

ANTI-TRANSFORMADA DE LAPLACE VERSUS INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO NA OBTENÇÃO DE RESPOSTAS DE SISTEMAS LINEARES - UM ESTUDO DE CASO DIDÁTICO

Keilor Rafael Rosset – keilor_rafael@hotmail.com

Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Avenida dos Ingás, 3001
CEP 78555000 – Sinop – Mato Grosso

Rogério Bastos Quirino – rb_quirino@hotmail.com

Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Avenida dos Ingás, 3001
CEP 78555000 – Sinop – Mato Grosso

Lucas Mateus Mazei Sobrinho – mazei.lucas@gmail.com

Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Avenida dos Ingás, 3001
CEP 78555000 – Sinop – Mato Grosso

Henison da Silva Costa – henison2011@hotmail.com

Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Avenida dos Ingás, 3001
CEP 78555000 – Sinop – Mato Grosso

Resumo: A resposta de sistemas lineares a uma entrada de determinada natureza pode ser obtida através de ferramentas matemáticas, tais como operações algébricas de expansão em frações parciais da função de transferência do sistema linear em questão e sua respectiva anti-transformada de Laplace. Entretanto, a análise da resposta em função de mudanças na natureza do sinal de entrada através do emprego de tal ferramenta torna-se relativamente exaustiva e cega em relação a se ter uma noção prévia do perfil da resposta. Procurando discutir uma metodologia relacionada à transformada de Laplace, alternativa ao projeto e análise de perfis de resposta de um sistema linear sujeito a diferentes naturezas de entrada, exploramos a utilização do teorema da convolução, evidenciando sua complexidade de desenvolvimento diferenciada e a possibilidade de abstração do perfil de resposta a ser formado. Um sistema massa-amortecedor é utilizado como modelo físico para o estudo.

Palavras-chave: Transformadas de Laplace, Análise de Sinais, Processamento de Sinais, Integral de Convolução, Ensino.

1 INTRODUÇÃO

No largo espectro das ciências exatas, é inquestionável a utilidade e a vasta gama de aplicações da operação de convolução contínua (OCC). Segundo (Dominguez, 2015), que escreveu um histórico da operação de convolução desde Leonhard Euler (1707-1783) aos tempos atuais, a OCC é discutida em livros onde o tópico principal é a teoria e as aplicações de uma transformação integral, principalmente de Fourier ou de Laplace. Euler estudou as soluções de equações diferenciais (EDs) de segunda ordem da forma:

$$y = \int [K(u) + Q(x)]^n P(x) dx \quad (1)$$

Um primeiro caso simples desta solução é $K(u) = u$ e $Q(x) = x$ e um segundo caso é $K(u) = -u$ e $Q(x) = x$. Euler estudou o primeiro caso que é a primeira fonte em que a operação de correlação é utilizada de forma exaustiva em aplicações estatísticas e relacionadas à convolução. Quanto ao segundo caso, (1) resulta em uma forma particular da operação matemática dada por:

$$y = \int (x - u)^n P(x) dx \quad (2)$$

No entanto, Euler não estudou (2) em particular, mas estudou o caso quando $Q(x) = x$ e $K(u)$ é qualquer outra função.

Uma forma mais geral de (2) surgiu na solução de EDs por transformações integrais (como transformações de Fourier ou Laplace) relacionadas à dinâmica computacional de fluidos, engenharia elétrica, condução de calor, processamento de sinal e imagem, acústica linear, engenharia mecânica, óptica, probabilidade e estatística, radioterapia, espectroscopia e viscoelasticidade. Especificamente, para as duas funções adequadas de valor complexo f e g de um argumento variável real ou complexo, a seguinte expressão é mais geral do que (2):

$$\int_{\ell} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha \quad (3)$$

Aqui, ℓ pode ser um intervalo de integração (a, b) se α for uma variável real ou uma curva se α for uma variável complexa. Do ponto de vista gráfico, α sendo a variável principal, esta operação consiste no processo matemático que pode ser interpretado graficamente dobrando o argumento da função g , transladando o argumento da função g , multiplicando a função resultante g pela função f e integrando essa multiplicação. Além disso, esta interpretação e sua representação gráfica apareceram pela primeira vez na primeira edição em 1942 de (GARDNER e BARNES, 1963). Portanto, a operação é, em certo sentido, o "dobramento" de uma das funções de entrada e seu escorregamento sobre a outra. Particularmente em matemática, física e áreas relacionadas, o verbo comumente usado para designar tal revolução é "convolver". Esse verbo vem das palavras latinas *con* e *volve*, que significam "juntas" e "rolar", respectivamente; assim, *convolve* significa "rolar uma por sobre a outra". Assim, a ação de convolver é chamada de convolução. É por isso que (3) geralmente é conhecido hoje como o OCC, ou simplesmente convolução, embora tenha sido dado muitos outros nomes no passado, conforme discutido em (Dominguez, 2015).

