

O AMBIENTE R COMO UMA ALTERNATIVA PARA A SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Custodio da Cunha Alves custodio.alves@univille.br

Universidade da Região de Joinville, Departamento de Engenharia de Produção
Campus Universitário, s/n, Bairro Bom Retiro
89201-974 Joinville-SC

Elisa Henning dma2eh@joinville.udesc.br

Universidade do Estado de Santa Catarina, Departamento de Matemática
Campus Universitário Avelino Marcante
88040-900 Joinville-SC

Nillo Araujo nilloaraujo@yahoo.com.br

Universidade do Estado de Sana Catarina, Departamento de Engenharia de Produção
Campus Universitário Avelino Marcante
88040-900 Joinville-SC

Sharleston de Oliveira da Rocha sharleston.rocha@schulz.com.br

Universidade da Região de Joinville, Departamento de Engenharia de Produção
Campus Universitário, s/n, Bairro Bom Retiro
89201-974 Joinville-SC

***Resumo:** A utilização de pacotes computacionais para a solução de problemas de programação linear tem sido cada vez mais freqüente no meio acadêmico. Não poderia ser diferente no ensino da Pesquisa Operacional, cuja aprendizagem de programação linear envolve o acompanhamento dos avanços da tecnologia para atender a complexidade das restrições definidas nos modelos matemáticos. Uma rotina é desenvolvida no ambiente R cujos procedimentos metodológicos incluem a definição das variáveis de decisão e a formulação do modelo matemático. A relevância da utilização deste ambiente como uma alternativa para a solução computacional de problemas de programação linear é reduzir o tempo para o usuário obter tal solução.*

***Palavras-chave:** Ambiente R, Solução computacional, Programação linear.*

1 INTRODUÇÃO

A Programação Linear (PL) é uma técnica de planejamento baseada em matemática voltada para a otimização de problemas em que se têm diversas opções de escolhas sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação (PASSOS, 2008). É conhecida como um dos mais importantes instrumentos da Pesquisa Operacional - ciência que envolve o desenvolvimento de métodos científicos para analisar sistemas complexos e tomar decisões (PIDD, 1998).

O ambiente R é um projeto GNU baseado no conceito de software livre e de código aberto. Este recurso computacional se caracteriza como um sistema totalmente planejado e coerente que ao invés de apresentar uma aglomeração de ferramentas muito específicas e inflexíveis,

permite aos usuários acrescentar funcionalidade adicional por definição de novas funções (VENABLES, 2004).

Este trabalho tem como objetivo propor o ambiente R como uma alternativa viável para a solução de problemas de PL. Para comprovar a validade prática da utilização desta ferramenta computacional dois problemas de aplicação de PL obtidos da literatura são resolvidos em ambiente R.

2 MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL

As restrições de um modelo de PL definem para o problema o conjunto de soluções viáveis ou região viável. Para problemas de PL simples, com uma ou duas variáveis de decisão, uma abordagem gráfica é relativamente fácil para obter a região viável do modelo de PL e localizar ponto viável ideal graficamente, ou seja, o melhor valor possível da função objetivo (LACHTERMACHER, 2009).

Como podemos esperar, poucos problemas de PL, do mundo real envolvem apenas duas variáveis de decisão. Portanto, a abordagem da solução gráfica tem utilização prática limitada. No entanto, a discussão de problemas de duas variáveis fornece a base para o entendimento dos elementos envolvidos em todos os problemas de PL e das estratégias gerais para resolvê-los. Por exemplo, todo problema de PL independente do número de variáveis de decisão tem uma solução viável e uma solução ótima. Embora seja relativamente fácil obter no gráfico a região viável para o PL de duas variáveis, é difícil visualizar ou obter a região viável de um problema de PL com três variáveis. Se houver mais de três variáveis é praticamente impossível visualizar ou encontrar no gráfico a região viável. Felizmente, existem várias técnicas matemáticas para resolver problemas de PL que envolvem praticamente qualquer número de variáveis sem visualizar ou encontrar no gráfico suas regiões viáveis. Essas técnicas podem ser desenvolvidas por meio de pacotes de planilhas, os quais tornam a resolução de problemas de PL uma tarefa relativamente simples. Assim, usando software de computador adequado, pode-se resolver facilmente qualquer problema de PL corretamente e transferir de maneira precisa essa fórmula para o computador (JENSEN & BARD, 2003).

