A IMPORTÂNCIA DE REFLETIR ACERCA DA MULTIVARIAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA A ENGENHARIA

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2024.5089

Autores: *GABRIEL LOUREIRO DE LIMA, ELOIZA GOMES, BARBARA LUTAIF BIANCHINI, JULIANA MARTINS PHILOT*

Resumo: *Nossas experiências na utilização de problemas contextualizados no ensino e na aprendizagem da Matemática para ingressantes na Engenharia, têm evidenciado que as principais dificuldades por eles enfrentadas estão relacionadas a identificar, em uma relação funcional entre grandezas, quais são as variáveis, quais são as constantes e que, na maioria das vezes, esta identificação depende do que se tem por objetivo estudar. Investigando sobre o pensamento variacional, nos deparamos com as ideias de multivariação independente, dependente e agrupada e com a noção de raciocínio multivariacional. Conjecturamos, então, que é possível que algumas das dificuldades manifestadas por nossos estudantes ao trabalharem com a Matemática a partir situações contextualizadas na Engenharia, podem ser decorrentes de suas poucas familiaridades com fenômenos nos quais a percepção da multivariação, em seus diferentes tipos, é um elemento central. Neste artigo, apresentamos reflexões teóricas e exemplificações a respeito deste tópico, das ações mentais necessárias para compreendê-lo e como o professor pode explorá-lo no estudo de função na Matemática.*

Palavras-chave: *matemática, função, multivariação, contextualização.*

A IMPORTÂNCIA DE REFLETIR ACERCA DA MULTIVARIAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA A ENGENHARIA

1 INTRODUÇÃO

Desde a edição de 2018 do COBENGE temos apresentado reflexões decorrentes de abordagens da Matemática a partir de contextos específicos da Engenharia. Detivemo-nos, especificamente, a estudos relativos ao problema do deslocamento horizontal de um pórtico (Gomes *et al*., 2018; Lima *et al*., 2020), à curva característica de um diodo semicondutor (Gomes; Bianchini; Lima, 2021a; Gomes; Bianchini; Lima, 2022) e aos níveis de resistência de um diodo semicondutor operando em regimes de corrente contínua e de corrente alternada (Gomes; Bianchini; Lima, 2023). Em nossas experiências docentes na implementação dos problemas apresentados nos artigos supracitados, temos notado que as principais dificuldades dos estudantes do primeiro ano de um curso de Engenharia estão relacionadas a identificar, em uma relação funcional entre grandezas, decorrente da modelagem de um problema em um contexto específico da Engenharia, quais são as variáveis, quais são as constantes e, particularmente, que, na maioria das vezes, esta identificação do que se mantém constante e do que varia depende do que se objetiva estudar, não sendo uma informação obtida a priori, como em geral acontece nas aulas em que se exploram exclusivamente contextos intramatemáticos (Gomes; Bianchini; Lima, 2021b; Bianchini; Gomes; Lima, 2022; Lima; Bianchini; Gomes, 2022).

Ao realizarmos um outro estudo objetivando compreender aspectos acerca do pensamento variacional (Reis; Lima; Bianchini, 2023), nos deparamos com uma reflexão sobre a importância do desenvolvimento, por parte de estudantes, do denominado *raciocínio multivariacional* presente em situações envolvendo *multivariação*, isto é, ideias de variação e covariação nos casos em que mais do que duas variáveis estão relacionadas a cada uma das outras presentes no fenômeno em estudo. Ao refletir acerca desta questão, percebemos que, talvez, algumas das dificuldades manifestadas por nossos estudantes ao trabalharem com a Matemática a partir situações contextualizadas na Engenharia, pudessem ser decorrentes de suas poucas familiaridades com problemas nos quais a percepção da multivariação é um elemento fundamental.

Optamos então por, neste artigo, apresentar algumas reflexões acerca dos diferentes tipos de multivariação com os quais os estudantes irão se deparar nas disciplinas ou unidades curriculares específicas de suas formações como engenheiros e como tais reflexões podem ser inseridas também em suas formações básicas, especificamente na Matemática. Este tipo de debate se justifica porque, embora, como pontuam Jones e Jeppson (2020, p. 1139), o estudo da multivariação e do raciocínio a ela inerente seja importante porque “os contextos matemático e científico frequentemente envolvem mais do que duas variáveis que são potencialmente relacionadas entre si”, como discutido por Reis, Lima e Bianchini (2023, p.278) a partir das ideias de Jones e Kuster (2021), “a maioria das pesquisas vinculadas à covariação tem como foco o estudo das relações entre duas variáveis”.