2 A INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

A convolução é uma ferramenta valiosíssima para o engenheiro, pois fornece um meio para visualizar e caracterizar sistemas físicos. Ela é usada, por exemplo, para descobrir a resposta $y(t)$ de um sistema a uma excitação $u(t)$, conhecendo-se a resposta ao impulso do sistema $h(t)$. Isso é obtido pela integral de convolução (ALEXANDER e SADIKU, 2013), definida como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda \quad (4)$$

Ou ainda:

$$y(t) = u(t) * h(t) \quad (5)$$

Em que λ é uma variável auxiliar de dobramento e o asterisco representa convolução. A Equação (4) ou (5) significa que a saída é igual à entrada que sofreu a convolução com a resposta ao impulso unitário.

A integral de convolução na Equação (4) é genérica e se aplica a qualquer sistema linear. Entretanto, ela pode ser simplificada se supormos que o sistema possua duas propriedades. Primeiro, se $x(t) = 0$ para $t < 0$, então:

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda \quad (6)$$

Segundo, se a resposta do sistema a um impulso for causal (isto é, $h(t) = 0$ para $t < 0$), então $h(t - \lambda) = 0$ para $t - \lambda < 0$ ou $\lambda > t$ de modo que a Equação (6) possa ser reescrita como:

$$y(t) = \int_0^t u(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda \quad (7)$$

Uma importante propriedade relacionando a transformada de Laplace e o teorema da convolução se estabelece na seguinte demonstração:

Seja $y(t) = g(t) * h(t)$. Fazendo a $\mathcal{L}\{y(t)\}$, temos: $Y(s) = \mathcal{L}\{g(t) * h(t)\}$.

Como, por definição, a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (8)$$

Temos $Y(s) = \int_0^{\infty} [g(t) * h(t)]e^{-st}dt$ que resulta em:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\lambda) y(t - \lambda) e^{-st} d\lambda dt \quad (9)$$

Fazendo a mudança de variáveis: $\begin{cases} u = t - \lambda \\ t = u + \lambda, \\ du = dt \end{cases}$, a equação (9) pode ser reescrita como:
 $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\lambda) h(u) e^{-s(u+\lambda)} d\lambda du$, ou ainda:

$$\int_0^{\infty} g(\lambda) e^{s\lambda} d\lambda \int_0^{\infty} h(u) e^{-su} du \quad (10)$$

Note que (10) está na forma de (9) incorporando-se a definição de convolução, donde conclui-se que: $\begin{cases} \int_0^{\infty} g(\lambda) e^{s\lambda} d\lambda = \mathcal{L}\{g(\lambda)\} = G(s) \\ \int_0^{\infty} h(u) e^{-su} du = \mathcal{L}\{h(u)\} = H(s) \end{cases}$.

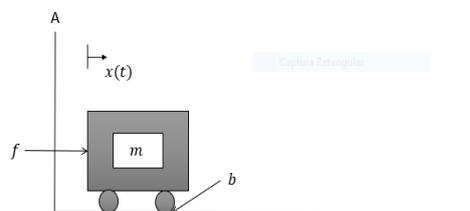
Dessa forma: $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{g(\lambda)\}\mathcal{L}\{h(u)\}$ ou $Y(s) = G(s)H(s)$.

Com isso, podemos dizer que o produto de duas funções no domínio de Laplace corresponde a convolução delas no domínio do tempo.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema massa-amortecedor:

Figura 1 - Sistema massa-amortecedor.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Em que: m representa a massa do móvel, f representa a força que está agindo sobre o móvel e b representa o atrito das rodas com o solo.

