

ANÁLISE DINÂMICA DE PÓRTICOS: UMA OPORTUNIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE UM EVENTO CONTEXTUALIZADO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

Eloiza Gomes* – eloiza@maua.br

Gabriel Loureiro de Lima** – gllima@pucsp.br

Barbara Lutaif Bianchini** – barbara@pucsp.br

Karina Bradaschia Rocha* – karina.rocha@maua.br

Paula Meirelles Bolelli* – paula.bolelli@maua.br

*Instituto Mauá de Tecnologia – IMT

Praça Mauá, 1

CEP 09580-900 – São Caetano do Sul – São Paulo

**Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP

Rua Marquês de Paranaguá, 111

CEP 01303-050 – São Paulo – São Paulo

Resumo: Neste trabalho analisamos, do ponto de vista matemático e da Engenharia Civil, um problema clássico: a análise dinâmica de pórticos. A análise do problema, de sua solução e da teoria que a fundamenta é realizada na perspectiva de futuramente, segundo os preceitos da teoria A Matemática no Contexto das Ciências, empregá-lo na elaboração de eventos contextualizados para o ensino e a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, tais como matriz, sistema de equações lineares, autovalor, autovetor, mudança de base e diagonalização de matrizes. As reflexões realizadas nesse artigo evidenciam o quão vinculado estão os conceitos matemáticos com as situações da Engenharia e, portanto, que, nesse contexto, é possível abordar as Ciências Básicas e a Matemática de forma articulada aos conhecimentos específicos a serem construídos pelos estudantes.

Palavras-chave: Engenharia Civil. Pórticos. Álgebra Linear. Eventos Contextualizados.

1 INTRODUÇÃO

Com o crescimento das aplicações da Álgebra Linear em diferentes áreas do conhecimento, em especial como ferramenta para a compreensão de diversos campos da Física, este conteúdo se tornou cada vez mais presente nos currículos das Engenharias. Podemos citar, por exemplo, a álgebra dos operadores lineares e das matrizes, a álgebra tensorial, a diagonalização de operadores lineares, entre outras aplicações.

Desde que foi incorporada aos currículos dos diferentes cursos de graduação da área de Ciências Exatas, a disciplina de Álgebra Linear se tornou um obstáculo a ser superado pelos estudantes que, em geral, conforme salientam Bianchini e Machado (2009) a partir de Dorier (2002), nela se deparam pela primeira vez com a abstração e com o formalismo matemático que lhes são característicos e essenciais.

Os três primeiros autores deste artigo são membros do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) e do Grupo de Pesquisa A Matemática na Formação Profissional, ambos

sediados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e que atuam em parceria com o Instituto Mauá de Tecnologia. É preocupação recorrente nas investigações de tais Grupos os processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, em especial em cursos nos quais a Matemática não é objetivo final, como é o caso das Engenharias.

Nesta perspectiva, adotamos, em uma de nossas direções de pesquisas, como referencial teórico as ideias da pesquisadora mexicana Patricia Camarena, cuja preocupação central é o estudo da vinculação entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas em diferentes cursos de Ciências Exatas.

Tal referencial, denominado *A Matemática no Contexto das Ciências* (MCC), contempla cinco fases: *curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva*. Maiores detalhes a respeito de cada uma dessas fases podem ser obtidos, por exemplo, em Camarena (2010, 2013). Detemo-nos, neste momento, à fase didática, que compreende o *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo) que tem como principal objetivo “estimular a construção de conhecimento por parte do graduando e o desenvolvimento de habilidades para vinculá-lo às suas futuras áreas de atuação profissional” (LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2018, p. 4).

Do ponto de vista epistemológico, os problemas da Engenharia estão intimamente relacionados aos da Matemática. No âmbito do MoDiMaCo, cabe ao professor evidenciar essa vinculação, o que, de acordo com Camarena (2017), se dá por meio do trabalho com *eventos contextualizados*. Tais eventos, normalmente trabalhados por meio de equipes colaborativas, são concebidos como “problemas ou projetos que desempenham papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem” (CAMARENA, 2013 apud LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2016, p. 8). Para maiores esclarecimentos, consultar Lima; Bianchini e Gomes (2018).

Diante do exposto, o objetivo desse trabalho é analisar, do ponto de vista matemático e da Engenharia, um problema clássico da Engenharia Civil – a análise dinâmica de pórticos – na perspectiva de futuramente empregá-lo na elaboração de eventos contextualizados para o ensino e a aprendizagem de alguns conceitos de Álgebra Linear. A partir de uma resolução do problema, proposta por engenheiros civis, evidenciaremos os conceitos matemáticos nela mobilizados e que poderão ser os objetos de estudo e/ou aplicação em sala de aula nos eventos a serem construídos.