3 REPRESENTAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A forma padrão de otimização linear garante que as entradas do algoritmo simplex tenham a mesma estrutura. Para o algoritmo de minimização, a forma padrão do problema de PL pode ser definida como:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\text{Sujeita a : } \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

A função linear f em (1), a ser minimizada, é chamada função objetivo, o sistema de equações lineares em (2) define as restrições do problema, juntamente com as condições de não negatividade das variáveis em (3).

Considerando a seguinte matriz e vetores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A formulação padrão da programação linear pode ser escrita equivalentemente na notação matricial como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

onde:

\mathbf{A} é uma matriz $m \times n$, chamada matriz dos coeficientes,

$\mathbf{c}^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ é o vetor de custos,

$\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ é o vetor das variáveis,

$\mathbf{b}^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos,

$\mathbf{0}^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ é o vetor cujos elementos são todos iguais a zero

4 SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS DE PL

A solução computacional de problemas de PL de apenas duas variáveis pode ser obtida graficamente. No entanto, quando se trata desses modelos reduzidos servem mais para fins didáticos, pois em problemas reais o número de variáveis supera em muito esse número. Problemas com mais de duas variáveis, quando não muitas, podem ainda ser manualmente resolvidos mediante a utilização de algoritmo Simplex. Contudo, essa forma de resolução exige um considerável esforço, que cresce com o tamanho do problema. Por isso, recomenda-se a utilização de software adequado para a solução (LOESCH & HEIN, 2009).

Nos últimos anos grandes avanços estão começando a revolucionar a maneira pelas quais certas áreas da pesquisa operacional estão sendo praticadas. Entre esses avanços recentes está a explosão no uso de planilhas e softwares de planilhas para formular e resolver modelos de pesquisa operacional, inclusive modelos de programação matemática e modelos de simulações especiais (HILLIER & LIEBERMAN, 2006).

Comumente são utilizados com sucesso ferramentas de otimização de planilhas incorporadas tais como a ferramenta Solver do MS-Excel® que entre outras, soluciona estes problemas. Entretanto, problemas de otimização podem também ser resolvidos sem o uso de uma planilha usando um pacote de programas matemáticos. Uma lista parcial destes programas inclui: LINDO, LINGO, MPL e CPLEX. Normalmente, esses programas são utilizados por pesquisadores e empresas interessadas em resolver problemas mais complexos que não se encaixam convenientemente em uma planilha (RAGSDALE, 2009).

Estes programas apresentam vários recursos por sinal, bastante atrativos para a solução de problemas de programação linear. Como característica comum está o fato de todos serem pacotes comerciais, implicando no pagamento de licenças. Não raras vezes este custo é alto para os acadêmicos dos cursos tanto de nível de graduação quanto de pós-graduação. Felizmente, hoje, muitos pacotes livres já podem ser encontrados e, dentre eles, o ambiente R.

O diferencial que justifica a utilização deste ambiente como uma alternativa para a solução computacional está no fato do R ser um projeto GNU baseado no conceito de software livre.

Neste trabalho para comprovar a relevância da utilização deste ambiente, desenvolveu-se uma rotina no ambiente R com o pacote GNUR para obter a solução computacional, ou seja, determinar as variáveis de decisão capazes de otimizar a função objetivo de problemas de PL. Os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da rotina incluem a definição das variáveis de decisão e a formulação do modelo matemático. Dois problemas de aplicação de PL da literatura ilustram tanto o desenvolvimento da rotina quanto os resultados obtidos após a execução desta conforme problemas de aplicação de PL 1 e 2 a seguir.

4.1 Problema de Aplicação de PL : 1

Uma empresa química opera uma pequena usina. Operar a usina exige duas matérias-primas, A e B.

O fornecimento máximo disponível por semana é 2700 litros de A e 2000 litros de B.

A usina pode operar usando um dos dois processos, que possuem diferentes exigências de matéria prima, estão resumidos a seguir.

Processo	Matérias primas consumidas (litros/hora)	
	A	B
1	20	10
2	30	25

A usina pode operar por um total de 120 horas por semana, mas, por motivos de segurança, o processo 1 não pode ser operado por mais de 100 horas por semana. Sabe-se ainda que a contribuição dos processos 1 e 2 para o lucro são respectivamente R\$ 50,00 e R\$ 60,00 por hora. Determine quantas horas cada processo deve ser operado para aperfeiçoar o lucro.