Para que a discussão seja suficientemente compreendida pelo leitor deste artigo, na seção seguinte discorremos, sob a perspectiva teórica, acerca da multivariação em seus diferentes tipos e das ações mentais necessárias para compreendê-la.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: TIPOS DE MULTIVARIAÇÃO E AÇÕES MENTAIS A ELES ASSOCIADOS

Como salientado por Reis, Lima e Bianchini (2023), a relevância do estudo de aspectos dinâmicos relacionados a diferentes noções da Matemática e, consequentemente, a compreensão dos processos variacionais têm ganho destaque como objetos de investigações na Educação Matemática, com ênfase, sobretudo, em perceber, identificar e caracterizar a variação em contextos distintos (Villa-Ochoa, 2012). Convém destacar que, na Matemática, a expressão *variação* está diretamente associada às situações nas quais se fazem necessários o uso e a identificação de variáveis, as quais "não se restringem a letras que representam valores desconhecidos, mas são entendidas como quantidades que podem ser medidas e que se modificam quando as situações nas quais estão inseridas também sofrem alguma mudança" (Quiroga Campos; Jaimes Gómez, 2020 *apud* Reis; Lima; Bianchini, 2023, p. 256).

O interesse por parte dos pesquisadores da Educação Matemática nas questões relativas à variação decorre do fato de considerar-se como fulcral para a aprendizagem da Matemática o desenvolvimento da capacidade de examinar, em profundidade, tanto os padrões de variações presentes nos diferentes contextos, quanto como estes podem ser representados matematicamente (Carlson *et al*., 2003). Esse desenvolvimento, como destacam Parada, Conde e Fiallo (2016), é complexo por requerer a mobilização integrada de uma série de conhecimentos e por demandar modos particulares de pensar e de raciocinar que permitam ao sujeito "por um lado, explicar a relação existente entre as magnitudes que se modificam em determinada situação e, por outro, medir e analisar de que maneira essas magnitudes se modificam" (Parada; Conde; Fiallo, 2016, p. 1033). Se ocorrer de modo incipiente, pode levar os estudantes a enfrentarem uma ampla gama de dificuldades ao: analisar o comportamento e a variação a partir de uma representação gráfica; identificar as grandezas envolvidas em um fenômeno, quais variam e quais permanecem constantes; e determinar as relações de dependências entre variáveis (Báez *et al*., 2017).

Uma situação na qual é necessário estudar distintos estados de mudança e compreender o quanto e como mudam as variáveis nela presentes recebe o nome *situação variacional*. Sua análise requer o emprego de *argumentos variacionais*, por meio dos quais a mudança é compreendida e quantificada. A mobilização competente desse tipo de argumento requer que o sujeito tenha desenvolvido um modo específico de pensar, que é chamado de *pensamento variacional* (Caballero-Pérez; Cantoral, 2013) que, segundo, Thompson, Ashbrook e Milner (2016) *apud* Reis, Lima e Bianchini (2023, p. 268), é um "tipo de pensamento matemático necessário para compreender as variações e as mudanças em andamento e se desenvolve e evolui com os estudos dos fenômenos em que tais mudanças ocorrem".

O pensamento variacional apresenta-se tanto por um caráter qualitativo – referente à construção de imagens dinâmicas de variações, raciocínio sobre elas e desenvolvimento de uma linguagem que as traduzam – quanto por um caráter quantitativo – uma vez que o estudo de situações variacionais requer também que sejam efetuados cálculos e manejadas expressões algébricas. Este também está diretamente relacionado ao pensamento crítico, já que, de modo mais potente do que o oportunizado por outras formas

de pensar, permite ao sujeito “descobrir propriedades ocultas, conexões e correlações em situações da realidade” (Grozdev; Terzieva, 2010, p. 436).

Mas, qual a importância de discutir esses aspectos em um congresso destinado a refletir sobre a Educação em Engenharia? Para respondermos à esta questão, temos que recordar qual é o papel da Matemática na formação de um engenheiro e como esta ciência contribuí para o modo de pensar deste profissional.

Como pontua Camarena (2010) apud Bianchini *et al*. (2017), os papéis exercidos pela Matemática na Engenharia e, consequentemente na formação do futuro profissional desta área, estão relacionados, dentre outros: a sua própria caracterização como ciência; à previsão de comportamentos; ao manejo da linguagem específica da Engenharia; à minimização de erros; à maior precisão na análise de um problema; e ao favorecimento da analiticidade e da criticidade.

É necessário, então promover, junto ao futuro engenheiro, o desenvolvimento do pensamento matemático que é requerido deste profissional para que ele possa exercer de forma científica seu papel na sociedade (Camarena, 2021). Evidencia-se, portanto, a importância de refletir acerca de como oportunizar, desde o início dos cursos de graduação, a constituição do *pensamento matemático de um profissional da Engenharia*, entendido como o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados mediante: à contextualização de conhecimentos matemáticos em diferentes áreas de atuação do engenheiro; aos pensamentos analítico, criativo, crítico, lógico e objetivo possibilitando a observação e a reflexão científica de fenômenos destas áreas, tendo por referência a cultura profissional da Engenharia (Gomes; Bianchini; Lima, 2022).