2 O PROBLEMA DOS PÓRTICOS

Os pórticos na engenharia estrutural são formas compostas por elementos lineares (normalmente vigas e colunas), conectados em suas extremidades de forma a não permitir rotações relativas (conexões rígidas). Os pórticos são capazes de resistir a esforços normais (que tendem a esticar ou encurtar a estrutura), cortantes (forças que tendem a cisalhar a estrutura) e, principalmente, aos esforços de flexão (que tendem a curvar a estrutura) e são muito utilizados no travamento de edifícios, principalmente dos mais elevados, em que o padrão com repetições resulta em estruturas hiperestáticas (PAULETTI, 2010).

As vantagens de se utilizar uma estrutura aporricada são que elas possuem menores deflexões (alterações ou desvios da posição natural para um dos lados) e distribuem melhor a carga quando comparadas com uma estrutura composta por viga-pilar (vigas simplesmente apoiadas nos pilares), pois a conexão rígida entre vigas e pilares faz com que os efeitos de flexão sejam também absorvidos pelos pilares. Além disso, a utilização na construção de edifícios do pórtico estrutural rígido de aço tem como vantagens os fatos dos pórticos serem

economicamente viáveis, energeticamente eficientes, os pavimentos não serem tão suscetíveis a vibrações, entre outros fatores.

Com o passar do tempo e devido ao desenvolvimento de novas tecnologias, os sistemas estruturais tornaram-se cada vez mais esbeltos e passíveis de vibrações, sendo necessário, para que se faça corretamente, e conforme as normas técnicas, seu dimensionamento e verificação, o estudo das ações dinâmicas sobre eles atuantes - tais como ventos muito fortes, terremotos ou até mesmo grandes máquinas rotativas que podem ser colocadas dentro desses edifícios. (MAZZILLI et al, 2016)

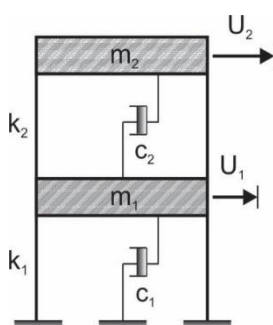
Como é previsto por norma, os edifícios possuem um máximo deslocamento horizontal permitido, que é diretamente proporcional à altura do edifício, considerado tanto como um fator de segurança da estrutura, quanto para o próprio conforto dos usuários. Assim, o objeto de estudo desse trabalho é um pórtico de dois pavimentos, submetido a uma força estática, que fará com que a estrutura vibre livremente.

3 O PROBLEMA E SUA DISCUSSÃO

O pórtico de dois andares representado na Figura 1 possui, sem considerar as vinculações com o solo ou qualquer outro apoio, 18 graus de liberdade (GL), ou seja, 3 GL por nó (há 3 possíveis movimentos que podem ocorrer em cada nó da estrutura, que são o deslocamento horizontal, vertical e rotação). Ainda, como os dois nós da base são engastados no solo (ou seja, os 3 GL são restringidos), a estrutura em questão tem somente 12 GL.

O pórtico, explorado no problema a seguir, é considerado como *shear building* (ou seja, o deslocamento vertical e a rotação são restringidos) e, ainda, a estrutura é simétrica, o que faz com que o modelo passe para um sistema com apenas 2 GL: o deslocamento horizontal no primeiro e no segundo pavimento.

Figura 1 – Pórtico de dois pavimentos



Fonte: Os autores, 2018.

Problema: Considere um pórtico de dois andares. Cada um dos pavimentos tem massa 5000 kg , produto de rigidez $EI = 2,7 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ (em que E é o módulo de elasticidade do material, ou seja, é uma relação entre a tensão e a deformação e I é o momento de inércia, parâmetro que está diretamente relacionado com as dimensões do pilar e que representa a resistência do elemento a um movimento de rotação), pé direito $L = 3 \text{ m}$ e taxa de amortecimento 5%. Uma força estática é aplicada sobre essa estrutura, causando um deslocamento inicial de $2,5 \text{ mm}$ no primeiro pavimento e 5 mm no segundo. Em seguida, essa força é retirada bruscamente e a estrutura passa a vibrar livremente com velocidade inicial nula. Determine as expressões que permitam analisar o comportamento do deslocamento em cada um dos pavimentos em função do tempo.

