



## COMPARAÇÃO DIDÁTICA ENTRE AS FORMULAÇÕES NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA DA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

**Rodrigo Silveira Camargo** - rodrigo\_camargo2000@yahoo.com

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

Centro de Tecnologia, Bloco B, sala 101

Cidade Universitária

CEP 21945-970 – Rio de Janeiro - RJ

**Walnório Graça Ferreira** – walnorio@pesquisador.cnpq.br

**Adenílcia Fernanda Calenzani** – fernanda.calenzani@ig.com.br

**Augusto Badke Neto** - augbadke@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Departamento de Engenharia Civil

Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras

CEP 20075-910 – Vitória - ES

**Francisco de Assis das Neves** – fassis@em.ufop.br

**Ricardo Azoubel da Mota Silveira** - ricardo@em.ufop.br

**Andréa Regina Dias da Silva** - andreadiassilva@yahoo.com.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Engenharia Civil

Campus Morro do Cruzeiro

CEP 35400-000, Ouro Preto - MG

**Resumo:** *As respostas de sistemas estruturais sujeitos a cargas dinâmicas são tradicionalmente avaliadas no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Métodos de soluções baseados no domínio da frequência têm sido desenvolvidos nos últimos anos. A escolha do método depende das propriedades físicas do sistema estrutural. Naqueles casos com propriedades físicas dependentes da frequência ou dotados de amortecimento histerético, a análise no domínio da frequência é mais adequada. Embora os métodos que envolvem o domínio do tempo sejam facilmente assimilados pelos estudantes de engenharia, o mesmo não acontece com os métodos relacionados ao domínio da frequência, especialmente para os estudantes de engenharia civil. O objetivo desse estudo é apresentar uma comparação didática entre esses dois importantes métodos para a solução de sistemas estruturais submetidos a cargas dinâmicas, para tornar mais fácil o aprendizado pelos estudantes de engenharia civil e mecânica.*

**Palavras-chave:** *Análise no domínio do tempo, Análise no domínio da frequência, Integral de convolução, Transformada de Fourier, Análise comparativa*



## 1 INTRODUÇÃO

A resposta de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas pode ser calculada basicamente por duas maneiras: resolvendo-se a equação do movimento no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Quando o sistema possui parâmetros dependentes da frequência, o procedimento no domínio da frequência é o mais indicado. Como exemplo, pode ser citado o caso dos sistemas de interação solo-estrutura nos quais as forças de rigidez e de amortecimento são dependentes da frequência.

A análise no domínio da frequência se tornou de uso corrente, somente após o surgimento do algoritmo da FFT (Fast Fourier Transform), desenvolvido por COOLEY e TUKEY (1965), pois reduziu substancialmente o esforço computacional na avaliação da DFT (Discret Fourier Transform), tornando-a competitiva com os métodos do domínio do tempo. Desde essa época, os métodos da frequência vêm recebendo importantes contribuições na busca de sua eficiência. A edição mais recente do livro de CLOUGH e PENZIEN, 1993 há um tratamento detalhado de análise no domínio da frequência.

Embora os métodos que envolvem o domínio do tempo sejam facilmente assimilados pelos estudantes de engenharia, o mesmo não acontece com os métodos relacionados ao domínio da frequência, especialmente para os estudantes de engenharia civil. O objetivo desse estudo é apresentar uma comparação didática entre esses dois importantes métodos para a solução de sistemas estruturais submetidos a cargas dinâmicas, para tornar mais fácil o aprendizado pelos estudantes de engenharia civil e mecânica.

## 2 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Seja um sistema massa-mola com um grau de liberdade, submetido a um carregamento  $p(t)$ , como mostrado na Figura 1. A equação do movimento vem da resultante das forças que atuam na massa, que são o próprio carregamento, a força de amortecimento viscoso (proporcional e com sentido contrário ao da velocidade da massa), e a força elástica da mola (proporcional e com sentido contrário ao do deslocamento em relação à posição de equilíbrio). Se  $v(t)$  é o deslocamento no instante  $t$ ,  $m$  é a massa,  $c$  é o coeficiente de amortecimento,  $k$  é a constante elástica da mola e  $p(t)$  é o carregamento no instante  $t$ , então a força resultante é:

$$\sum F = m \ddot{v}(t) = p(t) - c \dot{v}(t) - k v(t) \quad (1)$$

ou:

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (2)$$

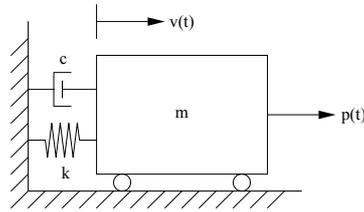


Figura 1 - Representação de um Sistema Massa-Mola com Amortecimento.

