somando as respostas de todos os impulsos infinitesimais $dI = p(\tau)d\tau$ desde $\tau = 0$ até $\tau = t$, isto é, integrando a equação (12):

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \text{sen}(\omega(t - \tau)) d\tau \quad (13)$$

E essa equação (13) é conhecida como *Integral de Duhamel*. Essa integral é usada para calcular a resposta de um sistema massa-mola submetido a uma carga arbitrária. Ela também pode ser expressa na forma de uma integral de convolução, entre as funções $p(t)$ e $h(t)$, da seguinte forma:

$$v(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (14)$$

Onde $h(t)$ é a função de resposta ao impulso unitário, dada por:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (15)$$

Para um sistema dotado de amortecimento viscoso, também com condições iniciais nulas, a integral de Duhamel assume a seguinte forma:

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}(\omega_d(t - \tau)) d\tau \quad (16)$$

3 SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A equação do movimento de sistemas estruturais com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento e em vibração livre é expressa como:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Onde \mathbf{m} e \mathbf{k} são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez do sistema. Assumindo um movimento harmônico, a solução da equação (17) será dada por:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}. \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (17), obtém-se:

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (19)$$

A equação (19) é conhecida como problema generalizado de autovalor e autovetor, onde as soluções ω^2 são os autovalores, e as soluções \mathbf{v} são os respectivos autovetores associados. Para que o sistema linear representado pela equação (19) tenha solução não nula para \mathbf{v} , é necessário que:

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0 \quad (20)$$

E a equação (20) fornece todos os n autovalores ω^2 do sistema. Estes autovalores fornecem as frequências naturais ω do sistema estrutural. Tradicionalmente elas são dispostas em ordem crescente na forma vetorial abaixo:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

Para sistemas estruturais estáveis para os quais as matrizes de massa e de rigidez são reais, simétricas e positivas definidas, os autovalores são positivos e reais. A mais baixa frequência, ω_1 , é chamada de *primeira frequência natural* ou *frequência fundamental*. Em geral, todas as frequências naturais ω_i são distintas, embora em alguns casos duas ou mais frequências possam ter o mesmo valor, casos esses que fogem do escopo deste trabalho.

3.1 Modos de vibração

Depois de resolver a equação (20), podem-se encontrar os n autovetores do sistema substituindo os valores de ω na equação (19) e resolvendo o sistema linear para cada ω_i encontrado. Como o sistema é homogêneo, o mesmo possuirá infinitas soluções, logo se percebe que existem infinitos autovetores associados a cada autovalor.

Os autovetores de referência podem ser tomados com relação a qualquer valor das variáveis livres do sistema linear, e qualquer múltiplo de um autovetor também será outro autovetor.

Uma forma conveniente de expressar os autovetores encontrados é normalizando-os com relação às massas generalizadas M_i correspondentes a cada um dos i -ésimos graus de liberdade do sistema, como será mostrado mais adiante. Os autovetores encontrados são comumente chamados de “modos de vibração livre do sistema” já que exibem as deformadas da estrutura quando em vibração livre.

3.2 Ortogonalidade dos modos de vibração

Pode-se demonstrar que, já que as matrizes de massa e rigidez do sistema são simétricas e reais, os autovetores encontrados no problema mencionado são ortogonais em relação a essas matrizes (BOLDRINI, COSTA, *et al.*, 1986), isto é, dados dois autovetores \mathbf{v}_s e \mathbf{v}_r distintos quaisquer, tem-se:

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{m} \mathbf{v}_r = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_s^T \mathbf{k} \mathbf{v}_r = 0 \quad (22)$$

Por outro lado, para um grau de liberdade i qualquer, define-se a massa generalizada e a rigidez generalizada correspondente ao modo de vibração i , respectivamente, como

$$M_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{m} \mathbf{v}_i \quad \text{e} \quad K_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{k} \mathbf{v}_i \quad (23)$$

Como dito, uma forma conveniente de tomar os autovetores do sistema estrutural é normalizando-os com relação à respectiva massa generalizada, isto é, dado um autovetor \mathbf{v}_i qualquer, toma-se um múltiplo do mesmo dividindo-o pela raiz quadrada de M_i , ou seja:

$$\Phi_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\sqrt{M_i}} \quad (24)$$

E para o autovetor Φ_i normalizado dessa forma, sua massa generalizada e sua rigidez generalizada valerão, respectivamente:

$$M_i = \Phi_i^T \mathbf{m} \Phi_i = 1 \quad \text{e} \quad K_i = \Phi_i^T \mathbf{k} \Phi_i = \omega_i^2 \quad (25)$$

Essa normalização é freqüentemente usada em computadores para a análise de vibração estrutural.