A seguir, apresentamos, simultaneamente, a solução proposta pelos engenheiros civis para o problema, a teoria que a embasa, conforme presente nas principais referências bibliográficas indicadas nos cursos de Engenharia Civil, e os conceitos de Álgebra Linear que podem ser explorados, a partir do problema pelos professores de Matemática em aulas de cursos de Engenharia, realizadas as adaptações necessárias para a construção de eventos contextualizados.

Para a resolução do problema apresentado, podemos aproveitar a simetria da estrutura e realizar os cálculos considerando apenas uma de suas metades, o que faz com que o problema apresente 2 GL.

A equação de equilíbrio para a situação ilustrada na Figura (1) é descrita por:

$$[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K][U] = 0 \quad (1)$$

em que $[M]$ é a matriz de massa da estrutura (Equação (2)) e $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura (Equação (3)), nas quais as dimensões das matrizes variam de acordo com os GL existentes no problema. As entradas das matrizes $[U]$, $[\dot{U}]$ e $[\ddot{U}]$ representam, respectivamente, as funções que descrevem os deslocamentos, as velocidades e as acelerações definidas pelos respectivos GL.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

No caso específico do problema que está sendo considerado, a matriz de massa $[M]$ é:

$$[M] = \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix}$$

Em seguida, para determinar a respectiva matriz de rigidez, é necessário calcular a rigidez de cada andar a qual, por sua vez, é uma expressão que provém da análise matricial de estruturas. Assim, tem-se:

$$k_1 = k_2 = \frac{24EI}{L^3} = 2,4 \cdot 10^6$$

Sendo os valores de ambos os coeficientes de rigidez iguais a $2,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, a matriz $[K]$ de rigidez do sistema é:

$$[K] = \begin{bmatrix} 4800000 & -2400000 \\ -2400000 & 2400000 \end{bmatrix}$$

Um primeiro aspecto, do ponto de vista matemático, a ser destacado é a mobilização da notação matricial. Além disso, é importante o docente evidenciar que a Equação 1 representa um sistema composto por duas equações diferenciais de segunda ordem linear. Mais um ponto a ser salientado é que, conforme Mazzilli et al. (2016, p. 228), "nos casos usuais, para vibração em torno de configurações estáveis de equilíbrio", as matrizes $[M]$ e $[K]$ são simétricas e positivo-definidas. Novamente evidencia-se a oportunidade dos professores de Álgebra Linear, por meio desse problema, explorarem as particularidades desses tipos de matrizes.

Dando continuidade à resolução do problema, determinamos as frequências naturais considerando, inicialmente, um sistema não amortecido com vibrações livres (Equação (4)).

$$[M][\ddot{U}] + [K][U] = [0] \quad (4)$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais representado pela Equação (4), é obtida a solução $U = \hat{U} \cos(\omega t - \theta)$. Substituindo tal solução na Equação (4), obtemos a Equação (5):

$$\cos(\omega t - \theta) [[K] - \omega^2[M]] \cdot \hat{U} = [0] \quad (5)$$

Para que o sistema homogêneo representado pela Equação (5) possua solução para qualquer valor de t , isto é, seja possível indeterminado, é preciso que o determinante da matriz $[[K] - \omega^2[M]]$ seja igual a zero, ou seja:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (6)$$

Neste momento, o professor de Álgebra Linear pode explorar com os estudantes as condições que devem ser satisfeitas para que um sistema de equações lineares homogêneo, com o mesmo número de equações e de incógnitas, admita infinitas soluções e como tais condições podem ser traduzidas, em termos do determinante, ao se considerar uma abordagem matricial.

A resolução do problema prossegue recorrendo-se ao emprego das noções de autovalores e autovetores. Para isso, denota-se ω^2 por λ e então, por meio de operações matriciais, obtém-se:

$$\begin{aligned} [[K] - \lambda[M]] \cdot \hat{U} = [0] &\Leftrightarrow [M]^{-1} \cdot [[K] - \lambda[M]] \cdot \hat{U} = [M]^{-1} \cdot [0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [[M]^{-1}[K] - \lambda[I]] \cdot \hat{U} = [0] \end{aligned} \quad (7)$$

Denotando $[M]^{-1}[K]$ por $[A]$, a Equação (7) pode ser escrita por: $[[A] - \lambda[I]] \cdot \hat{U} = [0]$. Decorre então que os autovalores (λ) da matriz $[A]$ correspondem ao quadrado da frequência natural (ω^2). Os autovetores, por sua vez, correspondem aos respectivos modos de vibração da estrutura.