Uma vez que o pensamento variacional é um dos modos de pensar que constituem o pensamento matemático, este também é um dos integrantes do pensamento matemático de um profissional da Engenharia. Nesta área, adquire centralidade ainda maior uma vez que a variação é um elemento presente na maior parte dos fenômenos com os quais os engenheiros se deparam em suas atuações profissionais, fenômenos estes já previamente modelados ou cujas modelagens deverão ser por eles realizadas.

A ideia apresentada no parágrafo anterior é ratificada por Parada, Conde e Fiallo (2016, p. 1032), uma vez que o autores consideram os estudos de fenômenos que variam como “uma poderosa motivação do homem para construir modelos matemáticos representados por equações que relacionam variáveis”. Explorando este aspecto, Camarena e Flores (2012) destacam que, ao realizar uma modelagem matemática, além de identificar o que varia, muitas vezes é essencial eleger como objeto de análise, a partir do contexto considerado ou do objetivo do estudo visado, algum dos elementos presentes na situação e então identificar como este varia em relação aos outros. Para as autoras, “o ponto-chave da variação na modelação matemática é determinar qual(is) de todos estes elementos são os que interessam considerar como variáveis ou assumir como constantes, com o propósito de controlar o fenômeno ou situação” (Camarena; Flores, 2012, p. 8).

A questão mencionada por Camarena e Flores (2012) acerca de identificar como um dos elementos de uma dada situação varia em relação aos outros vincula-se à ideia de *covariação*, isto é, ao relacionamento de duas variáveis. Como ferramenta matemática para o estudo da variação e, especialmente da covariação, desenvolve-se a noção de função (Caraça, 2003). Como discorrem Reis, Lima e Bianchini (2023) a partir das ideias de Thompson e Carlson (2017),

> embora a definição de função que hoje é considerada a mais ampla e que foi formulada somente em meados do século XIX pelo cientista alemão Lejeune Dirichilet (1805-1859) em termos de produtos cartesianos e pares ordenados, não evidencie explicitamente as ideias de variação e de covariação dos valores das

> variáveis (....) essas foram centrais para seu desenvolvimento (Reis; Lima; Bianchini, 2023, p. 252).

A questão é que, embora essa definição de função em termos de correspondência entre conjuntos possibilite a resolução de uma série de problemas em diferentes campos da Matemática, ao priorizá-la em sala de aula, especialmente na formação de um profissional como o engenheiro, que trabalhará constantemente com situações variacionais, deixa-se de lado excelentes oportunidades de explorar as ideias de variação e de covariação e dificulta-se a percepção, por parte do graduando, do porquê o aprendizado dos diferentes tipos de funções é tão relevante para sua formação.

Ao trabalhar com o objeto matemático função nas unidades curriculares ou disciplinas de Matemática ofertadas nos semestres iniciais dos cursos de Engenharia, torna-se essencial, portanto, priorizar a compreensão dos elementos vinculados ao pensamento variacional, dentre os quais a covariação. No entanto, explorar apenas o relacionamento entre duas variáveis não é suficiente, uma vez que, nas situações da Engenharia, a maior parte dos problemas estudados envolvem mais do que duas variáveis em interrelação. Ressalta-se, assim, a necessidade de contemplar também reflexões acerca da *multivariação* e do que Jones (2018) denomina de *raciocínio multivariacional*.

Como discorrem Reis, Lima e Bianchini (2023), subsidiados pelas ideias de Jones e Kuster (2021), Jones (2018) e Jones e Jeppson (2020), há três tipos principais de multivariação, a saber: *independente*; *dependente* e *agrupada*, cada uma delas com características específicas e requerendo atos mentais próprios, conforme apresentamos no Quadro 1.

Quadro 1 – Tipos de multivariação, suas características e atos mentais requeridos

Multivariação independente	
Características	**Atos mentais requeridos**
Presença de duas ou mais variáveis independentes (as quais também não são dependentes umas das outras) que influenciam em uma (ou mais) variável(is) dependente(s). Além disso, é possível manter constante uma ou mais variáveis independentes enquanto a outra (ou as outras) varia(m). Salienta-se que esse tipo de multivariação não deve ser associado simplesmente à covariação entre duas variáveis enquanto as demais são mantidas constantes, mas sim pode-se imaginar mais de duas variáveis sendo alteradas ao mesmo tempo.	1. Perceber que múltiplas variáveis de entrada podem impactar uma única variável de saída e que cada mudança pode se dar de forma isolada ou simultânea. 2. Coordenar cada mudança individual nas variáveis em uma mudança global líquida para as entradas. 3. Determinar se diante da mudança global líquida observada para as variáveis de entrada, os valores da variável de saída vão aumentar ou diminuir. 4. Coordenar a quantidade de mudança na variável de saída como resultado da mudança global líquida para as entradas.
Multivariação dependente	
Características	**Atos mentais requeridos**
Uma mudança em qualquer variável produz mudanças simultâneas em todas as outras variáveis, não sendo possível, portanto, manter algumas delas constantes enquanto se altera outras.	1. Coordenar uma mudança em uma variável com mudanças simultâneas e interdependentes em todas as outras, isto é, perceber que algumas variáveis não podem ser mantidas constantes de forma realista e que um sistema só pode ser compreendido imaginando todas as variáveis mudando de modo interdependente. 2. Coordenar a mudança em uma variável com a ação de identificar se cada uma das outras variáveis aumenta ou diminui, o que

