

# UTILIZAÇÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA INVESTIGATIVA NAS AULAS DE CÁLCULO NUMÉRICO EM CURSOS DE ENGENHARIA

Yara P. B. Q. Guimarães – [yaralarrab@hotmail.com](mailto:yaralarrab@hotmail.com)

Dimas F. Miranda – [dimasfm48@yahoo.com.br](mailto:dimasfm48@yahoo.com.br)

PUC Minas

Belo Horizonte/MG

**Resumo:** Esta pesquisa objetivou observar as contribuições que a utilização de atividades investigativas poderia dar ao ensino de Cálculo Numérico, visando aliar a automatização com o entendimento e a compreensão do conteúdo de Cálculo, em geral. Iniciou-se em junho de 2009 e a coleta dos dados para análise finalizou-se em novembro do mesmo ano. Foi elaborada uma sequência didática (ZABALA, 2007), com caráter investigativo (PONTE, 2001). A organização da pesquisa aconteceu de acordo com a teoria da Engenharia Didática (PAIS, 2001). Os softwares de apoio foram o VCN, para exploração numérica, e o Geogebra, para visualização dinâmica gráfica. A atividade aqui apresentada explorou duas regiões, definidas por funções em intervalos específicos, cujo objetivo geral foi o de obter a área aproximada dessas regiões por meio de alguns métodos: Somas de Riemann, Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regras de Simpson. Autores como Barroso, Finney e Stewart foram suportes para estudos do conteúdo. Os sujeitos constituíram-se de alunos de um 3º (terceiro) período do curso de Engenharia de Produção da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas, em Belo Horizonte/MG. Frente aos objetivos estabelecidos e às teorias de base, foram registradas as observações, as análises e os resultados alcançados.

**Palavras-chave:** Atividades investigativas, Cálculo numérico, Ensino de cálculo, Integração numérica.

## 1. INTRODUÇÃO

Várias pesquisas apontam o fracasso da maioria dos alunos dos cursos de Ciências Exatas no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, em geral; e, particularmente, dos alunos que cursam as engenharias. Dada a grande importância desse conteúdo nessas áreas, percebe-se que muitos alunos sequer compreendem os objetivos desse estudo. O Cálculo Numérico trata numericamente tópicos de Cálculo Diferencial e Integral. No primeiro, frequentemente se dá ênfase à automatização, apenas; e, implicitamente, considera-se que a teoria do segundo é dominada pelo estudante. Mas, atualmente, isto nem sempre é a verdade. O professor de Cálculo Numérico, então, se vê impelido a reduzir o ensino da disciplina a uma simples automatização e a usar modelos muito restritos. Daí, as inquietações e as reflexões destes pesquisadores, professores de Cálculo Numérico (e também de Cálculo Diferencial e Integral), resultando na proposta geral desta pesquisa: buscar formas de trabalhar o ensino de Cálculo Numérico, de modo a contribuir para aliar automatização, entendimento e compreensão de conteúdos de Cálculo, em geral.

Nesse sentido, LACHINI (2001, p. 147) afirma que um dos objetivos do Cálculo é “habituá-lo o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade”. E, também, de

acordo com STEWART (2009, Prefácio), o aprendizado do Cálculo deve acontecer por meio da “Regra dos Quatro”, enfocando os pontos “geométrico, numérico, algébrico e verbal (ou descritivo)”. Baseando-se nessas idéias, a proposta geral foi refinada para: explorar conteúdos de Cálculo sob o ponto de vista numérico (através do software *VCN*) e geométrico (com o uso do software *Geogebra*), de modo que o diálogo ou interação se desse entre alunos e professores, alunos e alunos, alunos e conteúdos, como um ponto importante para concretizar o aprendizado.

Quanto ao uso do computador, essa ferramenta deve fazer parte da realidade do sistema educacional, uma vez que esta é uma realidade social, devido ao grande desenvolvimento tecnológico. Mas para que isso seja possível é necessário que as instituições de ensino se adaptem com laboratórios de informática, com número suficiente de computadores, que atendam à demanda e incentivem seu corpo docente a se preparar quanto à obtenção de conhecimentos.