O sistema da Figura 1 pode ser modelado pela seguinte função de transferência:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs} \quad (11)$$

O estudo aqui proposto consiste em relacionar o emprego das ferramentas de transformada de Laplace e convolução ao encontro das naturezas dos sinais de entrada a serem aplicadas na equação (11) de forma que a resposta do sistema satisfaça a um perfil de alcance da mesma posição de regime permanente do móvel sem sobressinal e o mais rápido possível.

4 RESOLUÇÃO VIA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A equação (11) pode ser reescrita para entrada I.U. como:

$$X(s) = \frac{1}{s(ms + b)} \quad (12)$$

Como os pólos são reais e distintos, a resposta ao Impulso Unitário (I.U.) para o deslocamento $x(t)$, baseado na equação (12), pode ser calculada via a seguinte expansão em frações parciais (NISE, 2002):

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs} = \frac{A}{s} + \frac{B}{ms + b} \quad (13)$$

Resolvendo a equação (13), resulta nos coeficientes: $\begin{cases} A = \frac{1}{b} \\ B = -\frac{m}{b} \end{cases}$.

Substituindo em (13), resulta: $X(s) = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{m}} \right)$.

Fazendo a $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, temos: $x(t) = \frac{1}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$.

A resposta ao Degrau Unitário (D.U) para o deslocamento $x(t)$, baseado em (12), resulta em:

$$X(s) = \frac{1}{s^2(ms + b)} \quad (14)$$

Expandindo (14) em frações parciais:

$$X(s) = \frac{1}{s^2(ms + b)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{ms + b} \quad (15)$$

Compatibilizando as frações (14) e (15), resulta nos coeficientes: $\begin{cases} A = -\frac{m}{b^2} \\ B = \frac{1}{b} \\ C = \frac{m}{b^2} \end{cases}$.

Que substituídos na equação (5), resulta em: $X(s) = \frac{1}{b} \left[-\frac{m}{bs} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{b(s + \frac{b}{m})} \right]$.

Fazendo a $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, temos: $x(t) = \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b} \right)$.

5 RESOLUÇÃO VIA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

O emprego da convolução contínua para responder à indagação na formulação do problema que consistia em qual a natureza do sinal adequado para que o perfil da resposta do sistema ocorra sem sobressinal e o mais rápido possível, pode se apresentar como uma alternativa mais vantajosa como será demonstrado a partir desta seção.

A convolução contínua entre dois sinais no tempo $g(t)$ e $h(t)$ pode ser descrita matematicamente como (OGATA, 1990):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (16)$$

Exploraremos as respostas ao I.U. e D.U. para o deslocamento $x(t)$ do sistema mostrado na figura 1, lembrando que basta conhecermos a resposta do sistema ao I.U.

Para provarmos a resposta do sistema ao I.U temos: $\begin{cases} g(t) = \delta_t \\ h(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \end{cases}$, onde $g(t)$

é a função de entrada e $h(t)$ é a resposta do sistema ao impulso unitário.

Assim: $x(t) = g(t) * h(t)$.

Escrevendo na forma de (8): $x(t) = \int_0^t g(t - \lambda)h(\lambda)d\lambda$.

$$x(t) = \frac{1}{b} \int_0^t \delta_{(t-\lambda)} \left(1 - e^{-\frac{b\lambda}{m}}\right) d\lambda \quad (17)$$

Como $g(t)$ é a função de Dirac deslocada para λ , temos que a solução da equação (17) é: $x(t) = \frac{1}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$.

Para o D.U., basta fazermos a convolução da resposta ao I.U do sistema com a função degrau $u(t)$, onde: $\begin{cases} g(t) = u(t) \\ h(t) = \frac{1}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \end{cases}$

Logo: $x(t) = g(t) * h(t)$ ou seja: $x(t) = \frac{1}{b} \int_0^t u(t - \lambda) \left(1 - e^{-\frac{b\lambda}{m}}\right) d\lambda$.

Como se trata de um D.U, com λ variando, temos que $u(t - \lambda) = 1$, para todo λ de 0 a t , portanto:

$$x(t) = \frac{1}{b} \int_0^t 1 \left(1 - e^{-\frac{b\lambda}{m}}\right) d\lambda \quad (18)$$

Resolvendo (18), chegamos em: $x(t) = \frac{1}{b} \left[t + \frac{b}{m} e^{-\frac{mt}{b}} - \frac{m}{b}\right]$.