	exige coordenar aumentos e diminuições interdependentes. 3. Coordenar a mudança em uma variável com a quantificação da mudança que esta produz, de forma independente, em cada uma das variáveis do sistema.
Multivariação agrupada	
Características	**Atos mentais requeridos**
Contempla uma cadeia de dependências (como a estrutura de composição de funções), sendo necessário, frequentemente, perceber qual é a variável intermediária, caso ela não esteja explicitamente identificada.	1. Coordenar uma cadeia de mudanças de uma variável para a seguinte, isto é, perceber que uma mudança em uma variável tem efeitos sobre uma sequência de outras variáveis. 2. Coordenar a mudança na primeira variável com a ação de identificar se os valores da segunda variável aumentam ou diminuem; coordenar se os aumentos ou diminuições nos valores da segunda variável correspondem a aumentos ou diminuições nos valores da terceira variável, e assim por diante. 3. Coordenar o quanto os valores de cada variável subsequente aumentam ou diminuem.

Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias apresentadas por Reis, Lima e Bianchini (2023)

Passamos então, na próxima seção, a exemplificar, a partir de contextos extramatemáticos que fazem parte da formação do futuro engenheiro, cada um desses tipos de multivariação e como eles podem ser explorados também nas disciplinas ou unidades curriculares de Matemática.

3 SUGESTÕES PARA DISCUTIR A MULTIVARIAÇÃO EM AULAS DE MATEMÁTICA

Ao ingressarem nos cursos de Engenharia, em geral nas primeiras semanas de aula nas disciplinas ou unidades curriculares de Matemática, os estudantes são apresentados a rediscussões relacionadas ao objeto matemático função, o qual já foi – ou deveria ter sido – suficientemente estudado no Ensino Médio, mas que é retomado na graduação por constituir-se como um tema central para o estudo da Matemática universitária. Frequentemente, essa rediscussão assume um caráter de mera revisão do que já foi estudado, uma repetição daquilo que está presente em livros ou outros materiais didáticos voltados ao Ensino Médio. Mesmo os livros didáticos de Cálculo, em suas partes iniciais, trazem uma abordagem das funções, ainda que contextualizada a partir de situações extramatemáticas, que está muito distante do objetivo do aprendizado de Matemática na universidade e das especificidades dos cursos de graduação nos quais estes livros são empregados.

A partir de nossas reflexões, temos debatido em diferentes congressos da área de Educação Matemática e de Educação em Engenharia, que, em nossa visão, não deveria ser organizada uma *revisão* do tópico função no início da formação do futuro engenheiro, mas uma *revisita* a este objeto já de forma vinculada aos objetivos do ensino superior e aos contextos da Engenharia. Se orientada a partir desta perspectiva, essa revisita oportunizaria, de modo mais orgânico, a discussão acerca dos tipos de multivariação, uma vez que o raciocínio multivariacional é inerente à maior parte dos problemas com os quais o futuro engenheiro se depara em seus estudos, em disciplinas ou unidades curriculares

como a Física, a Eletrônica Analógica, a Análise de Estruturas etc., e àquelas situações que enfrentará em seus cotidianos profissionais. Nesta seção, buscamos exemplificar esse nosso posicionamento apresentando e discutindo algumas situações em que cada um dos tipos de multivariação explicitados no Quadro 1 se faz presente. Para iniciar, recorremos à uma situação usualmente estudada em Física, mas que poderia ser também debatida, sob a ótica funcional, na Matemática.

3.1 Como explorar a multivariação independente a partir da lei da gravitação universal?

A lei da gravitação universal, estabelece que dois corpos se atraem com uma força gravitacional de intensidade F, medida em Newton, que é diretamente proporcional ao produto de suas massas m e M, medidas em quilogramas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância r, medida em metros, entre seus centros de gravidade, e que pode ser expressa algebricamente por:

$$F = \frac{GmM}{r^2} \qquad (1)$$

Nesta expressão, G representa a constante de proporcionalidade, cujo valor é $6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$, denominada constante gravitacional universal.

A lei da gravitação universal está presente nas páginas iniciais de alguns livros de Cálculo como um exemplo de relação funcional, na maioria das vezes explicitando que a intensidade F da força gravitacional é função da distância r entre os centros de gravidades dos corpos considerados. Em detrimento a isto, esta lei não é suficientemente explorada.

