

PROPOSTA DE IMPLANTAÇÃO DE UM LABORATÓRIO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA APLICADO A ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

Renato de Sousa Nascimento – renatodesousanascimento@hotmail.com

Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral

Praça Senador Figueira, rua Anahid Andrade, S/N

62011-000 – Sobral - Ceará

Vandilberto Pereira Pinto – vandilberto@ufc.br

Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral

Praça Senador Figueira, rua Anahid Andrade, S/N

62011-000 – Sobral - Ceará

Nelber Ximenes Melo – nelber@dee.ufc.br

Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral

Praça Senador Figueira, rua Anahid Andrade, S/N

62011-000 – Sobral - Ceará

Resumo: *A disciplina de Probabilidade e Estatística é ofertada para os cursos de Engenharia Elétrica e Computação do Campus de Sobral, sempre apresentando altos índices de reprovação. Isso se deve, em grande parte, à escassez de tempo disponível para explicar melhor os diversos conteúdos abrangidos pela disciplina, e também pela dificuldade natural que estes conteúdos acarretam em cada estudante. Uma alternativa viável para obter uma melhoria tanto do aprendizado por parte dos estudantes quanto da transmissão do conteúdo por parte do professor é a implantação de um Laboratório de Probabilidade e Estatística, que, de maneira sucinta, trata-se de um conjunto de práticas nas quais o conhecimento estudado em sala de aula pode ser observado em aplicações dentro das áreas que abrangem a engenharia. Objetiva-se, através desta implementação, obter um melhor rendimento dos alunos, e dessa forma, um menor índice de reprovação e uma maior satisfação por parte dos corpos discente e docente.*

Palavras-chave: *Probabilidade e Estatística, Laboratório, Aprendizado.*

1 INTRODUÇÃO

Do ponto de vista da engenharia, a disciplina de Probabilidade e Estatística é uma importante ferramenta tanto para o controle de qualidade de produtos como para projetos e estimação de parâmetros e análise de dados, sendo uma disciplina fundamental para a formação do futuro engenheiro.

Nos últimos anos ocorreram reformas curriculares que tinham como um dos principais objetivos a redução do tempo para a conclusão em um grande número de cursos de graduação. Nos cursos de engenharia as mudanças foram pequenas, pois, na maioria dos casos, elas já estavam reduzidas a uma única disciplina (COURE, 2009).

O conteúdo abrangido por tal disciplina é muito vasto, necessitando de muita dedicação e raciocínio tanto do professor quanto do aluno. Dessa forma, como a maioria das disciplinas que envolvem um raciocínio mais elevado no processo de aprendizado, tal disciplina gera muitas dúvidas e desestímulo por parte dos estudantes por ter aulas somente teóricas e este fato, associado à falta de tempo disponibilizado para assimilar os diversos conteúdos, o que não contribui para um melhor aprendizado, causa um elevado índice de reprovação dos alunos na disciplina.

Visando uma maior participação e um melhor aproveitamento por parte dos alunos, este trabalho propõe inicialmente uma aplicação da teoria de regressão Linear em um filtro passa baixa de modo a verificar a viabilidade de implementação de práticas de laboratório com os conteúdos da disciplina de probabilidade e Estatística para os cursos de Engenharia Elétrica e Computação de modo a auxiliar o aprendizado e unir os conhecimentos teóricos e práticos, objetivando, assim, a formação de profissionais mais qualificados no futuro.

Como continuidade da pesquisa será proposta, posteriormente, a elaboração de novas práticas de Probabilidade e Estatística com o intuito de observar algumas das aplicações na engenharia, de forma a despertar o interesse e contribuir para o aprendizado da disciplina. Dentre as aplicações pode-se citar: estimação dos parâmetros desconhecidos de um sistema, previsão de demanda de energia, modelos probabilísticos de vento, análise estatística de distúrbios de energia elétrica, análise estatística do erro da taxa de transmissão de dados, dentre outras.

2 REGRESSÃO LINEAR

A análise de regressão é a parte da estatística que investiga a relação entre duas ou mais variáveis relacionadas de maneira não-determinística (DEVORE, 1945).