Fonte: Smailes and McGrane, 2000, pág. 208)

Solução:

Variáveis de decisão:

x_1 e x_2 = número de horas que os processos 1 e 2 respectivamente, deve operar

Modelo Matemático:

$$\text{Max } L = 50x_1 + 60x_2$$

sa:

$$20x_1 + 30x_2 \leq 2700$$

$$10x_1 + 25x_2 \leq 2000$$

$$x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$


```
abline(v=100,col=gray(0.30),lwd=2)
x1=0:38
x2=39:90
x3=91:100
cord.x<-c(0,seq(0,100,by=1),100)
cord.y<-c(0,r(x1),s(x2),t(x3),0)
polygon(cord.x,cord.y,density=5,angle=45,col=gray(0.50))
legend(110,130,c("s","r","t","u"),fill=c(1,2,4,gray(0.3)))
```

A figura 2 mostra a representação gráfica do modelo matemático deste exemplo com apenas duas variáveis com a execução da rotina no ambiente R:

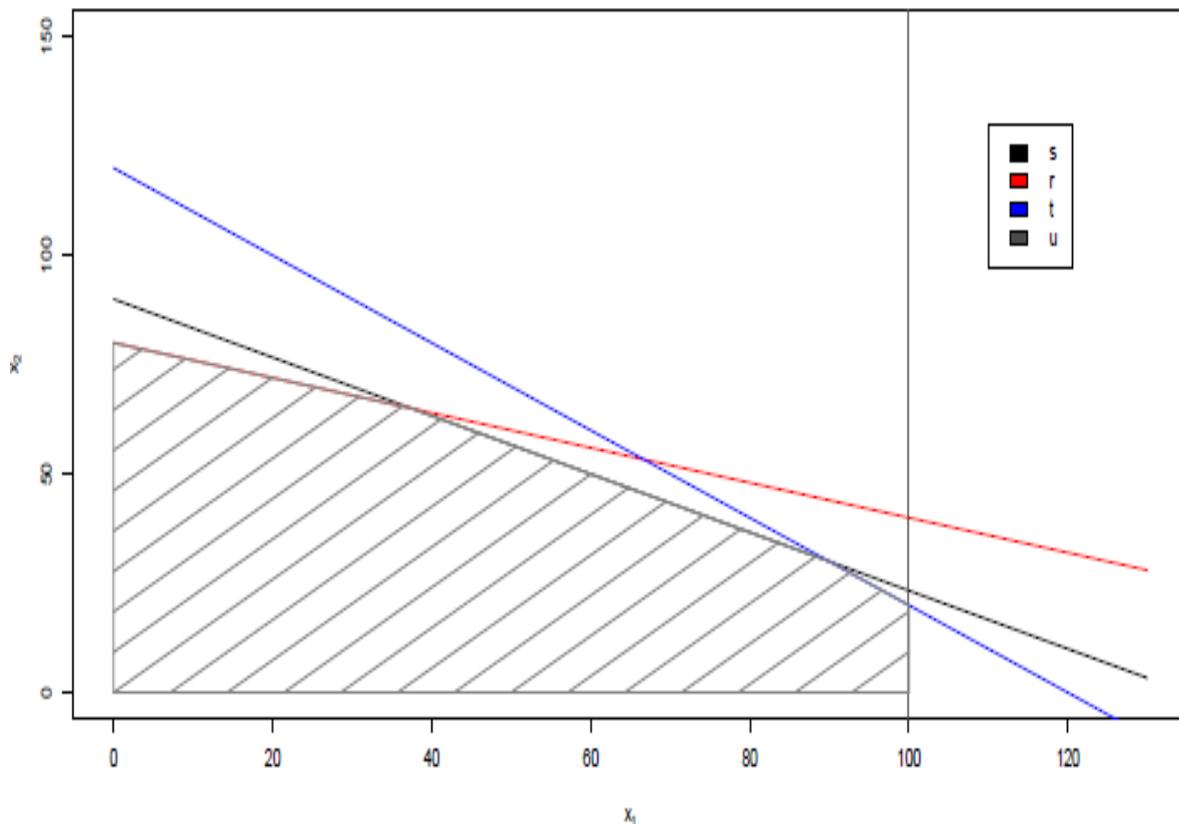


Figura 2: Tela do R – execução da rotina do modelo matemático e resultados numéricos