Uma primeira questão que consideramos importante de ser tratada nas aulas de Matemática é: *será que F pode ser vista somente como uma função de r?* A resposta é não e, compreendê-la requer uma análise da expressão (1) sob a perspectiva da multivariação, especificamente a multivariação independente.

Como explanam Reis, Lima e Bianchini (2023), com base nas ideias de Jones e Jeppson (2020), na lei da gravitação universal está presente uma multivariação do tipo independente, uma vez que, ao considerar tal lei, pode-se, por exemplo, modificar-se a distância r entre os centros de gravidade de dois corpos de massas m e M constantes, modificando-se consequentemente a intensidade F da força gravitacional entre tais corpos. Além disso, como é característico deste tipo de multivariação, os elementos que variam e aqueles que são mantidos constantes podem ser trocados. Ou seja, pode-se manter constantes M (a massa de um dos corpos) e r (a distância entre os centros de gravidade dos dois corpos) e avaliar como a intensidade F da força gravitacional e a massa m do outro corpo covariam. Por fim, r, m e M podem variar simultaneamente e, portanto, cada uma dessas três variáveis influenciaria no modo como a intensidade F da força gravitacional varia.

Em sala de aula, para explorar essas diferentes possibilidades, o professor de Matemática poderia, por exemplo, solicitar que os estudantes, em primeiro lugar, analisassem, a partir da lei da gravitação universal, o que é variável e o que se mantém constante em situações objetivando estudar:

(i) a intensidade da força de atração gravitacional entre a Terra e um satélite de massa conhecida que se desloca verticalmente;

(ii) a intensidade da força gravitacional entre a Terra e um corpo celeste qualquer que está orbitando a uma distância conhecida em relação ao centro gravitacional da Terra;
(iii) a intensidade da força gravitacional entre corpos quaisquer e a Terra;
(iv) a intensidade da força gravitacional entre dois corpos quaisquer cuja distância entre seus centros de gravidade é conhecida;
(v) a intensidade da força gravitacional entre dois corpos quaisquer.

Em um segundo momento, a partir dessas análises, dever-se-ia solicitar aos estudantes que escrevessem, mais uma vez com base na lei da gravitação universal, expressões algébricas das relações relacionais inerentes às situações (i) a (v).

Por fim, em um terceiro momento, visando dar oportunidades para que os futuros engenheiros exercitem adequadamente os atos mentais requeridos para a análise de uma situação envolvendo multivariação independente, poder-se-ia solicitar que, em cada um dos casos considerados, analisassem como o crescimento ou o decrescimento dos valores de cada uma das variáveis independentes impactaria, em termos de crescimento ou decrescimento, nos valores da variável dependente.

3.2 Como explorar a multivariação dependente a partir da equação da lei de um gás ideal confinado?

A multivariação dependente está presente e pode ser explorada nas aulas de Matemática a partir, por exemplo, da lei de um gás ideal confinado que, algebricamente, pode ser representada por:

$$PV = kT \qquad (2)$$

Na equação (2), P indica a medida da pressão, V a medida do volume, k é uma constante positiva (específica para cada gás considerado) e T representa a medida da temperatura.

O professor poderia iniciar a abordagem desta lei questionando quais relações funcionais entre variáveis podem ser expressas a partir dela e, em cada caso, quais são as variáveis dependentes e quais são as independentes. Por exemplo, o aluno poderia dizer que $P = \frac{kT}{V}$ e, neste caso, à primeira vista, as variáveis independentes são T e V e a variável dependente é P. Do mesmo modo, poderia indicar que $T = \frac{PV}{k}$, sendo, neste caso, em uma primeira análise, P e V variáveis independentes e T variável dependente. Por fim, poderia expressar que $V = \frac{kT}{P}$ e, assim, T e P seriam, em uma primeira abordagem, variáveis independentes e V variável dependente.

Em seguida, no intuito de efetivamente explorar a multivariação do tipo dependente, o professor poderia questionar ao estudante se, do ponto de vista físico-químico, é possível alterar a temperatura e manter constantes as medidas da pressão e do volume? Como pontuam Jones e Jeppson (2020, p. 1140), é na resposta à esta questão que se revelam a multivariação dependente - bem como os atos mentais a ela vinculados - inerente à lei de um gás ideal confinado, uma vez que, “se o gás dentro do recipiente flexível for aquecido, o aumento da temperatura (T) causará mudanças simultâneas tanto na pressão interna (P) quanto no volume (V)”. Do mesmo modo, se o recipiente flexível for resfriado, a diminuição da temperatura T também ocasionará mudanças na pressão (P) e no volume (V) Ou seja, neste caso, uma mudança em qualquer variável produz mudanças simultâneas em todas

as outras, não sendo possível manter algumas delas constantes enquanto as outras se alteram.

3.3 Como explorar a multivariação agrupada a partir das equações paramétricas do movimento e da determinação do nível médio diário de monóxido de carbono no ar?