Trata-se de uma técnica de modelagem usada para a análise da relação entre uma variável dependente (Y), e uma ou mais variáveis independentes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, objetivando a identificação de uma função que descreve, da maneira mais próxima possível, a relação entre essas variáveis, e, dessa forma, será possível determinar o valor que a variável dependente (Y) assumirá para determinados valores das variáveis independentes.

2.1 A Relação Linear

A relação matemática mais determinística mais simples entre duas variáveis x e y é a relação linear

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (1)$$

O primeiro passo na análise de regressão com duas variáveis é elaborar um gráfico de dispersão dos dados observados.

2.2 Regressão Linear Simples

A regressão linear simples constitui uma tentativa de estabelecer uma equação matemática linear (linha reta) que descreva a relação entre duas variáveis. Este modelo é utilizado quando existe uma relação linear entre a variável independente e a variável dependente (neste caso apenas uma). A função que expressa esse modelo será dada pela forma abaixo:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + \varepsilon \quad (2)$$

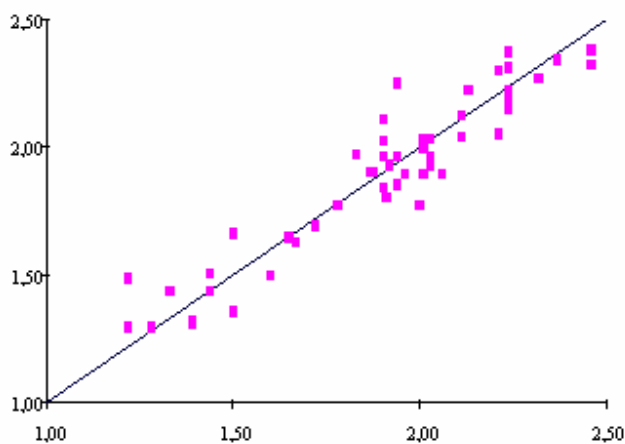


Figura 1 – Reta obtida com o uso do método da Regressão Linear Simples.

O gráfico da Figura 1 é uma representação da aplicação da Regressão Linear Simples. Verifica-se, observando o gráfico, que nem todos os pontos tocam a reta. Essa diferença é o erro (ε), que pode ter sido ocasionado por um erro de leitura dos dados.

Esses erros tendem a se anular, sendo assim:

$$\sum(\varepsilon_i) = 0 \quad (3)$$

Podemos determinar os coeficientes da função obtida através do Método dos Mínimos Quadrados.

2.3. Método dos Mínimos Quadrados

Uma vez escolhido o modelo de regressão, deve-se estimar seus coeficientes, no caso de uma função do primeiro grau descrita na Equação (2), deve-se deduzir os coeficientes b_0 e b_1 .

Tirando a média sobre a Equação (2), teremos:

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 \bar{X} \quad (4)$$

Pode-se observar a ausência da média dos erros. Isso fica explícito a partir da Equação (3), onde vemos que a soma dos erros tendem a se anular. Subtraindo a Equação (2) pela Equação (4), obtemos:

$$Y_i - \bar{Y} = (b_0 - b_0) + (b_1)(X_i - \bar{X}) + \varepsilon_i \quad (5)$$

Sendo assim, teremos então:

$$\varepsilon_i = y_i - b_1 x_i \quad (6)$$

Onde:

$$y_i = (Y_i - \bar{Y}) \quad (7)$$

$$x_i = (X_i - \bar{X}) \quad (8)$$

Fazendo a soma do quadrado dos erros, lembrando que b_1 é uma constante, teremos:

$$\sum (\varepsilon_i)^2 = \sum y_i^2 - 2b_1 \sum x_i y_i + b_1^2 \sum x_i^2 \quad (9)$$

Como o objetivo é estimar uma função que torne desprezíveis ou mínimos os erros, devemos então derivar a Equação (9) e igualar a zero.

$$0 = -2 \sum x_i y_i + 2\hat{b}_1 \sum x_i^2 \quad (10)$$

Porém, não é disponível o valor real, e sim uma amostra, portanto, o valor determinado é um estimador do verdadeiro valor da função, teremos então o estimador $\hat{b}_1$ tal que:

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (11)$$

e $\hat{b}_0$ será:

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \quad (12)$$

Portanto, os estimadores $\hat{b}_1$ e $\hat{b}_0$ foram calculados, e a função do primeiro grau da Equação (2) foi estimada.