Desse modo, esta é uma proposta didática voltada para o aprendizado dos alunos na disciplina de Cálculo Numérico, extensivo a Cálculo Diferencial e Integral, nas diversas engenharias e demais áreas de ciências exatas. Este modelo didático foi confeccionado segundo a organização proposta pela Sequência Didática (ZABALA, 2007), mas as questões têm o caráter de serem investigativas (PONTE, 2001). Os sujeitos que desenvolveram, durante um semestre, toda a seqüência de atividades eram estudantes universitários matriculados em turmas da área de ciências exatas. Para a atividade específica, aqui relatada, foram 43 (quarenta e três) alunos do 3º (terceiro) período do curso de Engenharia de Produção, da PUC Minas – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, da cidade de Belo Horizonte, MG.

O problema de pesquisa para esta atividade teve a seguinte formulação: quais contribuições podem ser observadas no processo ensino/aprendizagem, quando o conteúdo Integração Numérica é abordado através de atividades investigativas que utilizam a construção numérica proposta pelo software *VCN* e a visualização gráfica dinâmica do *Geogebra*?

Com isso, pretendeu-se alcançar os seguintes objetivos específicos com os alunos participantes:

- Compreender o que ocorre com as regiões estudadas, particularmente quanto ao valor de sua área, quando se utiliza as Somas de Riemann, com o uso do software *Geogebra*.
- Reconhecer que a área exata das regiões é um valor limite, aproximação das médias aritméticas entre as Somas Inferiores e Somas Superiores, exploradas com o uso do software *Geogebra*.
- Calcular a área das regiões propostas por meio da Regra dos Trapézios e da Primeira ou Segunda Regra de Simpson, explorando aproximações com o uso do software *VCN*.
- Comparar os resultados das regras anteriores e calcular a diferença percentual entre os valores obtidos, com o uso do software *VCN*, de modo a controlar os erros de aproximação.

Esses programas são gratuitos, sendo que o *Geogebra* ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) é um programa de geometria dinâmica que envolve recursos da Álgebra, Geometria e Cálculo; foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, na University of Salzburg, na cidade de Salzburg, Áustria. O *VCN – Virtual Cálculo Numérico*, que pode ser encontrado no endereço [www.matematica.pucminas.br](http://www.matematica.pucminas.br), é um programa voltado para o Cálculo Numérico, que foi desenvolvido por um grupo de professores do Departamento de Matemática e Estatística da PUC Minas, cidade de Belo Horizonte, MG, Brasil.

## **2. METODOLOGIA DA PESQUISA**

Inicialmente aconteceu um estudo teórico sobre os temas envolvidos: Integração Numérica, com referências em BARROSO (1987), FINNEY (2002) e STEWART (2009); a Engenharia Didática segundo PAIS (2001); Sequências Didáticas com base em ZABALA (2007); e Atividades Investigativas de acordo com PONTE (2001). Após a busca por sustentação teórica, a próxima etapa foi de elaboração das atividades, seguida pela aplicação aos sujeitos envolvidos.

O desenvolvimento das questões aconteceu como uma atividade cotidiana no momento em que o conteúdo estudado era Integração Numérica Simples. A atividade foi aplicada no laboratório de informática da instituição, que contava com 20 (vinte) computadores; a aplicação aconteceu, então, em dois momentos. O tempo para resolução das questões foi de aproximadamente 200 (duzentos) minutos para os dois grupos e a turma tinha carga horária prevista em Plano de Ensino para prática de laboratório.

## **3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM CARÁTER INVESTIGATIVO CONFECCIONADA A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA**

Considerando que os alunos sentem grande dificuldade ao lidar com a transição de uma matemática mais estática (educação básica) para a matemática mais dinâmica (ensino superior), admitiu-se a intenção de oferecer uma alternativa que pudesse servir como auxílio no enfrentamento desse problema. Através da sequência didática com foco em atividades investigativas, a construção do conhecimento pode acontecer de modo a possibilitar a experimentação, generalização, abstração e formação de significados (LINS e GIMENEZ, 2001).

Uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18). A investigação matemática é o momento de “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE, 2006, p. 13). Para que nenhuma etapa do aprendizado se perca, é preciso, com base nos estudos a partir de PONTE (2006) e ZABALA (2007), que a sequência didática com caráter investigativo seja elaborada a partir de uma organização que envolva os processos de:

- exploração e formulação de questões: quando deve acontecer a apresentação por parte do(a) professor(a) de uma situação problemática em relação a um tema.
- formação de conjecturas: momento em que pode acontecer o diálogo entre professor(a) e alunos, com a comparação entre os diferentes pontos de vista e a etapa de generalizações.
- testes e reformulação: essa é a etapa em que os alunos devem resolver exercícios de memorização – quando os alunos poderão colocar em prática o que foi firmado nas etapas anteriores. É também o momento de o professor protagonizar o fechamento das conclusões.
- justificação e avaliação: uma prova escrita (avaliativa ou não) deve ser aplicada aos alunos, e após corrigidas, o professor deve comunicar o resultado para a turma e fazer uma avaliação final do trabalho, levantando os principais pontos em que o aprendizado não aconteceu de forma satisfatória.

A Engenharia Didática é uma “forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática” (PAIS, 2001, p. 100). Esta pesquisa assumiu cada uma das etapas propostas pela Engenharia Didática:

- **Análise preliminar:** momento em que algumas dificuldades dos alunos foram levantadas durante o processo ensino-aprendizagem, especialmente com a noção de aproximação na passagem da matemática básica (estática) para a matemática superior (dinâmica).
- **Concepção e análise *a priori*:** estudo e análise de experiências didático-pedagógicas publicadas. Foram escolhidos para categorização o que é proposto pela Sequência Didática (ZABALA, 2007) e Atividades Investigativas (PONTE, 2001), com o uso dos softwares *VCN* e *Geogebra*.
- **Intervenção:** foi a etapa da confecção e aplicação das atividades, com correções necessárias, conforme Zabala e Ponte. Houve uma atenção especial com o comportamento e reações dos sujeitos envolvidos, com o registro dessas observações.
- **Análise *a posteriori*:** contém os indicadores de validação. Foi o momento em que os dados obtidos na etapa da execução do projeto (intervenção) foram analisados, de modo a possibilitar a avaliação final.

Importante destacar que, em uma pesquisa sistematizada a partir da Engenharia Didática, segundo PAIS (2001, p. 103) “a validação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa”.

A escolha do computador como ferramenta didática pode ser justificada pelo fato sobre o quanto ele pode contribuir com a experimentação tanto gráfica (*Geogebra*) quanto numérica (*VCN*). Conforme BORBA (2001, p. 34), “as novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física”.

Mas o uso do computador não deve ser considerado como único fim, pois a discussão entre o professor e os alunos é insubstituível. FROTA (2009) constatou que muitos estudantes precisam dialogar sobre o tema estudado para realmente assimilarem o conteúdo; nesse momento, o professor tem a possibilidade de acompanhar de perto o desenvolvimento de seus alunos.

#### 4. ORGANIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Como a primeira etapa da investigação matemática é a exploração e formulação de questões, elas foram elaboradas objetivando-se que os alunos alcançassem competências, conforme os objetivos estabelecidos.

Todas as questões deveriam ser resolvidas por meio dos softwares *Geogebra* e *VCN*. As respostas eram discutidas e/ou confirmadas com o pesquisador, durante a resolução. A discussão com os próprios colegas era intensa, servindo para sanar dúvidas e/ou confirmar resultados, bem como para levantar novas questões. A experimentação foi o grande destaque deste modelo didático, pois os alunos faziam experiências com as regiões estudadas, observando o comportamento gráfico e o numérico, através de várias transformações.

Após a aplicação das atividades, a professora discutiu o conteúdo em sala de aula com a turma, protagonizando o fechamento do assunto; esta foi a etapa da *justificação e avaliação*. Para isso, definiu os principais conceitos, fez uma revisão dos métodos estudados com a atividade e resolveu alguns exercícios no quadro (inclusive as situações propostas na

investigação, mas com um novo enfoque). Neste momento, todos puderam empregar as idéias obtidas com os programas, melhor assimilando os conteúdos.