Diversas situações nas quais estão presentes composições de funções podem servir de instrumentos para explorar a multivariação agrupada. Nas áreas específicas de formação do futuro engenheiro, esse tipo de multivariação está presente, por exemplo, na Física ao analisar o movimento de um determinado corpo que assume diferentes posições no decorrer do tempo. Nas aulas de Matemática, o professor pode propor que o aluno considere um corpo em movimento que, em um instante inicial, está localizado no ponto $P(x, y, z)$ e que analise como determinar, de maneira genérica, as coordenadas do ponto em que este corpo estará após transcorrido um determinado espaço de tempo t. O primeiro aspecto acerca do qual o professor deve levar o aluno a refletir é que, neste caso, t desempenha o papel de variável intermediária. Isto se dá porque o vetor posição $(\vec{r})$ do corpo em estudo dependerá do tempo (t), uma vez que as componentes escalares x, y, z deste vetor variam em relação ao tempo, ou seja, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$.

Para compreender adequadamente este aspecto, o estudante deverá colocar em ação os atos mentais associados a este tipo de multivariação, ou seja, perceber que uma mudança em uma variável, no caso t, tem efeitos sobre uma sequência de outras variáveis – na situação considerada x, y e z. É possível, por exemplo, que as variáveis x, y, z e t estejam relacionadas do seguinte modo: $x(t) = 3t$, $y(t) = 5 - t^2$ e $z(t) = \frac{t}{2}$. O professor pode então estimular os estudantes a perceberem o que acontece com os valores das variáveis x, y, z à medida em que os valores de t aumentam, fazendo-os compreender que, neste caso, os valores de x aumentarão, os de y diminuirão (uma vez que t, neste contexto, só assume valores maiores ou iguais a zero) e os de z aumentam. Além disso, devem ser estimulados a entender o quanto os valores das variáveis x, y, z aumentam ou diminuem considerando determinada variação nos valores de t. Finalmente, o docente pode solicitar que os estudantes escrevam a equação vetorial que representa a posição do corpo em um instante qualquer de tempo, a saber: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. Ou, no caso do exemplo considerado: $\vec{r}(t) = (3t)\vec{\imath} + (5 - t^2)\vec{\jmath} + \left(\frac{t}{2}\right)\vec{k}$.

Outra situação do contexto físico na qual a multivariação agrupada pode ser explorada diz respeito ao estudo do nível médio c, em partes por milhão, de monóxido de carbono no ar de uma dada comunidade. Suponha que este possa ser determinado por meio da seguinte expressão algébrica: $c(p) = \sqrt{0{,}5p^2 + 17}$ na qual p representa, em milhares de habitantes, a população da comunidade considerada. Considere ainda que esta população p, daqui a t anos, poderá ser calculada, em milhares de habitantes, por meio da seguinte expressão: $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$. Os elementos a serem explorados pelos estudantes são análogos aos apresentados no exemplo anterior.

3.4 Como explorar os três tipos de multivariação mencionados a partir da equação de Shockley

A equação de Shockley, que permite analisar, para as regiões de polarização direta e reversa, as características gerais de um diodo semicondutor, pode ser representada algebricamente por:

$$I_F = I_R\left(e^{\frac{V_F}{nV_T}} - 1\right) \quad (3)$$

Nesta equação: I_F representa a corrente direta que passa pelo diodo; I_R a corrente de saturação reversa (que depende da temperatura em que o diodo está operando, uma vez que a corrente de saturação reversa dobra a cada elevação de 10℃ na temperatura); V_F a tensão de polarização direta aplicada ao diodo; n um fator de idealidade, que depende das condições de operação e de construção física do diodo e V_T a tensão térmica, definida por:

$$V_T = \frac{kT_K}{q} \quad (4)$$

Na equação (4), k é a constante de Boltzmann, cujo valor é $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K, T_K é a temperatura absoluta em Kelvin, que é dada pela adição entre 273 e a medida da temperatura em graus Celsius, q é a magnitude da carga elétrica elementar, que é dada por $1{,}6 \times 10^{-19}\,C$.

Compartilhamos a ideia de que a equação (3), objeto de estudo em disciplinas de Eletrônica de cursos de graduação em Engenharia de Controle e Automação e habilitações de áreas correlatas, poderia ser explorada, sob o viés funcional, também nas aulas de Matemática, uma vez que oportuniza a discussão dos três tipos de multivariação apresentados no Quadro 1, bem como o desenvolvimento e a mobilização dos atos mentais associados a cada um deles.

Após propor que os estudantes realizem uma atividade de preparação prévia para a familiarização com o contexto extramatemático relacionado à equação de Shockley, atividade esta que apresentamos em Lima, Bianchini e Gomes (2021), o professor de Matemática poderia oportunizar que, considerando um diodo específico (e, portanto, com fator de idealidade conhecido), os futuros engenheiros percebam a presença, nesta equação, de uma *multivariação agrupada*, traduzida por meio de uma cadeia de dependências, uma vez que as variáveis tensão térmica (V_T) e corrente de saturação reversa (I_R) dependem ambas de uma variável intermediária, que é a temperatura de operação do diodo.