3.3 Método da superposição modal

Os n autovetores mutuamente ortogonais formam os modos de vibração obtidos de um sistema em vibração livre sem amortecimento. Pode-se mostrar que eles são linearmente independentes. Assim eles podem servir como coordenadas generalizadas para expressar qualquer conjunto de deslocamentos ou, em outras palavras, eles formam uma “base” de vetores do espaço vetorial de deslocamentos. Dessa forma, qualquer deslocamento pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores, o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$\mathbf{v} = \Phi_1 Y_1 + \Phi_2 Y_2 + \dots + \Phi_n Y_n = \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i \quad (26)$$

Ou, em notação matricial:

$$\mathbf{v} = \Phi \cdot \mathbf{Y} \quad (27)$$

Considerando a equação de movimento de sistemas estruturais de múltiplos graus de liberdade, sem amortecimento, submetido à carga dinâmica $\mathbf{p}(t)$, tem-se:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) na equação (28), obtém-se :

$$\mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{k}\Phi\mathbf{Y} = \mathbf{p}(t) \quad (29)$$

Pré-multiplicando a equação (29) por Φ_i^T encontra-se:

$$\Phi_i^T \mathbf{m} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \Phi_i^T \mathbf{k} \Phi \mathbf{Y} = \Phi_i^T \mathbf{p}(t) \quad (30)$$

E quando os termos $\Phi\ddot{\mathbf{Y}}$ e $\Phi\mathbf{Y}$ são expandidos obtém-se, devido à ortogonalidade:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_i \ddot{Y}_i + \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_i Y_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t) \quad (31)$$

E com o uso das relações na equação (25), obtém-se:

$$\ddot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = P_i(t) \quad (32)$$

Onde $P_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t)$ é a carga generalizada.

A equação (32) é a mesma equação obtida em sistemas de um grau de liberdade, portanto pode ser resolvida da mesma forma. Com sua solução se encontrarão n funções Y_i . Sendo assim, a solução final, em coordenadas nodais, será dada pela equação (26). Esse procedimento de resolver n equações diferenciais para cada modo de vibração e a posterior superposição das soluções é chamado de Método da Superposição Modal. Nesse método, ao se provocar o aparecimento de n equações diferenciais independentes, que podem ser resolvidas separadamente, é dito que o sistema inicial de equações $N \times N$ foi “desacoplado”.

3.4 Sistemas amortecidos

Considerem-se agora os sistemas estruturais com múltiplos graus de liberdade amortecidos, submetidos à carga dinâmica $\mathbf{p}(t)$. Neste caso a equação que representa seu equilíbrio dinâmico é:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (33)$$

Onde \mathbf{c} é a matriz de amortecimento do sistema. Em sistemas estruturais onde o mecanismo de perda de energia está uniformemente distribuído em toda a estrutura, pode-se adotar uma distribuição das forças de amortecimento similar àquela das forças elásticas e de inércia. A matriz de amortecimento desses sistemas pode ser definida como (FERREIRA, 2002)

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (34)$$

Onde as constantes de proporcionalidade a_0 e a_1 possuem respectivamente as unidades de s^{-1} e s . O amortecimento que é regido por uma matriz definida pela equação (34) é chamado de amortecimento de Rayleigh (CLOUGH e PENZIEN, 1995). A taxa de amortecimento ξ para cada modo de vibração é obtida como mostrado a seguir.

