APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA ENGENHARIA

Andresa Pescador – andresa.pescador@gmail.com
Universidade do Estado de Santa Catarina
Rua Dr. Getúlio Vargas, 2822
89140-000 - Ibirama - SC
Janaína Poffo Possamai – janapoffo@gmail.com
Cristiano Roberto Possamai – cristiano.mestrado@gmail.com
Universidade Regional de Blumenau
Rua Antônio da Veiga, 140
89012-900 - Blumenau – SC

Resumo: *Este trabalho discute a importância de apresentar aplicações no estudo da disciplina álgebra linear nos cursos de engenharia. Apresenta-se alguns casos de aplicação de sistemas lineares, através de circuitos elétricos na engenharia elétrica, balanceamento de equações químicas visando a engenharia de produção e equilíbrio de estruturas metálicas na engenharia civil. Os problemas apresentados são solucionados através da resolução matricial dos sistemas lineares, que envolvem dados numéricos, permitindo sua resolução manual. Problemas reais, em geral, apresentam dimensões maiores e necessitam do auxilio de softwares computacionais apropriados para a resolução.*

Palavras Chaves: *Matrizes, Sistemas Lineares, Formação de Engenheiros*

1 INTRODUÇÃO

A matemática tem relação direta com várias áreas do conhecimento (física, química, engenharia, informática, economia, biologia, medicina, ciências humanas), ocupando um lugar de destaque no mundo científico contemporâneo.

Na modelagem de situações que necessitam avaliar a tendência dos dados reais, na codificação e criptografia, na implementação de algoritmos para a criação de softwares, no cálculo estocástico em finanças, tem-se nesses alguns exemplos do papel essencial da matemática em nossa sociedade que se torna cada vez mais tecnológica.

Encontra-se assim, em diversas profissões (executivos altamente qualificados, tecnólogos superiores, altos cargos industriais, administrativos, engenheiros) esta necessidade de competências matemáticas adaptadas.

Nos cursos de engenharia de modo geral tem-se nos primeiros semestres um núcleo comum de disciplinas básicas da área da matemática, entre elas, álgebra linear, geometria analítica e cálculo diferencial e integral. Os profissionais da engenharia necessitam da formação de competências para sua atuação, das quais, construir modelos para descrever e analisar situações, testar hipóteses, analisar e otimizar processos, que constituem habilidades adquiridas no estudo dessas disciplinas da matemática.

Neste trabalho destaca-se a disciplina de álgebra linear na formação de engenheiros.

2 ESTUDO DA ÁLGEBRA LINEAR

A álgebra linear ocupa lugar de destaque nas diversas áreas da matemática – da análise à estatística, onde se utilizam, constantemente, o cálculo matricial e vetorial. A importância da álgebra linear tem crescido nas últimas décadas. Os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática e como seria de se esperar, esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse.

Algumas das possibilidades de aplicações dos conteúdos da disciplina na modelagem matemática de problemas e situações concretas em engenharia são:

• Equações lineares em decisões gerenciais; circuitos eletrônicos e exploração de petróleo, entre outros.

• Álgebra matricial em computação gráfica.

• Determinantes em cálculo de áreas de volumes de sólidos poliédricos.

• Espaços vetoriais em sistemas de controle.

• Autovalores e autovetores em sistemas dinâmicos, entre outros.

Apesar da linguagem específica desta disciplina muitos problemas de ordem prática são resolvidos por meio de técnicas simples, como por exemplo, o uso de sistemas lineares para tratar de situações que envolvam n variáveis relacionadas através de m equações. Os algoritmos de resolução de sistemas lineares podem ser apresentados através da notação matricial, tornando sua aplicação uma expansão do tratamento com números.

3 APLICAÇÕES

São apresentadas três aplicações onde faz-se necessário o uso de sistemas lineares: uma aplicação na engenharia elétrica através de circuitos elétricos, uma na engenharia química no balanceamento de equações e uma aplicação na engenharia civil através de estruturas metálicas.

3.1 Circuitos Elétricos

Para tratar de circuitos elétricos faz-se necessário definir: Lei de Ohm, em que a força elétrica é o produto da resistência pela corrente elétrica, descrita pela equação:

$$E = R \cdot i \tag{1}$$

e as Leis de Kirchhoff em que tem-se a Lei dos Nós, onde a soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele, e a Lei das Malhas, onde a soma das quedas de tensão ao longo de qualquer circuito é igual à tensão total em torno do circuito (fornecida pelas baterias).