Uma das questões pedia que os alunos comparassem os resultados obtidos entre os métodos empregados: Somas de Riemann, Regra dos Trapézios, Primeira e/ou Segunda Regras de Simpson, experimentando sucessivos passos ou incrementos da variável  $x$ , e ainda calculassem a diferença percentual considerando como valor exato o que foi encontrado através das Somas de Riemann. Com isso, foi possível montar a seguinte tabela para efeito de análise:

**Tabela 1: integração numérica da função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$  com  $-2 \leq x \leq 1$ .**

Fórmula	Valor da Integral	Erro absoluto	Erro relativo (%)
Somas de Riemann	1,41	-	-
Regra dos Trapézios	1,39480	0,02	1,42
Primeira Regra de Simpson	1,40461	0,005389	0,38
Segunda Regra de Simpson	1,41289	0,00289	0,20

Fonte: dados da pesquisa.

Os alunos ainda fizeram uma prova escrita, em que o conteúdo estudado nas atividades era cobrado. Depois de corrigidas, a professora devolveu as provas para os alunos, resolvendo cada questão no quadro, e todos discutiram os resultados: alguns tiveram a certeza de ter aprendido o conteúdo e outros, que erraram as questões sobre o assunto, puderam esclarecer suas dúvidas.

Após a aplicação da seqüência, esta pesquisadora finalizou o projeto com a etapa da análise *a posteriori*, quando as informações registradas durante a execução do modelo didático foram estudadas. Os registros para essa pesquisa foram feitos com base na observação dos alunos, enquanto resolviam as questões, principalmente no momento das discussões, além das resoluções das próprias questões.

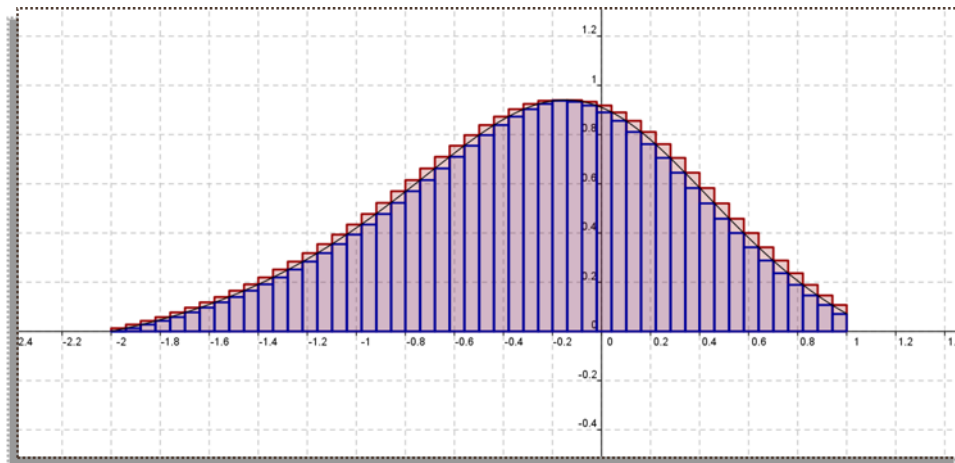
## 5. PRINCIPAIS RESULTADOS

A visualização gráfica e as interpretações dos dados numéricos (principalmente por meio do tabelamento das funções) foram os elementos principais na experimentação. Nesse sentido, percebeu-se a aquisição de aprendizado do conteúdo pelos sujeitos participantes.

A Figura 1 ilustra um exemplo da experimentação vivenciada pelos alunos na Questão 1, que explorou a área sob a curva

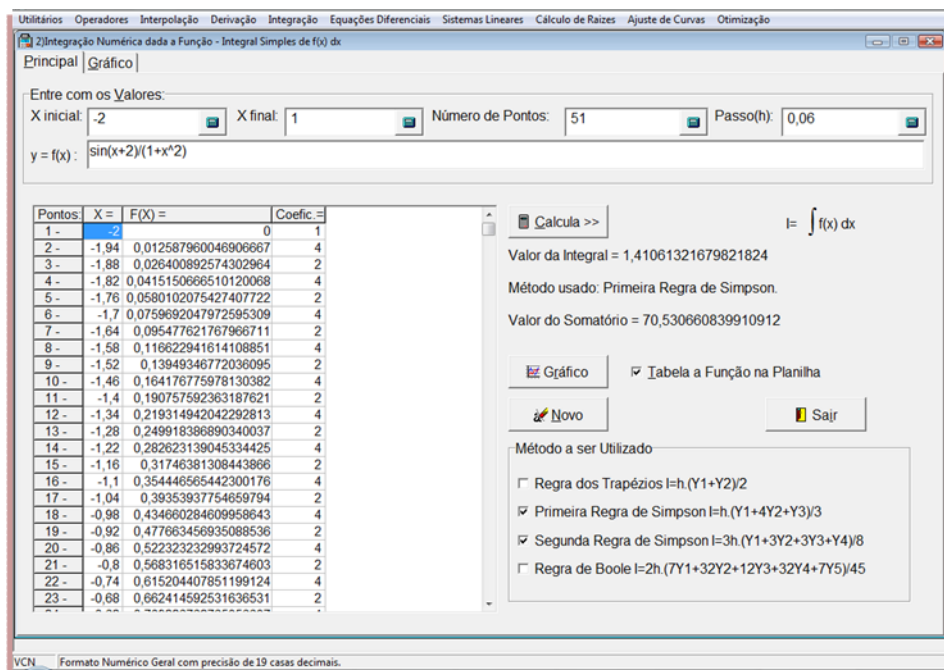
$$f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