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação (34) por $\boldsymbol{\phi}_i^T$ e $\boldsymbol{\phi}_i$, respectivamente, obtém-se:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_i = a_0 \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_i + a_1 \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_i \quad (35)$$

Definindo o amortecimento generalizado para um modo i por:

$$C_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_i \quad (36)$$

E usando as relações da equação (25) na equação (35), chega-se a:

$$C_i = a_0 + a_1 \omega_i^2 \quad (37)$$

Fazendo a analogia com o coeficiente de amortecimento viscoso de sistemas de 1 grau de liberdade, tem-se, para a definição de C_i

$$C_i = 2\omega_i M_i \xi_i \quad (38)$$

Usando essa definição na equação (37) e resolvendo-a para ξ_i tem-se (lembrando que $M_i = 1$):

$$\xi_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1\omega_i}{2} \quad (39)$$

Conhecidas duas taxas de amortecimento associadas a dois quaisquer modos especificados e substituindo-se seus valores na equação (39), um sistema de duas equações a duas incógnitas é formado. Sua solução fornece os valores de a_0 e a_1 . Os valores das outras taxas de amortecimento desconhecidas são obtidos aplicando-se a equação (39) com o correspondente valor de ω_i e os valores de a_0 e a_1 encontrados. Existem outras maneiras de se definir uma matriz de amortecimento que atenda às condições de ortogonalidade em relação à base modal, não sendo aquela definida pela equação (34) a única possível.

Analogamente ao caso sem amortecimento, pode-se obter, a partir da equação (33):

$$\ddot{Y}_i + C_n \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = P_i(t) \quad (40)$$

A equação (40) é a mesma equação obtida em sistemas de um grau de liberdade submetidos a amortecimento viscoso, portanto pode ser resolvida da mesma forma como, por exemplo, usando a equação (16). Com a solução de n equações desse tipo se encontrarão n funções Y_i . Sendo assim, a solução final, em coordenadas nodais, será dada pela equação (26).

3.5 Solução das equações de movimento

Pelo método da superposição modal, como visto, o sistema de equações $N \times N$ é desacoplado, resultando em N equações independentes. Cada equação é uma equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, em coordenadas modais, podendo ser resolvida por qualquer processo conhecido. O processo que se propôs nesse trabalho é a solução pela integral de Duhamel, que pode ser expressa na forma de uma integral de convolução, como já dito. Essa integral é explicitada abaixo:

$$Y_i(t) = \int_0^t P_i(t) h_i(t - \tau) d\tau \quad (41)$$

Onde, para sistemas não amortecidos, tem-se, de acordo com a equação (13):

$$h_i(t - \tau) = \frac{1}{M_i \omega_i} \text{sen}(\omega_i(t - \tau)) \quad (42)$$

E para sistemas amortecidos, tem-se, de acordo com a equação (16):

$$h_i(t - \tau) = \frac{1}{M_i \omega_{d_i}} \text{sen}(\omega_{d_i}(t - \tau)) e^{-\xi_i \omega_i(t - \tau)} \quad (43)$$

Lembrando que, em ambos os casos, $M_i = 1$ para todo i .

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Shear Building

Considera-se um edifício com três pavimentos de tipo “Shear Building”, cujos pilares de sustentação permitem deslocamentos horizontais para cada piso. O Shear Building tem, portanto, três graus de liberdade, conforme mostra o desenho esquemático da Figura 4.

Apenas no piso superior atua um carregamento horizontal transiente durante 0,05 segundos, se anulando a partir deste instante (Figura 5). Deve-se utilizar o método da superposição modal para encontrar o histórico de deslocamentos de cada piso individualmente, considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh com uma taxa de amortecimento de 5 % para o 1º e 3º modos.