Objetivando a obtenção da resposta mais rápida do sistema sem sobressinal, a uma entrada pulso simples com amplitude A e duração α , realizamos a seguinte convolu-

ção: $\begin{cases} g(t) = A [u(t) - u(t - \alpha)] \\ h(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \end{cases}$.

Neste caso, temos dois intervalos para a integral de convolução, um para $0 < t < \alpha$ e outro para $t > \alpha$.

Para $0 < t < \alpha$ temos: $x(t) = \int_0^t g(t - \lambda)h(\lambda)d\lambda$, $x(t) = \int_0^t A u(t - \lambda) * \left(\frac{1}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) d\lambda$.

Como $u(t - \lambda)$ é o degrau de amplitude A rebatido, temos: $x(t) = \frac{A}{b} \left[t + \frac{b}{m} e^{-\frac{mt}{b}} - \frac{m}{b} \right]$, $0 < t < \alpha$.

Para $t > \alpha$ temos: $x(t) = \int_{t-\alpha}^t g(t - \lambda)h(\lambda)d\lambda$.

Logo, $x(t) = \frac{A}{b} \left(\alpha + \frac{m}{b} e^{-\frac{m\alpha}{b}} (1 - e^{-\frac{m}{b}(t-\alpha)}) \right)$.

Dessa forma:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{b} \left[t + \frac{b}{m} e^{-\frac{mt}{b}} - \frac{m}{b} \right], & 0 < t < \alpha \\ \frac{A}{b} \left(\alpha + \frac{m}{b} e^{-\frac{m\alpha}{b}} (1 - e^{-\frac{m}{b}(t-\alpha)}) \right), & t > \alpha \end{cases} \quad (19)$$

6 DISCUSSÃO

Utilizando o Matlab, foram plotados os gráficos das respostas desse sistema ao I.U. e ao D.U., mostrados na figura 2, considerando $m = 1Kg$ e $b = 1Ns/m$.

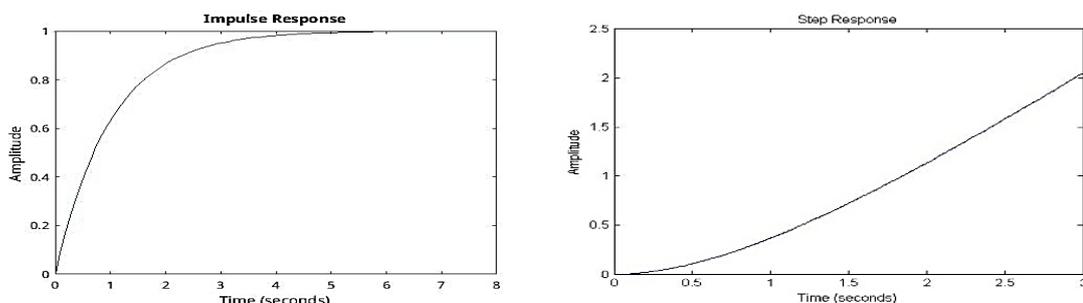
Resposta ao I.U.: $\begin{cases} x(t) = 1 - e^{-t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$.

Resposta ao D.U.: $\begin{cases} x(t) = -1 + t + e^{-t} \\ v(t) = 1 - e^{-t} \end{cases}$.

Para analisarmos o comportamento do sistema a uma entrada pulso simples utilizando o Matlab, foram fixados $m = 1Kg$ e $b = 1Ns/m$ e variado a amplitude A e a duração do pulso α .

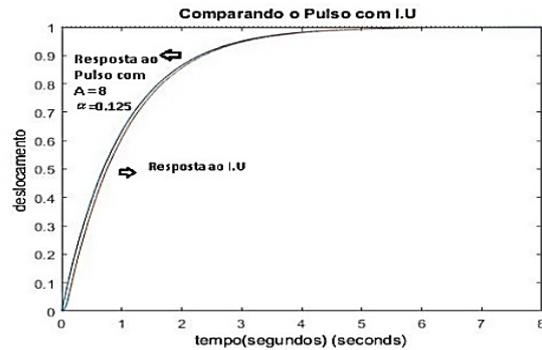
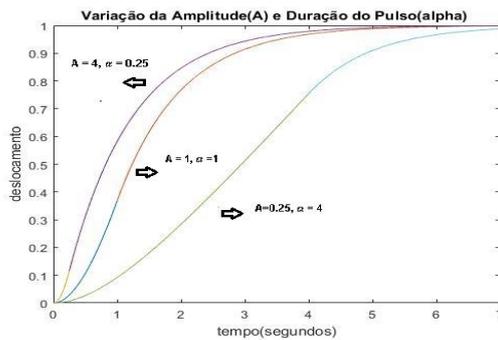
Da equação (19), pode-se concluir que a medida que t tende a infinito o valor de regime permanente tende para $\frac{A}{b}\alpha$. Como é de interesse a observação da velocidade de convergência para atingir o regime permanente sem sobressinal, como resposta a entrada pulso simples, a Figura 3 apresenta resultados de simulação no ambiente Matlab para alguns valores de A e α .