4.2 Problema de Aplicação de PL : 2

A Electro-Poly Corporation é a fabricante líder mundial de anel coletor. Um anel coletor é um dispositivo de acoplamento que permite que a corrente passe através de uma conexão trajetória, como a de um canhão de um navio, aeronave ou tanque. Recentemente, a empresa recebeu um pedido de \$ 750.000 para diversas quantidades de três tipos de anéis coletores. Cada anel exige certa quantidade de tempo para montar o enrolamento e o coletor. Esses dados que mostram as exigências para os três modelos de anéis coletores estão resumidos a seguir.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Quantidade pedida	3000	2000	900
Horas necessárias para fabricar o enrolamento (por unidade)	2	1,5	3
Horas necessárias para fabricar o coletor (por unidade)	1	2	1

Infelizmente, a Electro-Poly não tem capacidade suficiente para fabricar o enrolamento e o coletor, de modo a concluir o pedido até a data de entrega. A empresa tem somente 10.000 horas de capacidade de enrolamento e 5000 horas de capacidade de coletor alocada para esse pedido. Entretanto, a empresa pode sub-contratar qualquer parte desse pedido com um de seus concorrentes. Os custos unitários para produzir internamente cada modelo e o custo de compra de produtos fabricados por um concorrente estão resumidos a seguir.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Custo para fabricar	\$ 50	\$ 83	\$ 130
Custo para comprar	\$ 61	\$ 97	\$ 145

A Electro-Poly quer determinar o número de anéis coletores que deve fabricar e o número que deve comprar, de modo a tender o pedido do cliente com menor custo possível.

Fonte: Ragsdale, C.T. 2009, pág. 65)

Solução:

Variáveis de decisão:

M1, M2 e M3 = quantidade de anéis coletores dos modelos 1, 2 e 3, respectivamente a ser fabricada internamente.

B1, B2 e B3 = quantidade de anéis coletores dos modelos 1, 2 e 3, respectivamente a ser comprada internamente

Modelo Matemático:

$$\text{Min } C = 50M1 + 83M2 + 130M3 + 61B1 + 97B2 + 145B3$$

sa:

$$2M1 + 1,5M2 + 3M3 \leq 10000$$

$$M1 + 2M2 + M3 \leq 5000$$

$$M1 + B1 = 3000$$

$$M2 + B2 = 2000$$

$$M3 + B3 = 900$$

$$M1, M2, M3, B1, B2, B3 \geq 0$$

Rotina:

```
library(lpSolve)
```

```
f.obj<-c(50,83,130,61,97,145)
```

```
f.cons<-matrix(c(2,1,1,0,0,1.5,2,0,1,0,3,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1),5,6)
```

```
f.dir<-c("<=", "<=", "=", "=", "=")
```

```
f.rhs<-c(10000,5000,3000,2000,900)
```


matemáticos de PL. Além disso, pode ser baixado sem custos de licença diretamente da Internet. O diferencial em relação aos recursos comerciais existentes é a expectativa de aplicações futuras ilimitadas que o ambiente R permite.

Os dois problemas de aplicação de PL da literatura utilizados neste trabalho para o desenvolvimento da rotina e resolução no ambiente R são simples e de fácil entendimento que possibilita o usuário reduzir o tempo para obter a solução de problemas de PL.

6 REFERÊNCIAS / CITAÇÕES

HILLIER, F.S. and LIEBERMAN, G.J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8^a ed., McGraw-Hill, 2006.

JENSEN, P.A and BARD, J.F. **Operations Research models and methods**. 2^a ed., John Wiley & Sons, 2003.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 4^a ed., Pearson Prentice Hall, 2009.

PASSOS, E.J.P.F. **Programação Linear como instrumento da Pesquisa Operacional**. Atlas, 2008.

PIDD, M. **Modelagem Empresarial: ferramentas para tomada de decisão**. Bookman, 1998.

RAGSDALE, C.T. **Modelagem e Análise de Decisão**. Cengage Learning, 2009.

SMAILES, J. and McGRANE, A. **Essential Business Statistics**. Pearson Prentice Hall, 2000.

VENABLES, W. N, SMITH, D.M. **An introduction to R**. Disponível em: <http://www.r-project.org>. Acessado em 10/09/2004.

R ENVIRONMENT AS AN ALTERNATIVE TO COMPUTATIONAL SOLUTION OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Abstract: *The use of computational packages for solving linear programming problems has been increasingly common in academia. There could be different in the teaching of Operations Research whose learning of programming linear involves the accompaniment advances of the technology to meet the complexity of the restrictions set out in mathematical models. A routine is developed in the R environment whose methodological procedures include the definition of decision variables and formulating the mathematical model. The relevance of using this environment as an alternative to the computational solution of linear programming problems is for reduce the time for the user to obtain such solution.*

Key-words: *R Environment, Computational solution, Linear programming.*