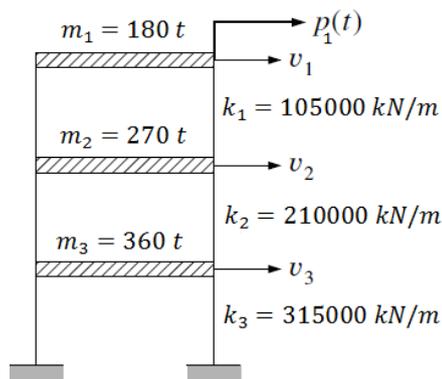


Figura 4 – Representação do Shear Building

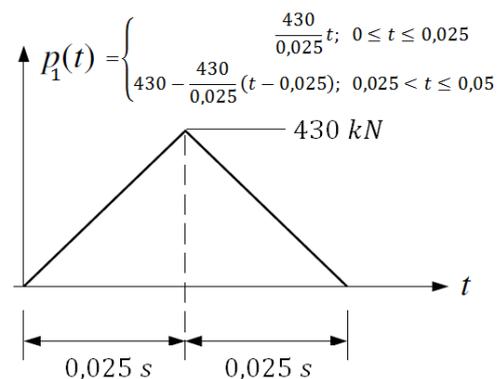


Figura 5 – Carregamento atuante no piso superior

A partir dos dados da Figura 4, podem-se construir as matrizes de massa e rigidez do sistema e resolver o problema de autovalor proposto na equação (20). Usando o modelo de matriz de massa concentrada, construindo a matriz de rigidez que considera apenas os 3 graus de liberdade propostos, e resolvendo o problema de autovalor, tem-se:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 0 \\ 0 & 0 & 360 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = 1,05 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 14,32 \\ 30,61 \\ 45,46 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Para encontrar os autovetores, usa-se a equação (19) e resolvem-se 3 sistemas lineares homogêneos. Tomando a primeira variável desses sistemas como variável livre e fazendo-as iguais a 1, tem-se, para solução dos autovetores:

$$\mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0,649 \\ 0,302 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -0,607 \\ -0,679 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2,542 \\ 2,44 \end{pmatrix} \right] \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 326,4 \\ 445,3 \\ 4067,2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Através desses autovetores podem-se calcular as massas generalizadas para cada grau de liberdade (o que já foi feito acima) e normalizar todo o conjunto de vetores em relação a essas massas. Usando então a equação (24) tem-se:

$$\Phi = \left[\begin{pmatrix} 0,055 \\ 0,036 \\ 0,017 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,047 \\ -0,029 \\ -0,032 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,016 \\ -0,04 \\ 0,038 \end{pmatrix} \right] \quad (46)$$

Através das taxas de amortecimento $\xi_1 = \xi_3 = 5\%$ e as frequências ω_1 e ω_3 constrói-se um sistema de 2 equações do tipo da equação (39) e acha-se as incógnitas a_0 e a_1 . Com essas incógnitas, e usando agora ω_2 , encontra-se ξ_2 usando a mesma equação. Os resultados são:

$$a_0 = 1,088 \text{ s}^{-1} \quad a_1 = 1,67 \times 10^{-3} \text{ s} \quad \xi_2 = 4,33 \% \quad (47)$$

Dado o carregamento atuante (força apenas no andar superior, com equação $p_1(t)$ mostrada na Figura 5) encontra-se o vetor de carga $\mathbf{p}(t)$. Com o vetor de carga e com os autovetores normalizados, acham-se as cargas generalizadas $P_i(t) = \Phi_i^T \mathbf{p}(t)$. Adicionalmente, com as taxas de amortecimento ξ_i encontradas e com as frequências ω_i e $\omega_{d_i} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$, encontram-se as funções de resposta ao impulso unitário, $h_i(t)$, dadas pela equação (43). Os resultados são:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0,055 \cdot p_1(t) \\ 0,047 \cdot p_1(t) \\ 0,016 \cdot p_1(t) \end{bmatrix} \quad h(t) = \begin{bmatrix} 0,07 \cdot \text{sen}(14t) e^{-0,72t} \\ 0,033 \cdot \text{sen}(31t) e^{-1,3t} \\ 0,022 \cdot \text{sen}(45t) e^{-2,3t} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Finalmente, encontram-se a resposta da estrutura para cada andar através da equação (41) combinada com a equação (26). Os gráficos dessas respostas são mostrados na Figura 6:

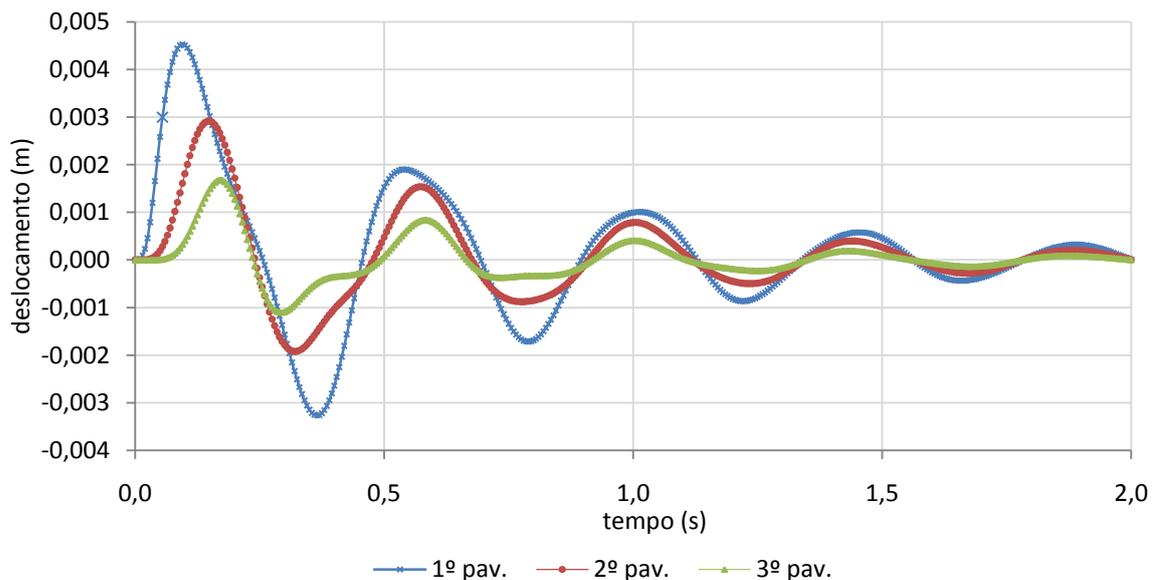


Figura 6 – Respostas obtidas para os 3 pavimentos do Shear Building

4.2 Reservatório

As figuras 7 e 8 mostra um reservatório elevado e a carga dinâmica transiente à qual está submetido. Esta carga tenta simular a ação de uma rajada de vento. A resposta será avaliada numericamente através das equações (15) e (16).

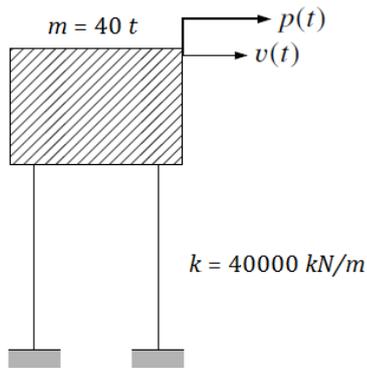


Figura 7 – Representação do reservatório

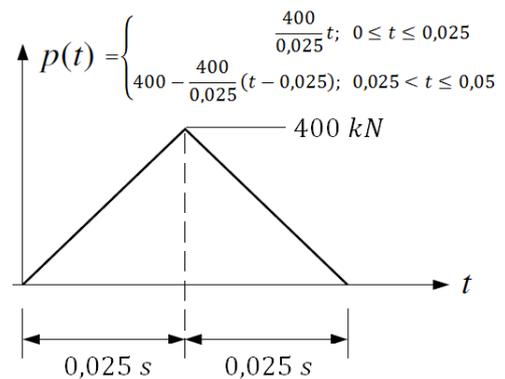


Figura 8 – Carregamento atuante

A análise numérica é realizada considerando o sistema com e sem amortecimento. Para o sistema amortecido, adota-se um modelo com taxa de amortecimento viscoso igual a 5% ($\xi = 0,05$). Os gráficos (tempo x deslocamento) das respostas para os casos amortecido e não amortecido são mostrados na figura 9.