por meio do cálculo das Somas de Riemann (com o uso dos comandos Soma Inferior e Soma Superior) com o Geogebra. A experimentação nesse caso aconteceu através da variação do valor de  $n$ , que o programa chama de *número de retângulos*.



**Figura 1: uso dos comandos Soma Inferior e Soma Superior com Equação (1), sendo  $n = 50$ .**

De acordo com a Figura 1, em que o número de retângulos foi 50 (cinquenta), os resultados encontrados foram 1,36 (um inteiro e trinta e seis centésimos) e 1,46 (um inteiro e quarenta e seis centésimos), cuja média é 1,41 (um inteiro e quarenta e um centésimos). A experimentação numérica aconteceu por meio do programa VCN, com o uso dos comandos Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regras de Simpson, quando o número de pontos (bem como o passo  $h$ ) deveria ser alterado pelo aluno, registrando em uma tabela os resultados encontrados. A Figura 2 mostra a tela final de um aluno ainda para a região definida pela Equação (1), mas correspondendo a outra pergunta:



**Figura 2: uso do comando “Integração - Simples Dada a Função”.**

De acordo com a Figura 2, os métodos escolhidos foram Primeira e Segunda Regras de Simpson, com 51 pontos, de modo que a condição para uso indica que a Primeira Regra deve ser utilizada. O VCN trabalha com uma precisão de 19 casas decimais e considerando a

resposta com 5 (cinco) casas decimais, a área sob a curva foi igual a 1,41061; é possível perceber que há uma boa aproximação entre os resultados com o software *Geogebra* e o VCN. A Figura 3 mostra um exemplo de registro de um dos alunos para tais explorações:

h.)

m	Soma inferior	Soma superior
50	1,36	1,46
100	1,38	1,44
150	1,39	1,43
200	1,40	1,42
250	1,40	1,42
300	1,40	1,42
500	1,41	1,42
1000	1,41	1,41
10000	1,41	1,41

m = número de retângulos

i) Ela demonstra que a medida em que se aumenta o número de retângulos os valores das somas se aproximam.

j) 1,41

k) 1,410610  
 Foi colocado o valor  $x_{inicial} = -2$  e  $x_{final} = 1$  e para o número de pontos selecionamos 500, pois foi o número de retângulos para os quais obtive-se resultados de área próximos no Geogebra.

l) 2ª Regra e utilizamos número de pontos igual a 1000 que nos deu um espaçamento múltiplo de 3, sendo os valores de  $x$  os mesmos da letra k e foi encontrado para a área o valor de 1,410613

m)  $Ea = 1,410613 - 1,410610$   
 $Ea = 0,000003$   
 $E\% = \frac{0,000003}{1,410613} \cdot 100\% = 0,00021\%$

**Figura 3: resolução do aluno A para a Questão 1.**

O aluno A construiu uma tabela com diferentes valores de  $n$  (número de retângulos), para a obtenção das Somas Superiores e também das Somas Inferiores, e relacionou os resultados encontrados entre os dois programas, no momento em que escolheu  $n = 500$  para cálculo da área pela Regra dos Trapézios, pois “obteve-se resultados de área próximos no Geogebra” (fala do aluno).