### 3 RESPOSTA PERMANENTE A UMA CARGA HARMÔNICA

#### 3.1 Domínio do Tempo

A equação do movimento é uma equação diferencial, e sua solução depende do carregamento  $p(t)$ . Obtendo-se as soluções para os casos de carregamento senoidal e cossenoidal, encontra-se a solução geral para carregamento harmônico (isto é, uma combinação linear de seno e cosseno com mesma frequência). Assim, definindo a frequência natural do sistema como  $\omega = \sqrt{k/m}$  e a taxa de amortecimento como  $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ , é possível reescrever a equação do movimento da seguinte forma:

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega \dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (3)$$

Adotando o carregamento  $p(t) = b \sin \bar{\omega}t$  de frequência angular  $\bar{\omega}$  e definindo  $\beta = \bar{\omega} / \omega$ , chega-se na equação do movimento, que é dada por:

$$v(t) = \frac{b}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \left[ (1 - \beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t \right] \quad (4)$$

Da mesma forma, para um carregamento  $p(t) = a \cos \bar{\omega}t$ , a solução é:

$$v(t) = \frac{a}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \left[ 2\xi\beta \sin \bar{\omega}t + (1 - \beta^2) \cos \bar{\omega}t \right] \quad (5)$$

E, finalmente, quando as duas cargas atuam simultaneamente, a solução geral é:

$$v(t) = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \left\{ [b(1 - \beta^2) + 2a\xi\beta] \sin \bar{\omega}t + [a(1 - \beta^2) - 2b\xi\beta] \cos \bar{\omega}t \right\} \quad (6)$$



### 3.2 Domínio da Frequência

Pode-se tirar proveito das propriedades periódicas da função exponencial complexa (FERREIRA et al., 2007) e aplicar uma “carga complexa”  $p(t) = be^{i\bar{\omega}t}$ . Assim, a equação do movimento fica:

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \frac{b}{m} e^{i\bar{\omega}t} \quad (7)$$

cuja solução é:

$$v(t) = G(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} \quad (8)$$

em que:

$$G(\bar{\omega}) = \frac{b}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2\xi\beta)} \right] = \frac{b}{k} \left[ \frac{(1 - \beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] \quad (9)$$

Essa resposta mostrou-se ser mais simples, visto que apresenta um único termo. No domínio do tempo, há os termos em seno e cosseno.

## 4 RESPOSTA A UMA CARGA PERIÓDICA QUALQUER

### 4.1 Domínio do Tempo

Um carregamento periódico qualquer (isto é, não necessariamente harmônico) pode ser expresso na forma de uma série de Fourier:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t \quad (10)$$

com:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt \end{aligned} \quad (11)$$

A resposta do sistema a esse carregamento é dada por:



$$v(t) = \frac{1}{k} \left( a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \right] \{ [b_n(1 - \beta_n^2) + 2a_n\xi\beta_n] \sin \bar{\omega}t + [a(1 - \beta^2) - 2b\xi\beta] \cos \bar{\omega}t \} \right) \quad (12)$$

## 4.2 Domínio da Frequência

Também é possível expressar o carregamento como uma série de Fourier complexa, da seguinte forma:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (13)$$

com:

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{i\bar{\omega}_n t} dt \quad (14)$$

Nesse caso, encontra-se a resposta a cada componente da série, que valerá:

$$v_n(t) = H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (15)$$

Sendo  $v_n(t)$  complexo, significando um vetor real girando no plano complexo.  $H_n$  é definido a seguir:

$$H_n = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta_n^2) + i(2\xi\beta_n)} \right] = \frac{1}{k} \left[ \frac{(1 - \beta_n^2) - i(2\xi\beta_n)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \right] \quad (16)$$

A resposta final valerá:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (17)$$

Sendo  $v(t)$  agora real, em virtude da presença de pares conjugados.

## 5 RESPOSTA A CARGA GERAL

### 5.1 Domínio do Tempo

Seja a carga geral mostrada na Figura 2 a seguir:

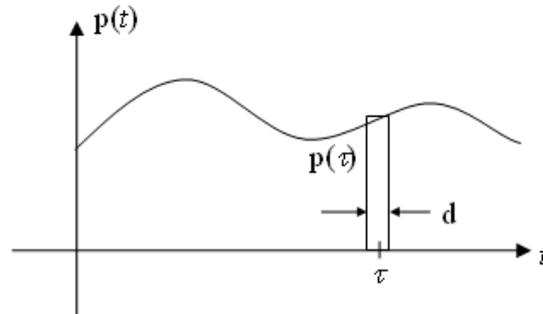


Figura 2 - Carga Diferencial Impulsiva de um Carregamento Geral.