Figura 2 - Respostas de $x(t)$ ao I.U a esquerda e ao D.U a direita.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 3 – Na esquerda as respostas $x(t)$ a entrada pulso simples, com variações de amplitude e largura, a direita respostas $x(t)$ ao pulso ($A = 8$; $\alpha = 0,125$) e ao I.U.

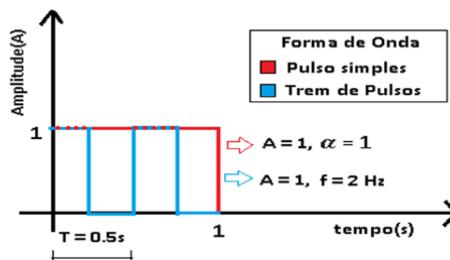


Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Conforme mostrado na Figura 3, a modulação do pulso simples, aumentando amplitude e estreitando a largura dele, praticamente não surte efeito na redução do tempo para atingir o regime permanente.

Como ideia de investigação à provocação de se obter um sinal de saída que tenha tempo de acomodação mais rápida sem sobressinal, em relação ao pulso simples, procuramos a seguir explorar a convolução do sistema com um trem de pulsos de amplitude A e frequência $(\frac{n}{\alpha})$ Hz, em que n é o número de ciclos na largura α do pulso simples, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Descrição do trem de pulsos de entrada aplicado.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Modelamos a função trem de pulsos de amplitude A e duração α através da seguinte série de Fourier Trigonométrica (ALEXANDER e SADIKU, 2013):

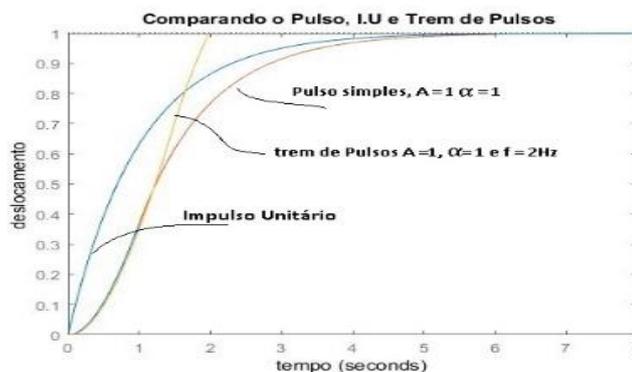
$$\begin{cases} g(t) = \left(\frac{1}{b}\right) (1 - e^{\frac{bt}{m}}) \\ h(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \text{sen} \left(\frac{2\pi nkt}{\alpha} \right) \right], k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \text{ onde } n \text{ número de ciclos na janela } \alpha.$$

A resposta convoluída entre as funções $g(t)$ e $h(t)$ é dada por: $f(t) = \frac{A}{2}t - \frac{A\alpha}{\pi^2 m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\cos \left(\frac{2\pi nkt}{\alpha} \right) - 1 \right) + \frac{A}{2c} \left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1 \right) + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[-\beta \alpha e^{-c\alpha} + c\alpha^2 \left[\frac{\beta}{c\alpha} \cos\beta - \text{sen}\beta \right] \right] \left[\frac{1}{(c\alpha)^2 + \beta^2} \right]$, onde $c = \frac{m}{b}$, $\beta = 2\pi nk$ e k é o índice da série.

Podemos concluir baseado na Figura 5 que a aplicação de um trem de pulsos na entrada do sistema satisfaz ao perfil de resposta desejada com menor tempo de convergência, porém com ultrapassagem do valor de regime. Tal ultrapassagem, devido a inércia, poderia ser fisicamente evitada através de uma interrupção do sinal de entrada a ser aplicada no sistema num instante de tempo conveniente.