Numericamente, pode-se analisar o caso abaixo onde deseja-se determinar as correntes do circuito elétrico.

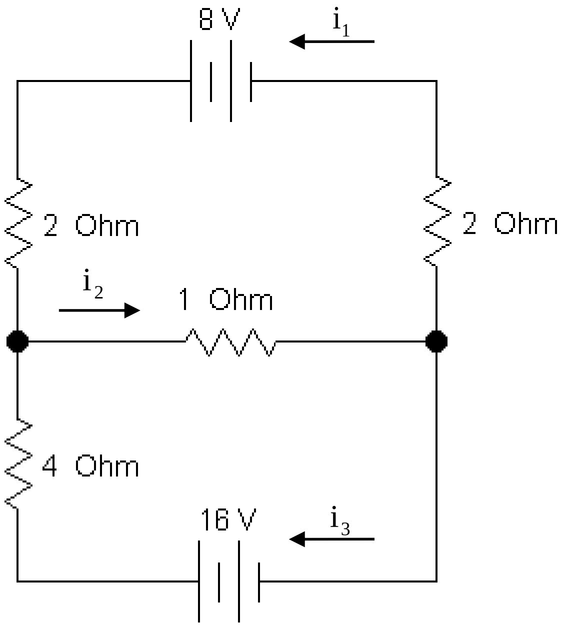

Figura 1 – Circuito elétrico

No circuito com duas baterias e quatro resistores, tem-se as seguintes equações para os nós:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \tag{2}$$

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \tag{3}$$

Pelo circuito CABC tem-se:

$$4i_1 + i_2 = 8 \tag{4}$$

Pelo circuito DABD:

$$i_2 + 4i_3 = 16 \tag{5}$$

Sendo assim, o sistema linear em questão segue:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 4i_1 + i_2 \quad = 8 \\ \quad i_2 + 4i_3 = 16 \end{cases} \tag{6}$$

O sistema linear formado (6) pode ser escrito na forma matricial $Ai = B$, onde a matriz A é a matriz dos coeficientes, ou seja, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o vetor i é o vetor das incógnitas, $i = \begin{bmatrix} i_i \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$ e o lado direito é dado por $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$.

3.2 Balanceamento de equações químicas

Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o mesmo número de átomos de cada tipo do lado esquerdo e direito. Mantêm reagentes à esquerda e produtos à direita.

Tem-se que 2H2 + O2 → 2H2O é uma equação balanceada. Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Ainda, 6H2 + 3O2 → 6H2O também é uma equação balanceada.

No caso abaixo, a combustão de amônia (NH3) em oxigênio produz nitrogênio (N2) e água. Uma nova aplicação de sistemas lineares se dá quando quer-se encontrar uma equação química balanceada para a reação seguinte:

$$w\,NH_3 + x\,O_2 \rightarrow y\,N_2 + z\,H_2O \qquad (7)$$

Pode-se fazer a seguinte correspondência:
Nitrogênio:

$$w = 2y \qquad (8)$$

Hidrogênio:

$$3w = 2z \qquad (9)$$

Oxigênio:

$$2x = z \qquad (10)$$

E assim, o sistema linear está formado:

$$\begin{cases} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2z - z = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Neste caso, o sistema linear (11) pode ser escrito na forma matricial $Ax = b$, onde a matriz A é a matriz dos coeficientes, ou seja, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor x é o vetor das incógnitas, $x = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e o lado direito é dado por $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.3 Construção de estruturas metálicas

Seja um guindaste que deve erguer cargas, assim, pode-se dizer que tem-se um problema de uma estrutura metálica na qual quer-se determinar o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de forma que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

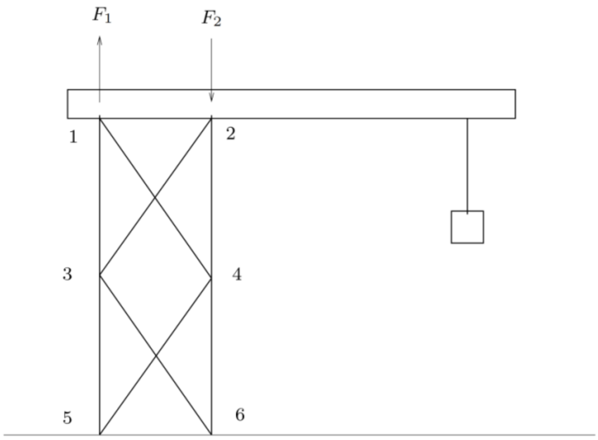

Figura 2 – Diagrama da estrutura metálica composta por vigas

A partir do momento que se conhece a massa a ser suspensa e também o comprimento do braço deste guindaste, o cálculo das forças que incidem na estrutura torna-se imediato. Para que a estrutura permaneça em equilíbrio o somatório das forças em cada nó, de 1 a 6, deve ser nula tanto na direção horizontal como na direção vertical. Para tanto calcula-se a força exercida por cada viga nos nós, ou seja, calcula-se a força f_{ij}, que significa a força exercida sobre o nó i pela viga que liga o nó i ao nó j.