- Estas atividades proporcionaram à professora e aos alunos ótimos momentos de aprendizado. Os alunos adquiriram mais autoconfiança, interesse em aprender e autonomia. Este foi um momento em que foi confirmada a fala de Lachini, sobre o fato de professor e alunos se tornarem “construtores e re-construtores do conhecimento” (LACHINI, 2001, p. 180).
- O computador de fato atuou como importante ferramenta no que diz respeito à experimentação para os alunos.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos, a proposta didática contribuiu para o desenvolvimento da autonomia e da expressão oral nos sujeitos envolvidos, quando as limitações de cada estudante eram respeitadas, pois através de investigações, os alunos observaram a tendência dos valores encontrados para a área das regiões; nesse sentido, o trabalho feito com os softwares permitiu que os estudantes sentissem liberdade para discutir as questões, expondo suas opiniões e conclusões e, como eram necessárias muita leitura e interpretação, puderam agir de forma independente e com tranquilidade.

Como o diálogo foi um ponto forte da experimentação metodológica, o trabalho em grupo foi uma consequência. Os estudantes prestavam atenção aos questionamentos dos colegas à professora e expunham suas opiniões, demonstrando o quanto estavam pensando nos resultados encontrados.

Através das transformações realizadas com os softwares *VCN* e *Geogebra*, por meio da observação numérica e gráfica, pôde ser observado que o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo realizou-se no momento em que aconteceu a generalização, seguida da abstração e, enfim, a produção de significados (LINS e GIMENEZ, 2001).

Com relação ao conteúdo Integração Numérica Simples do Cálculo Numérico, a automatização foi suavizada no momento em que os estudantes puderam compreender os significados do Cálculo Integral através das atividades investigativas. Uma vez que o aprendizado do conteúdo proposto não alcançou 100% dos alunos, foi constatado que os objetivos específicos foram alcançados parcialmente; para os alunos que não compreenderam a ideia pretendida, outras alternativas didáticas foram necessárias, como uma discussão mais ampliada do tema com a resolução de um maior número de questões em sala de aula. De qualquer modo, o ensino/aprendizagem do conteúdo proposto por meio das atividades investigativas se mostrou viável para a turma em questão, uma vez que, em geral, os estudantes gostaram das experiências vivenciadas e conseguiram aliar o que foi realizado no computador com outras situações apresentadas em exercícios de memorização.

Desse modo, através dessa experimentação metodológica, o uso de atividades investigativas em Cálculo Numérico pode ser uma alternativa didática para docentes que lecionam a disciplina, atuando como auxiliar no ensino/aprendizagem da introdução do conteúdo (neste caso, com relação à Integração Numérica Simples) com vistas a possibilitar que a disciplina não aconteça somente de forma automatizada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, L. C. [et al]. **Cálculo numérico com aplicações**. 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987. 367 p.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 98 p.

FINNEY, R. L. **Cálculo de George B Thomas Jr**. Volume 1. 10 ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002. 660 p.

LACHINI, J. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo**. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. 190 p.



LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001. 176 p.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 126 p.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 151 p.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume 1. 6 ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2009. 631 p.

## USE THE FOLLOWING TEACHING INVESTIGATOR CLASSES IN NUMERICAL CALCULATION OF ENGINEERING COURSES

**Abstract:** *This research aimed to observe the contributions that the use of investigative activities could give to the teaching of Numerical Methods. The study combined automation with the understanding and comprehension of the content of Calculus in general. It began in June 2009 and data collection ended in November of that year. We developed a didactic sequence (ZABALA, 2007) with investigative purposes (PONTE, 2001). The research was organized according to the theory of the Engineering Curriculum (PAIS, 2001). The VCN software was used for numerical exploration and the GeoGebra software for the display of dynamic graphics. The present study explored two regions, defined by functions at specific intervals, whose general objective was to obtain the approximate area of these regions by means of certain methods: Riemann Sums, the Trapezoidal Rule, First and Second Simpson's Rules. Authors such as Barroso, Finney and Stewart were used as the base for content analyses. The subjects consisted of students from the third semester of the Production Engineering at the Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas, Belo Horizonte, MG. Given our stated objectives and theories, observations were recorded, and the analysis and results achieved.*

**Keywords:** *Investigative activities, Numerical methods, Teaching of calculus, Numerical integration.*