Após identificarem essa cadeia de dependências e a presença de uma variável intermediária, os estudantes podem ser estimulados pelo docente a perceberem que:

I. havendo uma mudança, por exemplo, na tensão térmica (V_T), isso significará que houve uma mudança na temperatura e, consequentemente, também haverá uma mudança na corrente de saturação reversa (I_R);
II. um aumento (uma diminuição) na temperatura de operação do diodo ocasionará um aumento (uma diminuição) na tensão térmica e um aumento (uma diminuição) na corrente de saturação reversa;
III. temperaturas de operação mais altas (mais baixas) requerem menores (maiores) tensões direta para que os mesmos valores de corrente direta passem pelo diodo.

Em um segundo momento, os graduandos devem ser estimulados a perceber também a presença de uma *multivariação dependente* na equação de Shockley, isto é, que há, nesta equação, variáveis que não podem ser mantidas constantes enquanto faz-se alterações nas outras. O professor pode, por exemplo, propor que analisem o que acontece, considerando um diodo específico – portanto, um fator de idealidade conhecido – ao alterar em (3) a tensão térmica, dada por (4).

Os estudantes deverão então compreender que, ao considerar uma mudança na tensão térmica V_T não é possível manter constante a corrente de saturação reversa I_R. Do mesmo modo, se houver uma mudança na corrente de saturação reversa I_R, haverá também mudança na tensão térmica V_T, não sendo possível mantê-la constante. Além dessa compreensão, é importante que os alunos sejam levados a analisar, por exemplo, se um aumento na tensão térmica levará a um aumento ou a uma diminuição da corrente de saturação reversa. Ao alterar a tensão térmica ou a corrente de saturação reversa, a única variável independente que poderá ser mantida constante é a tensão direta V_F.

Por fim, a equação de Shockley (3) também favorece a discussão da *multivariação independente*, embora, neste caso, a reflexão oportunizada não seja suficientemente completa, uma vez que a multivariação independente presente na equação (3) se constitui, particularmente, como uma covariação entre duas variáveis enquanto as outras se mantêm constantes. Ao considerar uma temperatura específica de operação para um diodo em particular, podemos dizer que as variáveis V_F, V_T e I_R são independentes, não são dependentes uma das outras e influenciam na variável dependente I_F. Neste caso, mantêm-se constantes a tensão térmica V_T e a corrente de saturação reversa I_R enquanto a tensão de polarização direta varia.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo visado ao redigir esse artigo foi estimular que o professor que leciona Matemática em cursos de Engenharia atente-se para aspectos presentes em relações que muitas vezes são empregadas para exemplificar aplicações do objeto matemático função em contextos extramatemáticos, mas que não são suficientemente explorados em sala de aula, sendo o principal deles a questão da *multivariação* presente em tais relações funcionais.

Pouco adianta apresentar, nas aulas de Matemática, a lei da gravitação universal, a lei de um gás ideal confinado ou a equação de Shockley como exemplos do emprego de funções em situações de outras ciências básicas ou de áreas específicas da Engenharia se o docente não possibilitar que o graduando perceba que, nestas leis ou equações, dependendo do que se quer determinar ou estudar, as variáveis nela presentes poderão ter seus papéis alterados, sendo dependente em uma primeira situação, independente em uma segunda e assumindo um valor constante em uma terceira.

É, portanto, extremamente limitante dizer, em uma aula de Cálculo, simplesmente que $F = \frac{GmM}{r^2}$ é uma função de r. Não haveria outras possibilidades em termos de variáveis dependentes e independentes a ser exploradas a partir desta lei? Procuramos evidenciar neste artigo que sim! Do mesmo modo, entendemos que, ao trabalhar nas aulas de Matemática com parametrizações e equações paramétricas, o caráter funcional e o raciocínio multivariacional inerente a essas situações também, em geral, não é devidamente explicitado aos estudantes. Mas, será que estes se dão conta desses aspectos e atribuem a eles os devidos significados sem a mediação docente adequada? Entendemos que não!

A discussão superficial das relações destacadas neste artigo e outras que requerem os mesmos tipos de raciocínio e de análises pode contribuir para que os estudantes percebam, de modo incompleto, tais relações simplesmente como fórmulas, com caráter estático, deixando de lado o caráter funcional – e, consequentemente, variacional – e dinâmico presente em tais leis e equações.

Esperamos, por fim, que este artigo possa contribuir para estimular o docente a analisar mais atentamente as situações com as quais trabalha para explorá-las, sempre que possível, em toda a sua completude.

REFERÊNCIAS

BÁEZ, A. *et al.* Propuesta de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Ingeniería. **Formación Universitaria**, v. 10, n. 3, p. 93-106, 2017.

BIANCHINI, B. L. *et al*. Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 1, p. 49-79, 2017.