Para exemplificar, toma-se o nó 2, que é afetado pelas vigas que o ligam aos nós 1,3 e 4. Suponha que θ_{ij} representa o ângulo entre a viga (ij) e a vertical. Ou seja, no equilíbrio de forças, para o nó 2 tem-se as seguintes equações:

$$f_{21}\cos\theta_{21} + f_{23}\cos\theta_{23} + f_{24}\cos\theta_{24} = F_2 \tag{12}$$

$$f_{21}\mathrm{sen}\theta_{21} + f_{23}\mathrm{sen}\theta_{23} + f_{24}\mathrm{sen}\theta_{24} = 0 \tag{13}$$

Constrói-se as demais equações do somatório das forças para cada um dos nós, ou seja, tem-se:

$$f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} = F_1 \tag{14}$$

$$f_{12}\mathrm{sen}\theta_{12} + f_{13}\mathrm{sen}\theta_{13} + f_{24}\mathrm{sen}\theta_{24} = 0 \tag{15}$$

$$f_{31}\cos\theta_{31} + f_{35}\cos\theta_{35} + f_{32}\cos\theta_{32} + f_{36}\cos\theta_{36} = 0 \tag{16}$$

$$f_{31}\text{sen}\theta_{31} + f_{35}\text{sen}\theta_{35} + f_{32}\text{sen}\theta_{32} + f_{36}\text{sen}\theta_{36} = 0 \qquad (17)$$

$$f_{41}\cos\theta_{41} + f_{45}\cos\theta_{45} + f_{42}\cos\theta_{42} + f_{46}\cos\theta_{46} = 0 \qquad (18)$$

$$f_{41}\text{sen}\theta_{41} + f_{45}\text{sen}\theta_{45} + f_{42}\text{sen}\theta_{42} + f_{46}\text{sen}\theta_{46} = 0 \qquad (19)$$

E por fim constrói-se a equação que representa a situação em que a estrutura, como um todo, não tem nenhuma aceleração horizontal, promovendo o equilíbrio:

$$f_{35}\text{sen}\theta_{35} + f_{46}\text{sen}\theta_{46} + f_{54}\text{sen}\theta_{54} + f_{63}\text{sen}\theta_{63} = 0\,. \qquad (20)$$

Faz-se $f_{ij} = -f_{ji}$ e assim, pode-se escrever as equações (12)-(20) na forma matricial, isto é,

$$Af = F \qquad (21)$$

Onde:

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{23} \\ f_{24} \\ f_{35} \\ f_{36} \\ f_{45} \\ f_{46} \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Assim,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\theta_{12} & \mathrm{sen}\theta_{13} & \mathrm{sen}\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta_{12} & 0 & 0 & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta_{12} & 0 & 0 & \mathrm{sen}\theta_{23} & \mathrm{sen}\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_{13} & 0 & -\cos\theta_{23} & 0 & \cos\theta_{35} & \cos\theta_{36} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{sen}\theta_{13} & 0 & -\mathrm{sen}\theta_{23} & 0 & \mathrm{sen}\theta_{35} & \mathrm{sen}\theta_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta_{14} & 0 & -\cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{sen}\theta_{35} & \mathrm{sen}\theta_{36} & \mathrm{sen}\theta_{45} & \mathrm{sen}\theta_{46} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Neste problema, não ter solução significaria que a estrutura correspondente não seria capaz de se manter em pé, e teria de ser trocada.

Se o problema agora fosse estrutura metálica da figura (3), trabalhar-se-ia de forma análoga, a nova configuração teria apenas ângulos diferentes.

Para uma mesma estrutura sujeita a forças externas variáveis, pode-se encontrar a matriz-coluna das forças que atuam sobre as vigas multiplicando-se a inversa da matriz que modela a estrutura metálica pela matriz-coluna das forças externas.