2.3 Regressão Linear Múltipla

Na regressão múltipla, o objetivo é elaborar um modelo probabilístico que relacione uma variável dependente y a mais de uma variável independente ou de previsão (DEVORE, 1945).

O modelo matemático para esse caso é dado abaixo:

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + \dots + b_kX_{ki} + \varepsilon_i \quad (13)$$

2.4 Ajustamento de Curvas

Num diagrama de dispersão é possível, freqüentemente, visualizar uma curva regular que se aproxima dos dados. Essa curva é denominada de ajustamento.

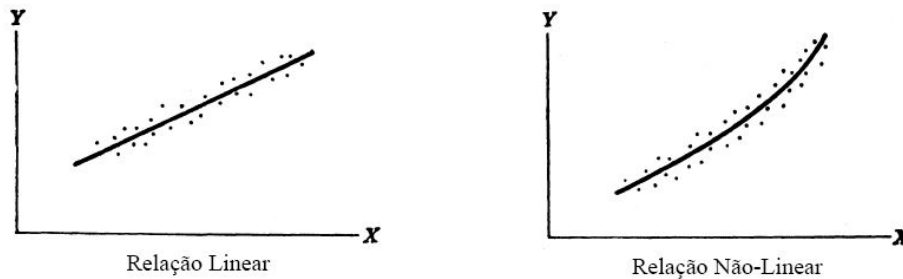


Figura 2 - Exemplos de Curvas em Diagramas de Dispersão.

O problema geral da determinação das equações de curvas que se acomodem a certos conjuntos de dados é denominado Ajustamento de Curvas.

Para fins de referência, relacionam-se abaixo alguns tipos de curvas de ajustamento e suas equações. Todas as letras, exceto X e Y , representam constantes. As letras X e Y referem-se, freqüentemente, a variáveis independentes e dependentes, respectivamente, embora esses papéis possam ser permutados.

$$Y = a_0 + a_1X \quad (14)$$

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 \quad (15)$$

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad (16)$$

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_nX^n \quad (17)$$

$$Y = \frac{1}{a_0 + a_1X} \quad (18)$$

$$Y = ab^X \quad (19)$$

$$Y = aX^b \quad (20)$$

$$Y = ab^X + g \quad (21)$$

$$Y = aX^b + g \quad (22)$$

Temos na sequência Equação (14) Linha Reta, Equação (15) Parábola ou Curva do 2º Grau, Equação (16) Curva do 3º Grau, Equação (17) Curva de Grau n , Equação (18) Hipérbole, Equação (19) Curva Exponencial, Equação (20) Curva Geométrica, Equação (21) Curva Exponencial Modificada e Equação (22) Curva Geométrica Modificada.

3 APLICAÇÕES: FILTRO PASSA ALTAS

Como proposta inicial, temos as práticas de estimação da função de saída dos filtros passa altas, passa baixas, passa faixa e rejeita faixa. Porém, vamos abordar neste artigo apenas a prática envolvendo a estimação da função de saída do filtro passa altas usando o método da regressão linear. Este filtro foi implantado em laboratório, e para isso, foi necessário o uso dos seguintes equipamentos em laboratório:

- Osciloscópio: Equipamento que plota em tempo real a curva da tensão mensurada.
- Gerador de Funções: Gera a Tensão de entrada desejada. Nesse caso, foi usada uma tensão senoidal.
- Resistor: Elemento passivo que dissipa energia quando possui uma corrente passando através deste.
- Capacitor: Elemento passivo que armazena energia em Campo Elétrico.
- Multímetro: Equipamento que mede diversas grandezas elétricas.
- Protoboard: Equipamento que tem a utilidade de permitir a simulação circuitos de baixa potência.

Filtros passa altas são filtros que eliminam as feições de baixa frequência, deixando apenas as de alta frequências (CRÓSTA,1992).

O seguinte circuito foi montado em protoboard:

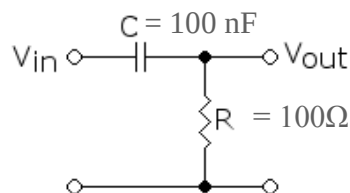


Figura 3 – Filtro Passa Altas.