No caso do problema em questão, temos que:

$$A = [M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5000} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4800000 & -2400000 \\ -2400000 & 2400000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 & -480 \\ -480 & 480 \end{bmatrix}$$

$$|[A] - \lambda[I]| = \begin{vmatrix} 960 - \lambda & -480 \\ -480 & 480 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1440\lambda + 230400 = 0$$

$$\lambda_1 \cong 183,34 \text{ e } \lambda_2 \cong 1256,66 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \cong 13,54 \text{ e } \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \cong 35,45$$

Logo considera-se $\omega_1 = 13,54 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 35,45 \text{ rad/s}$. Em relação ao autovetores associados aos autovalores determinados temos que:

Autovetor $\Phi_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor λ_1 .

$$\begin{bmatrix} 960 - \lambda_1 & -480 \\ -480 & 480 - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1, \text{ então: } \Phi_1 = \begin{bmatrix} -0,5257 \\ -0,8507 \end{bmatrix}$$

Analogamente para o autovetor associado ao autovalor λ_2 , obtemos: $\Phi_2 = \begin{bmatrix} -0,8507 \\ 0,5257 \end{bmatrix}$

Convém salientar que no desenvolvimento matricial apresentado nos últimos parágrafos, há novamente diferentes conceitos matemáticos que podem ser explorados pelos professores em sala de aula, tais como: a existência e a obtenção da inversa de uma matriz, o produto de matrizes, propriedades das matrizes simétricas, definição de autovalor e de autovetor, obtenção de autovalores e autovetores de matrizes.

Na resolução do problema, foi considerado o chamado "amortecimento proporcional", no qual as propriedades de ortogonalidade dos modos não amortecidos de vibração podem ser estendidas à matriz de amortecimento (MAZZILLI et al, 2016). Neste momento, pode-se explorar o fato dos autovetores serem ortogonais devido à matriz $[A]$ ser simétrica.

No problema proposto, foi utilizado o amortecimento do tipo Rayleigh, no qual a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez (Equação (8)).

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (8)$$

Os coeficientes a_0 e a_1 podem ser obtidos de maneira a garantir que a taxa de amortecimento modal seja igual a um valor especificado ξ_i , para cada modo i de vibração (no caso em que está sendo considerado, há dois modos de vibração). Vamos, no problema em tela, determinar os coeficientes a_0 e a_1 de modo que as taxas de amortecimento modais do primeiro e do segundo modo de vibração sejam iguais a 5%, isto é, $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$. Os coeficientes a_b são as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\sum_b a_b \omega_i^{(2b-1)} = 2\xi_i \quad b \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

No caso particular correspondente ao problema tratado nesse artigo, o sistema é:

$$\begin{cases} a_0 \omega_1^{-1} + a_1 \omega_1 = 2\xi_1 \\ a_0 \omega_2^{-1} + a_1 \omega_2 = 2\xi_2 \end{cases} \quad (10)$$

Em notação matricial, o sistema representado pela Equação (10) equivale ao representado pela Equação (11), apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \\ 2\xi_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Especificamente para o problema em questão, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{13,54} & 13,54 \\ \frac{1}{35,45} & 35,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_0 = 0,9798 \text{ e } a_1 = 0,0020$$

Consequentemente, a matriz de amortecimento (Equação (8)) será:

$$[C] = \begin{bmatrix} 14697 & -4899 \\ -4899 & 9798 \end{bmatrix}$$

A partir dos últimos desenvolvimentos, notamos outros conceitos matemáticos emergentes que podem ser abordados a partir do problema, como por exemplo: resolução de sistemas de

equações lineares, combinação linear, representações alternativas para sistemas de equações lineares (Equação (9) e Equação (11)).

Convém salientar que nosso objetivo principal é resolver o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem representado pela Equação (1): $[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K][U] = 0$, ou seja, desejamos obter a resposta dinâmica desse sistema de 2 GL. Para isso, além do que já foi apresentado, recorreremos ao método da superposição modal, que recorre às já mencionadas propriedades de ortogonalidade para desacoplar o sistema, isto é, convertê-lo em dois problemas de 1 GL. Por meio desse método, faz-se uma mudança de variáveis utilizando a matriz modal $[\Phi]$, ou seja, uma matriz que contém os autovetores associados aos autovalores da matriz $[A]$ (autovetores estes que correspondem aos modos de vibração determinados). Como A é uma matriz simétrica, tem-se que a matriz $[\Phi]$ é ortogonal.