Baseado na resposta aproximada a uma carga impulsiva  $p(\tau)d\tau$ , pode-se chegar à resposta a esse carregamento, que será:

$$v(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (18)$$

Esta integral é uma integral de convolução (BRIGHAM, 1974), e a função  $h(t-\tau)$  é a resposta de impulso unitário, definida por:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_0} \text{sen } \omega_D(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} \quad (19)$$

em que:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (20)$$

é a frequência amortecida do sistema massa-mola.

## 5.2 Domínio da Frequência

Fazendo-se uso da transformada de Fourier e aplicando-a na equação do movimento, resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m\ddot{v} + c\dot{v} + kv)e^{-i\bar{\omega}t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (21)$$

ou:

$$(-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k)V(\bar{\omega}) = P(\bar{\omega}) \quad (22)$$

com:



$$V(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (23)$$

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt$$

Vê-se que a diferença com relação à carga complexa é que agora os limites da integral são  $-\infty$  e  $\infty$ . Continuando, fica:

$$V(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega})P(\bar{\omega}) \quad (24)$$

em que:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2\xi\beta)} \right] \quad (25)$$

Após o cálculo de  $V(\bar{\omega})$ , a resposta no tempo valerá:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega})P(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \quad (26)$$

## 6 SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Em sistemas com múltiplos graus de liberdade, a equação do movimento, que rege o deslocamento das múltiplas partes da estrutura, é na verdade uma equação matricial, equivalente à equação do movimento para sistemas com um grau de liberdade, dada por:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (27)$$

sendo  $\mathbf{m}$  a matriz de massa,  $\mathbf{c}$  a matriz de amortecimento,  $\mathbf{k}$  a matriz de rigidez, todas de ordem  $N \times N$ , e  $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  vetores  $N \times 1$ .

O sistema terá também múltiplas frequências naturais de vibração, que são denominadas:

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N\} \quad (28)$$

Essas frequências são os autovalores de um sistema de equações lineares cuja equação característica é:

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0 \quad (29)$$

Os autovetores correspondentes são os modos de vibração:



$$\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_3, \dots, \hat{\mathbf{v}}_N\} \quad (30)$$

Esses autovetores possuem as seguintes propriedades, para  $r \neq s$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \\ \hat{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Ambas as propriedades são na verdade aplicações da definição generalizada de produto interno entre  $\hat{\mathbf{v}}_r$  e  $\hat{\mathbf{v}}_s$ . Portanto, diz-se que modos de vibração diferentes são perpendiculares entre si, tanto com relação à matriz de massa, quanto com relação à matriz de rigidez (CAMARGO, 2008).

Além disso, para um mesmo modo de vibração, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_n &= M_n \\ \hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{v}}_n &= K_n \end{aligned} \quad (32)$$

Os valores  $M_n$  e  $K_n$  são chamados, respectivamente, de massa generalizada e rigidez generalizada.

Quando se define o conjunto de vetores de modo  $\boldsymbol{\Phi}_n = \frac{\hat{\mathbf{v}}_n}{\sqrt{M_n}}$ , diz-se que são ortonormalizados em relação à matriz de massa, pois além de ortogonais em relação à mesma, tem-se que  $\hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_n = 1$ .

Usando-se os vetores de modo como colunas de uma matriz quadrada, forma-se a matriz de modo  $\boldsymbol{\Phi}$  :

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\boldsymbol{\Phi}_1 \quad \boldsymbol{\Phi}_2 \quad \boldsymbol{\Phi}_3 \quad \dots \quad \boldsymbol{\Phi}_N\} \quad (33)$$

## 6.1 Desacoplamento das Equações do Movimento pelo Método da Superposição Modal

Os vetores de modo são definidos a partir dos autovetores do sistema, e, por isso, são linearmente independentes. Esse fato permite que sejam usados para gerar qualquer vetor  $\mathbf{v}$ , através da combinação linear:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Phi}_1 Y_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 Y_2 + \boldsymbol{\Phi}_3 Y_3 + \dots + \boldsymbol{\Phi}_N Y_N = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Phi}_n Y_n \quad (34)$$

ou, matricialmente:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Y} \quad (35)$$



sendo  $\mathbf{Y}$  um vetor que contém os coeficientes  $Y_n$ , que são chamados coordenadas modais. Fazendo a substituição de  $\mathbf{v}$  assim expressado na equação do movimento para sistemas com múltiplos graus de liberdade, fica:

$$\mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{k}\Phi\mathbf{Y}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (36)$$

que, pré-multiplicada por  $\Phi_n$ , fica:

$$\varphi_n \mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \varphi_n \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{Y}}(t) + \varphi_n \mathbf{k}\Phi\mathbf{Y}(t) = \varphi_n \mathbf{p}(t) \quad (37)$$