BIANCHINI, B. L.; GOMES, E.; LIMA, G. L. de. Uma abordagem contextualizada da matemática na engenharia: as potencialidades das perguntas dos professores. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 15, n. 3, 2022.

CABALLERO-PÉREZ, M.; CANTORAL, R. Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 26, p. 1007-1015, 2013.

CAMARENA, Patricia. **Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias**. 1a ed, Santiago del Estero: EDUNSE, 2021.

CAMARENA, Patricia.; FLORES, Irma. Epistemología de lo variacional. In*:* Simposium Internacional “Aportaciones de las universidades a la investigación, la Tecnología y el desarrollo”, 2012, Ciudad de México. **Memorias**. Ciudad de México.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.

CARLSON, M. *et al.* Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco de referencia y un estudio. **Revista EMA**, v. 8, n. 2, p. 121-156, 2003.

GROZDEV, Sava; TERZIEVA, Todorka. Development of variational thinking skills in Programming Teaching. In*:* Anniversary International Conference, Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications, 2010, Plovdiv. **Proceedings**. Plovdiv.

JONES, Steven R. Building on covariation: Making explicit four types of “multivariation”. In: 21ª Annual Conference on Research in Undergradute Mathematics Education, 2018, San Diego. **Proceedings**. San Diego.

JONES, Steven R.; JEPPSON, Haley P. Students’ reasoning about multivariational structures. In: 42ª Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2020, Mazatlán. **Proceedings**. Mazatlán.

GOMES, Eloiza *et al*. Análise Dinâmica de Pórticos: uma oportunidade para a construção de um evento contextualizado para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear. In: XLVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2018, Salvador. **Anais**. Salvador.

GOMES, Eloiza; BIANCHINI, Barbara L.; LIMA, G. L. de. Desenvolvimento de competências matemáticas e competências gerais por meio de uma atividade contextualizada no estudo de um diodo semicondutor. In: XLIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2021a, Belo Horizonte. **Anais**. Belo Horizonte.

GOMES, Eloiza; BIANCHINI, Barbara L.; LIMA, G. L. de. As potencialidades das perguntas dos professores em uma abordagem contextualizada da Matemática na Engenharia. In: 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2021b, Uberlândia. **Anais**.

Uberlândia. 2021b. p. 699-717. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf. Acesso em: 11 abr. 2024.

GOMES, Eloiza; BIANCHINI, Barbara L.; LIMA, G. L. de. Dificuldades cognitivas relacionadas à noção de função: uma análise a partir da resolução de um problema no contexto da Engenharia. In: L Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2022, São Paulo. **Anais**. São Paulo.

GOMES, Eloiza; BIANCHINI, Barbara L.; LIMA, G. L. de. O estudo dos níveis de resistência de um diodo semicondutor como contexto para a abordagem de função, limite e derivada. In: LI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2023, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro.

LIMA, Gabriel L. de., BIANCHINI, Barbara L., GOMES, Eloiza. Estudando a Curva Característica de um Diodo Semicondutor na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral: oportunidade para o desenvolvimento de competências matemáticas e gerais na Engenharia. In: XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería, 2021, Montevideo. **Libro de Actas**. Montevideo. Disponível em: https://liberi.ucu.edu.uy/xmlui/handle/10895/1599. Acesso em: 11 abr. 2024.

LIMA, G. L. de; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Abordagem contextualizada da Matemática na Engenharia sob a perspectiva das disfunções cognitivas. **Acta Scientiae**, v. 24, n. 7, p. 35-77, 2022.

PARADA, S. E.; CONDE, L. A.; FIALLO, J. Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. **Bolema**, v. 30, n. 56, p. 1031-1051, 2016.

REIS, Frederico da Silva; LIMA, Gabriel Loureiro de; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Pensamento Variacional. In: BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de (Orgs.). **O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo: Livraria da Física, 2023, p. 249-299.

VILLA-OCHOA, J. A. Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. **TED: Tecné, Episteme y Didaxis**, n. 31, p. 9-25, 2012.

THE IMPORTANCE OF REFLECTING ON MULTIVARIATION IN TEACHING MATHEMATICS FOR ENGINEERING

Abstract: *Our experiences in using contextualized problems in the teaching and learning of mathematics for beginners in engineering have shown that the main difficulties they face are related to identifying, in a functional relationship between quantities, which are the variables, which are the constants and that, most of the time, this identification depends on what the objective is to study. Investigating variational thinking, we came across the ideas of independent, dependent and grouped multivariation and the notion of multivariational reasoning. We then conjectured that it is possible that some of the difficulties expressed by our students when working with mathematics from contextualized situations in engineering may be due to their unfamiliarity with phenomena in which the perception of multivariation, in its different types, is a central element. In this article, we present theoretical reflections and examples on this topic, the mental actions needed to understand it and how teachers can explore it in the study of functions in mathematics.*

Keywords: *mathematics, function, multivariation, contextualization.*