A tensão V_{in} é uma tensão senóide dada por:

$$V_{in} = V_p \cdot \sin(2\pi f \cdot t) \quad (23)$$

Aplicando a tensão senóide de 10 V, ou seja, V_p (Tensão de pico na entrada do circuito) terá um valor de 10 V, variando apenas a frequência f da senóide de entrada, dada pela Equação (13), obtivemos os valores listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Tensões de Saída do Filtro Passa Altas, medidas através de Multímetro.

$f(\text{Hz})$	$V_{out}(\text{V})$	$f(\text{Hz})$	$V_{out}(\text{V})$
100	0,06	12000	5,73

200	0,12	13000	6,01
500	0,24	14000	6,32
1000	0,49	15000	6,43
2000	1,00	16000	6,81
3000	1,63	17000	7,03
4000	2,21	18000	7,09
5000	2,68	19000	7,25
6000	3,27	20000	7,49
7000	3,82	22500	7,63
8000	4,23	25000	7,92
9000	4,62	27500	8,03
10000	5,18	30000	8,27
11000	5,41		

Através desses dados, e usando um software de simulação matemática, obtivemos os valores para o ganho do filtro, dado pela Equação (11):

$$A_v = 20 \cdot \log(V_{\text{out}}/V_{\text{in}}) \quad (24)$$

Tabela 2 – Valores do ganho A_v do Filtro, em função dos valores de frequência.

f(Hz)	- A_v (dB)	f(Hz)	- A_v (dB)
100	-102,31	12000	-11,1
200	-88,45	13000	-10,2
500	-74,6	14000	-9,2
1000	-60,3	15000	-8,8
2000	-46,05	16000	-7,7
3000	-36,3	17000	-7,1
4000	-30,2	18000	-6,9
5000	-26,3	19000	-6,4
6000	-22,4	20000	-5,8
7000	-19,3	22500	-5,41
8000	-17,2	25000	-4,7
9000	-15,4	27500	-4,38
10000	-13,2	30000	-3,8
11000	-12,3		

A fim de obter um gráfico semelhante ao gráfico padrão do filtro passa-baixas, que pode ser observado na Figura 5, construiu-se, através de um software de simulação matemática, o gráfico do ganho A_v em função da frequência, com os valores da Tabela 2, e obteve-se o gráfico da Figura 4.