Devido às propriedades já apresentadas de ortogonalidade em relação à matrizes de massa e rigidez, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + C_n \dot{Y}_n(t) + K_n Y_n(t) = p_n(t) \quad (38)$$

Desde que  $\mathbf{c}$  seja adotada proporcional às matrizes de massa e rigidez (amortecimento de Rayleigh).

Desse modo, o sistema de equações fica desacoplado e o sistema estrutural de  $N$  graus de liberdade com  $N$  equações, em coordenadas físicas, é transformado em  $N$  equações de um grau de liberdade, em coordenadas modais (CLOUGH e PENZIEN, 1993). Ao se achar a solução de cada equação de um grau de liberdade (isto é, cada  $Y_n$ ), a solução geral do sistema em coordenadas físicas valerá:

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N \Phi_n Y_n \quad (39)$$

### ***Solução no Domínio do Tempo***

A solução de cada uma das  $N$  equações em coordenadas modais, quando feita no domínio do tempo, através de uma integral de convolução, é:

$$Y_n = \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t p_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen } \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad (40)$$

### ***Solução no Domínio da Frequência***

Aplicando a transformada de Fourier a cada uma das equações em coordenadas modais, estas são passadas para o domínio da frequência, resultando em:

$$V_n(\bar{\omega}) = H_n(\bar{\omega}) P_n(\bar{\omega}) \quad (41)$$

em que:



$$\begin{aligned}
 H_n(\bar{\omega}) &= \frac{1}{\omega_n^2 M_n} \left[ \frac{1}{(1 - \beta_n^2) + i(2\xi_n \beta_n)} \right] = \\
 &= \frac{1}{\omega_n^2 M_n} \left[ \frac{(1 - \beta_n^2) - i(2\xi_n \beta_n)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi_n \beta_n)^2} \right] \quad (42) \\
 P_n(\bar{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a transformada inversa de Fourier, cada resposta final vale:

$$Y_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_n(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \quad (43)$$

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresenta uma abordagem comparativa entre os procedimentos de solução das equações do movimento no tempo e na frequência para sistemas estruturais submetidos a cargas dinâmicas. O principal objetivo foi pedagógico, no sentido de apresentar as soluções das equações de movimento em uma interessante sequência, primeiramente apresentando-as no domínio do tempo, para em seguida, no domínio da frequência. A abordagem torna as vantagens de se resolver as equações no domínio da frequência bastante claras, pois as equações diferenciais se tornam algébricas e suas soluções são obtidas com operações numéricas simples, com a única diferença de envolver números complexos, que podem ser manipulados da mesma maneira que os números reais.

### *Agradecimentos*

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES, FAPES e FAPEMIG pelo apoio recebido para a realização deste trabalho.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIGHAM, E. O. **The fast Fourier transform**, Prentice-Hall, 1974.

CAMARGO, R. S. **Técnicas eficientes de correção de erros na análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência**, 2008, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Espírito Santo.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. **Dynamics of structures**, New York, 2a. edição, McGraw-Hill, (1993).

COOLEY, J.W, TUKEY, J.M. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, **Mathematical Computations**, vol. 19, p. 297-301, (1965).



FERREIRA, W. G.; CAMARGO, R. S.; FRASSON, A.; MANSUR, W. J. O número complexo e seu uso na engenharia estrutural, XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, **Anais...** Curitiba, 2007.

## **DIDACTIC COMPARISON BETWEEN TIME AND FREQUENCY DOMAIN FORMULATIONS OF DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURES**

***Abstract:** The response of structural systems subjected to dynamic loads can traditionally be evaluated in time domain or in frequency domain. Solution methods based in frequency domain have been in development in recent years. The choice of the method depends on the physical properties of the system. In those with frequency-dependent physical properties or with hysteretic damping, frequency domain analysis is recommended. Although time domain methods are easily assimilated by engineering students, the same does not happen to frequency domain methods, especially to civil engineering students. The goal of this article is to introduce a didactic comparison between these two important methods to the solution of structural systems subjected to dynamic loads, in order to make it easier for civil and mechanical engineering students to learn this subject.*

***Key-words:** first Time domain analysis, Frequency domain analysis, Convolution integral, Fourier transform, Comparative analysis.*