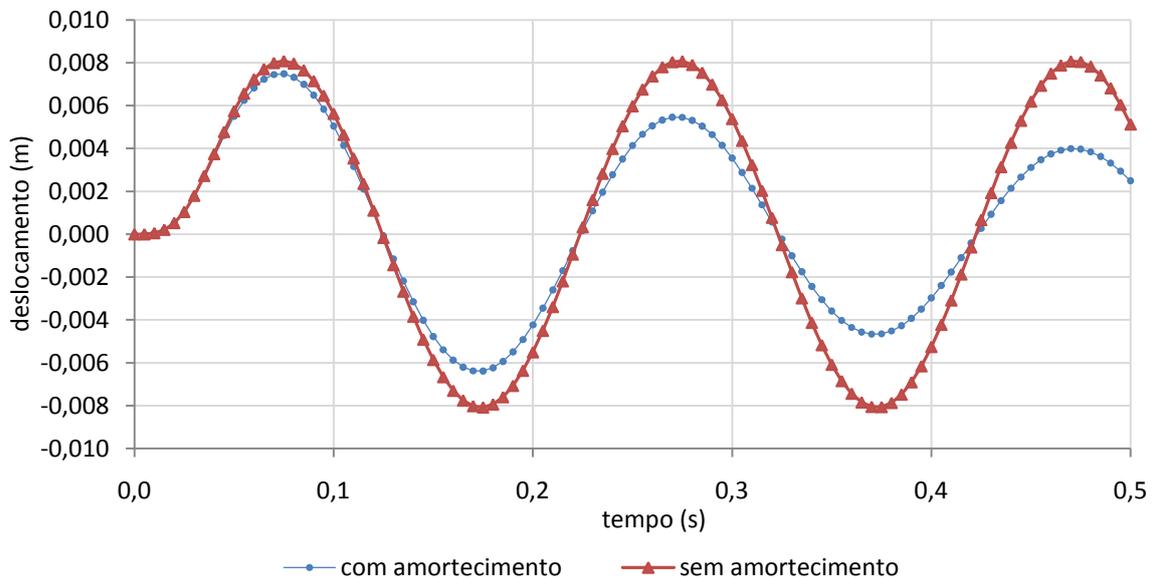


Figura 9 – Respostas obtidas com e sem amortecimento

5 CONCLUSÃO

O presente artigo mostra a importância da integral de Duhamel no ensino de vibrações estruturais, visto que usa aritmética real de fácil assimilação pelos estudantes em um curso inicial nessa área de conhecimento. Por sua vez, a própria dedução da integral de Duhamel também é de fácil assimilação porque se baseia na simples idéia de superposição de respostas a impulsos unitários. A abordagem é feita tanto em sistemas com um grau com liberdade (1GL), como em sistemas com múltiplos graus de liberdade (MGL). Nos sistemas de MGL se faz uso do Método da Superposição Modal para resolver as equações em coordenadas modais, para posteriormente se encontrar a resposta em coordenadas físicas por superposição. Por fim, exemplos numéricos enriquecem a apresentação.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, à CAPES e à FAPES.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: HARBRA, 1986.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995.

FERREIRA, W. G. **Análise Dinâmica no Domínio da Frequência de Sistemas Estruturais**. Vitória: Enfoque, 2002.

THE DUHAMEL INTEGRAL AND ITS IMPORTANCE IN THE TEACHING OF STRUCTURAL VIBRATIONS

***Abstract:** The response of a mass-spring system of a single degree of freedom submitted to dynamic loads can be calculated in two ways: by solving the equation of motion in the time domain or in the frequency domain. For a course with educational intentions for students of civil and mechanical engineering the procedure in the frequency domain is not the most suitable because it makes use of complex numbers, which causes difficulties of assimilation or even rejection. In contrast, in the time domain, real variables are used, easily accepted by students. Among the procedures in time, the technique that uses the Duhamel integral is easier to understand, facilitating the teaching of structural vibrations in a first level. For systems of multiple degrees of freedom with linear behavior, the equations can be decoupled and the technique of Duhamel integral, the same used for systems with one degree of freedom, apply the equations in modal coordinates. This makes stronger the importance of this technique to facilitate the teaching of structural vibrations. In the end, numerical examples are presented.*

***Palavras-chave:** Duhamel integral, Engineering education, Structural vibration*