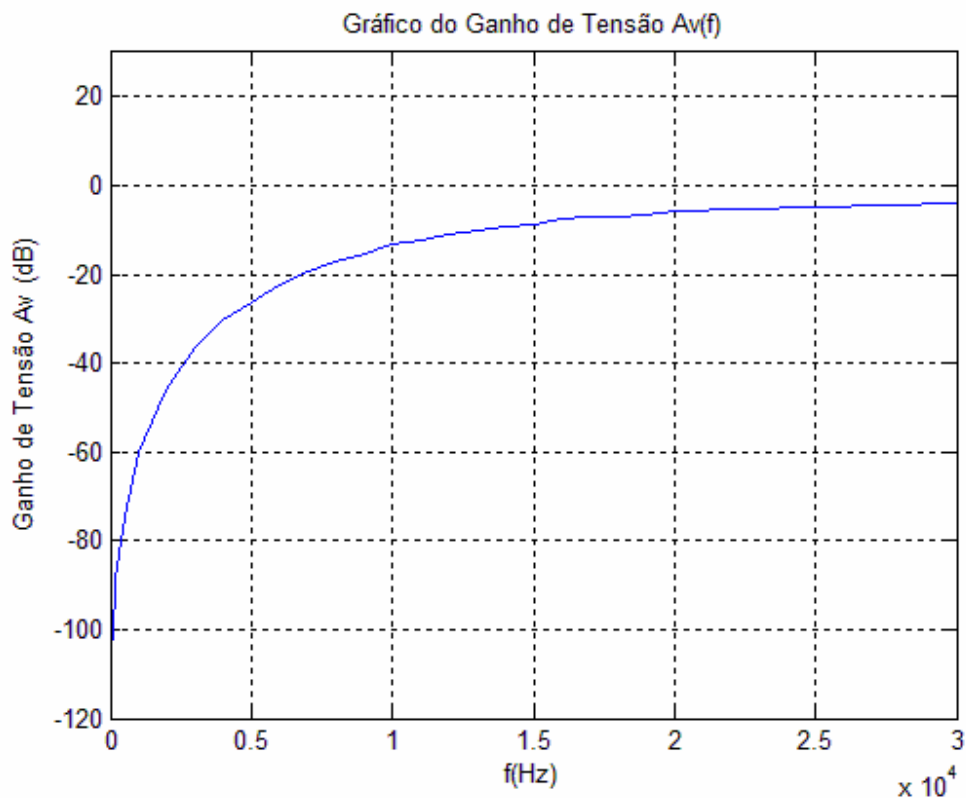


Figura 4 – Gráfico simulado em software de simulação matemática do ganho A_v em função da frequência.

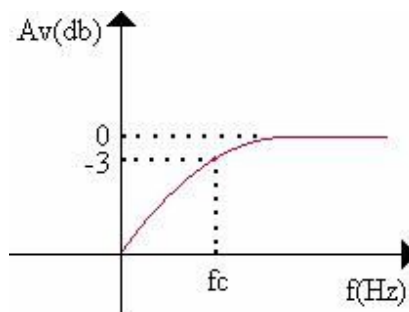


Figura 5 - Ganho de tensão em dB em função da frequência de um filtro passa alta qualquer.

Podemos observar que o gráfico da Figura 4 se aproxima bastante do gráfico da Figura 5. Podemos observar até mesmo que, semelhante ao gráfico da Figura 5, aproximadamente a partir de $A_v = -3$ dB, o gráfico obtido começa a declinar, ficando praticamente constante à medida que a frequência assume valores muito elevados.

Usando uma função contida no software que aproxima curvas, observou-se que o polinômio do grau 7 se ajustou de maneira bem aproximada ao gráfico da Figura 4.

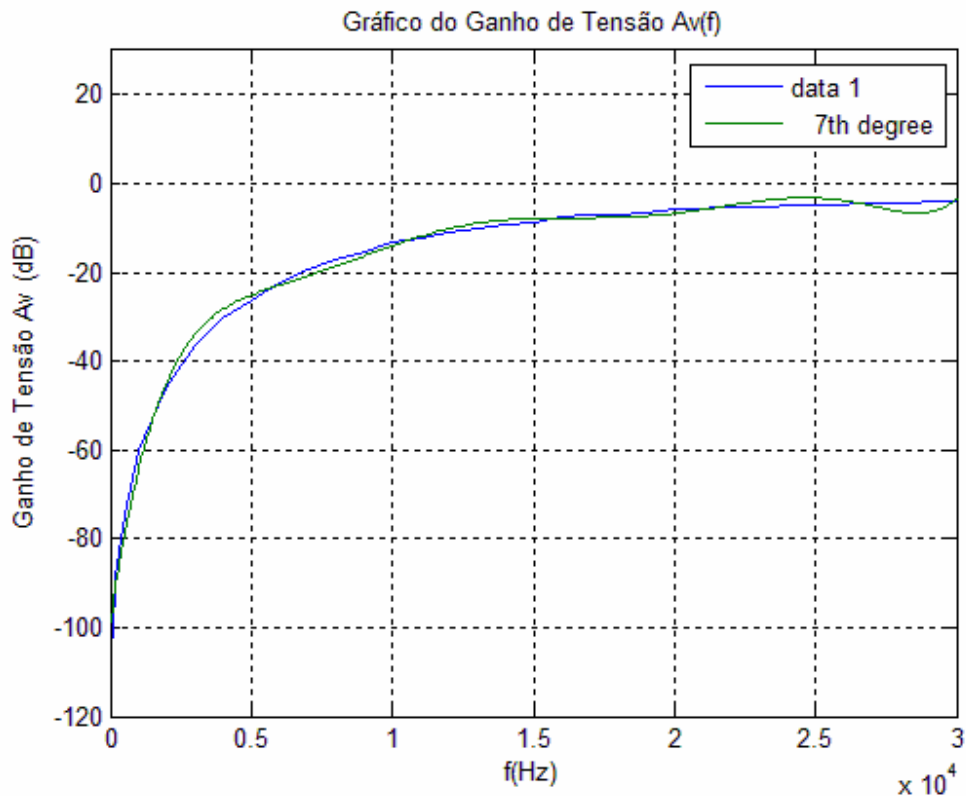


Figura 6 – Ajuste da Curva do Ganho de Tensão A_v , através de um polinômio do 7º Grau.