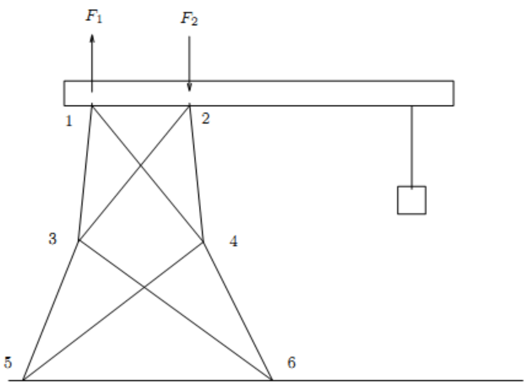

Figura 3 – Diagrama de uma segunda estrutura metálica composta por vigas

4 SOLUÇÃO

Poder-se-ia fazer a seguinte pergunta: qual a diferença entre os problemas (3.1), (3.2) e estes dois protótipos citados em (3.3) e os problemas reais em engenharia? Basicamente a resposta seria, tem-se, na prática problemas maiores, com um número maior de componentes elétricos, de reagentes e de vigas, ter-se-ia estruturas com profundidade, largura e altura (tridimensionais) e cada viga teria um peso, o que resultaria nos mesmos problemas acima descritos, mas de dimensão maior.

Percebe-se aqui a grande vantagem de se conhecer a álgebra, já que os dados das matrizes A são de fácil obtenção, ou seja, uma forma de resolver os problemas acima, descritos agora pelas equações matriciais citadas é dada por:

$$i = A^{-1}B, \quad x = A^{-1}b \text{ ou } \quad f = A^{-1}F \tag{25}$$

É claro que para esta solução ocorrer a matriz A deve ser inversível. Em sala de aula, ao se trabalhar a álgebra linear e/ou cálculo numérico, ensina-se outras formas de se resolver sistemas lineares, alguns deles sem a necessidade de inversão de matrizes como na equação (25), pois além deste processo ser caro computacionalmente, a inversa nem sempre existe.

Ou seja, fez-se três aplicações de álgebra linear aplicadas a engenharia: uma solução para um circuito elétrico, uma solução para o balanceamento químico, e o projeto de uma estrutura composta por vigas metálicas. Cada problema exige que se resolva um sistema de equações lineares. No terceiro problema tem-se que quanto mais complexa for esta estrutura, maior será o número de equações e de variáveis. A matriz dos coeficientes do sistema deve ser inversível para que a estrutura não entre em colapso.

Destaca-se que resolver as equações matriciais dos problemas citados implica em tratar-se de um sistema linear onde tem-se duas classes de métodos, os diretos e os iterativos. A escolha do método a ser utilizado dependerá das propriedades da matriz A, como esparsidade e o número de condição, por exemplo. Os métodos diretos são aqueles que, após um número finito de etapas, permite encontrar a solução. Nos iterativos calcula-se uma sequência de aproximações da solução dada uma aproximação inicial.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tradicionalmente os livros didáticos de álgebra linear focam na apresentação de definições, propriedades e algoritmos de resolução, onde os exercícios propostos tratam de casos numéricos ou de aplicações para os outros ramos da própria matemática. Neste trabalho, ao apresentar-se três aplicações na área da engenharia, quer-se mostrar a possibilidade de discutir conteúdos básicos, nesta área da matemática, através do uso de tecnologias para sua resolução. Assim, possibilita-se vislumbrar a utilização prática de sistemas lineares e de matrizes, analisando as limitações da resolução manual de problemas reais e compreendendo os resultados obtidos através de sistemas computacionais.

Espera-se contribuir com o ensino de álgebra nos cursos de engenharia possibilitando que essas aplicações sejam utilizadas e que inspirem a elaborações de outros projetos de aplicação, não apenas no conteúdo de sistemas lineares, sua representação e solução matricial mas também em outros onde seja possível discutir a contribuição da matemática da solução de problemas reais.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

STRANG, Gilbert. *Introduction to linear algebra.* Wellesley: Cambridge, 2003.

APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA IN ENGINEERING

Abstract: *This paper discusses the importance of presenting applications to the study of linear algebra course in engineering courses. It presents some cases of application of linear systems, electric circuits in electrical engineering, balancing chemical equationsin order to balance production and engineering of steel structures in civil engineering. The problems presented are solved by solving linear matrix systems that involve numerical data, allowing for manual resolution. Real problems, in general, are larger in size and require the help of computer software appropriate for the resolution.*

Keywords: *Matrices, Linear Systems, Engineering Education*