Cabe ressaltar que tal estratégia de interrupção poderia ser igualmente aplicada para o caso de uma entrada pulso simples D.U., conforme mostrado na Figura 2, de tal forma a acelerar a convergência para o regime permanente desejado. No entanto, para este caso de aplicação D.U. simples, a fim de reduzir mais ainda mais o tempo de convergência para o regime, demandaria o aumento da amplitude do degrau, o que seria dispensável na modulação por trem de pulsos, cabendo somente, neste caso, aumentar a frequência de modulação do trem de pulsos mantendo a amplitude constante.

Figura 5 - Perfis de respostas $x(t)$ ao I.U., pulso simples e trem de pulsos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

7 CONCLUSÃO

Pode-se concluir, através da resolução da resposta do sistema pelos métodos de transformada de Laplace e Convolução Contínua, que a utilização deste último ao projeto de perfis de resposta desejados, oferece um caminho alternativo ao projetista à obtenção do sinal de saída desejado, permitindo um desenvolvimento analítico relativamente menos exaustivo, principalmente nos casos de aplicação de sinais de entrada mais complexos, por exemplo, como a entrada pulsada utilizada neste trabalho.

Cabe ressaltar que a utilização de programas computacionais que podem vir a ser desenvolvidos como recurso gráfico à obtenção do resultado da convolução contínua em questão, contribuiria sobremaneira no projeto e análise de perfis de resposta.

Acreditamos que o trabalho contribui ao ensino de disciplinas tais como sinais e sistemas e correlatas dos cursos de engenharia, na medida em que ele oferece perspectivas de resolução de respostas de sistemas lineares através da visão sistematizada de conteúdos, conduzindo alunos e profissionais de engenharia à reflexão aprofundada e útil sobre tais conteúdos.

Aspectos adicionais importantes das relações intrínsecas existentes entre as ferramentas de análise tratadas neste trabalho serão mais explorados em trabalhos futuros por meio da aplicação do ambiente Simulink e do desenvolvimento de programas livres que implementem graficamente a integral de convolução.

Além disso, em trabalhos futuros, pretendemos desenvolver a modelagem matemática que descreve a dinâmica dos efeitos da interrupção da entrada trem de pulsos, a fim de se evitar a ultrapassagem do valor de regime permanente, devido a inércia, bem como as respectivas simulações nos ambientes Matlab e Simulink, úteis e desencadeadoras de

exploração interdisciplinar das disciplinas de física e matemática nos cursos de engenharia.

Agradecimentos

Agradecemos ao nosso órgão financiador de pesquisa e a instituição de ensino estaduais, pelo apoio financeiro através da bolsa monitoria.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles. K; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. AMGH, 5ª Edição, 2013.

DOMINGUEZ, Alejandro. **A History Of The Convolution Operation**. IEEE Pulse, January/February, 2015.

GARDNER, M.F; BARNE, J.L. **Transients In Linear Systems Studied By The Laplace Transformation**. John Wiley, N.Y, 1963.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. LTC, 3ª Edição, 2002. p. 28-35.

OGATA, Katsuhiko. **Modern Control Engineering**. Prentice-Hall, 2ª Edition, 1990. p. 31-33; 251-253.

INVERSE LAPLACE TRANSFORM VERSUS CONVOLUTION INTEGRALS IN OBTAINING RESPONSES OF LINEAR SYSTEMS - A DIDACTIC CASE STUDY

Abstract: *The response of linear systems to an input of a given nature can be obtained by mathematical tools such as algebraic operations of partial fraction expansion of the transfer function of the linear system in question and its anti-transformed Laplace counterpart. However, the response analysis due to changes in the nature of the input signal through the use of such a tool becomes relatively exhaustive and blind in relation to having a previous notion of the response profile. In order to discuss a methodology related to the Laplace transform, an alternative to the design and analysis of response profiles of a linear system subject to different input natures, we explored the use of the convolution theorem, evidencing its complexity of differentiated development and the possibility of abstraction of the response profile to be formed. A mass-damping system is used as the physical model for the study.*

Key-words: *Laplace Transforms, Signals Analysis, Signal Processing, Convolution Integral, Teaching.*