Calculou-se também o erro médio do ajuste, tomado pelo módulo da subtração de cada valor obtido experimentalmente com o valor obtido através do polinômio de grau 7. Sendo este dado por:

$$\hat{A}_v(f) = a_0 \cdot f^7 + a_1 \cdot f^6 + a_2 \cdot f^5 + a_3 \cdot f^4 + a_4 \cdot f^3 + a_5 \cdot f^2 + a_6 \cdot f + a_7 \quad (25)$$

sendo $a_0 = 9,6837 \times 10^{-28}$, $a_1 = -1,0946 \times 10^{-22}$, $a_2 = 4,9955 \times 10^{-18}$, $a_3 = -1,1815 \times 10^{-13}$, $a_4 = 1,5486 \times 10^{-9}$, $a_5 = -1,1244 \times 10^{-5}$, $a_6 = 0,04425$, $a_7 = -98,994$.

Após calculados os valores de A_v para cada valor de frequência da Tabela 1, e subtraídos, operação esta realizada em software de simulação matemática, obteve-se um erro médio de ajuste de curva de 0,291.

6. CONCLUSÃO

Através desta e de outras práticas, objetiva-se uma maior facilidade na compreensão e assimilação do conteúdo por parte dos estudantes. Como observado, na descrição teórica teríamos apenas equações e teorias, já com a introdução de práticas em laboratório, observou-se um incremento dos conteúdos com a introdução de assuntos focados na prática de tal forma que motivam alunos e professores a buscarem essa ferramenta como um bom auxílio no ensino.

Além da experiência na parte prática feita pelos alunos, práticas laboratoriais instigam os alunos a pensar sobre eventuais problemas ocasionados pelo meio, que causam uma divergência entre valores calculados a partir da teoria com os observados na prática, este fator, principalmente para um futuro engenheiro, é de grande importância, já que instiga desde cedo alunos a pensar na resolução de entraves, tarefa primordial para um engenheiro.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CRÓSTA, A. P. Processamento Digital de Imagens de Sensoriamento Remoto. Campinas: IG/UNICAMP, 1992. p. 83.

CUORE, R. E. As diferenças históricas entre probabilidade e estatística e sua abordagem no Ensino Superior. Disponível em: <<http://www.artigonal.com/educacao-artigos/as-diferencas-historicas-entre-probabilidade-e-estatistica-e-sua-abordagem-no-ensino-superior-945041.html>>. Acesso em: 08 abr. 2010.

DEVORE, J. L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências. São Paulo: Ed. Pioneira Thomson Learning, 2006.

SERRA, C. Análise de Regressão. Disponível em: <<http://www.uepa.br/prof/cmvserra/estatistica>>. Acesso em: 14 mai. 2010.

VIALI, L. Utilizando planilhas e simulação para modernizar o ensino de probabilidade e estatística para os cursos de Engenharia. Cobenge, 2001.

PROBABILITY AND STATISTICS LABORATORY IMPLEMENTATION PROPOSED APPLIED TO ELECTRICAL AND COMPUTATION ENGINEERING

Abstract: *The Probability and Statistics discipline is offered to Electrical and Computation Engineering courses, always getting high reproof levels. This happens, in almost all cases, by the lack available time to explore by a better form the many embraced content by the discipline and because of the natural difficulty that this contents cause in each student. A viable way to obtain a improvement as in the student's learning as in the content's transmission by the professor is the implementation of a Probability and Statistics Laboratory, that of a reduced form is a experience amount in that the knowledge learned in class can be observed in applications that are inside of range that embrace the engineering. The target is, trough this implementation, to obtain a better student's performance, and by this way, a shorter reproof's level and a bigger student's and professor's satisfaction.*

Key-words: *Probability and Statistics, Laboratory, Learning.*