Para o problema considerado, a Equação (1) é:

$$\begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14697 & -4899 \\ -4899 & 9798 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4800000 & -2400000 \\ -2400000 & 2400000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E a matriz modal $[\Phi]$ é dada por: $[\Phi] = \begin{bmatrix} -0,5257 & -0,8507 \\ -0,8507 & 0,5257 \end{bmatrix}$

A mudança de variável anteriormente citada efetiva-se utilizando a seguinte igualdade:

$$[U] = [\Phi][Y] \quad (12)$$

No problema considerado:

$$[U] = [\Phi][Y] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5257 & -0,8507 \\ -0,8507 & 0,5257 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

A partir dessa mudança, obtém-se as seguintes matrizes diagonais:

$$[M_p] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (13) \quad [K_p] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (14)$$

$$[C_p] = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (15)$$

Substituindo Equação (12), Equação (13), Equação (14) e Equação (15) em Equação (1) e utilizando as propriedades das matrizes ortogonais, obtemos a equação de equilíbrio do sistema na nova variável considerada: Y .

$$[M_p][\ddot{Y}] + [C_p][\dot{Y}] + [K_p][Y] = 0 \quad (16)$$

Para o problema em questão essas matrizes são:

$$[M_p] = \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \quad [C_p] = \begin{bmatrix} 6770 & 0 \\ 0 & 17725 \end{bmatrix}$$

$$[K_p] = \begin{bmatrix} 916718 & 0 \\ 0 & 6283282 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema de equações diferenciais correspondentes à Equação (1) na nova variável é:

$$\begin{cases} 5000\ddot{Y}_1 + 6770\dot{Y}_1 + 916718Y_1 = 0 \\ 5000\ddot{Y}_2 + 17725\dot{Y}_2 + 6283282Y_2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

As equações diferenciais de segunda ordem que compõem o sistema anterior podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente, obtendo-se então as funções $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$. Para isso, no entanto, é preciso conhecer as condições iniciais $Y_1(0)$, $Y_2(0)$, $\dot{Y}_1(0)$ e $\dot{Y}_2(0)$. Tais condições são obtidas a partir das condições iniciais nas variáveis originais que, no caso do problema considerado são: $U_1(0) = 0,0025$, $U_2(0) = 0,005$, $\dot{U}_1(0) = 0$ e $\dot{U}_2(0) = 0$.

Vamos então calcular $Y_1(0)$, $Y_2(0)$, $\dot{Y}_1(0)$ e $\dot{Y}_2(0)$ para o problema em questão:

$$[U] = [\Phi][Y] \Leftrightarrow [Y] = [\Phi]^T[U]$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5257 & -0,8507 \\ -0,8507 & 0,5257 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,00557 \\ 0,00050 \end{bmatrix}$$

Portanto, as condições iniciais na variável Y são:

$$Y_1(0) = -0,00557m \text{ e } Y_2(0) = 0,00050m.$$

De maneira análoga, utilizando $[\dot{Y}] = [\Phi]^T[\dot{U}]$, como $\dot{U}_1(0) = 0$ e $\dot{U}_2(0) = 0$, obtemos que:

$$\dot{Y}_1(0) = 0 \text{ e } \dot{Y}_2(0) = 0.$$

De posse das condições iniciais na variável Y , obtemos a solução do sistema representado pela Equação (17):

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= -0,00557 \cdot e^{-0,677t} \cdot \cos(13,52t - 0,05) \\ Y_2(t) &= 0,00557 \cdot e^{-1,772t} \cdot \cos(35,45t - 0,05) \end{aligned}$$

Após determinar as funções $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$, será possível obter a resposta dinâmica do sistema original com dois GL a partir das funções $U_1(t)$ e $U_2(t)$, utilizando a Equação (12).

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5257 & -0,8507 \\ -0,8507 & 0,5257 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,00557 \cdot e^{-0,677t} \cdot \cos(13,52t - 0,05) \\ 0,00050 \cdot e^{-1,772t} \cdot \cos(35,45t - 0,05) \end{bmatrix}$$

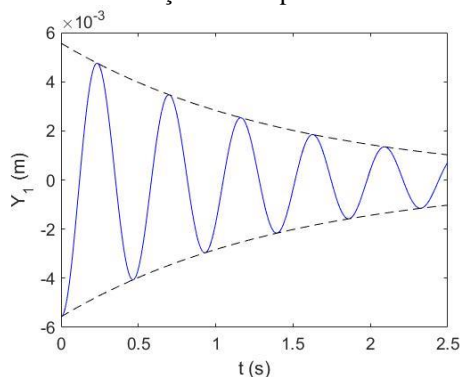
$$U_1(t) = 0,00293 \cdot e^{-0,667t} \cdot \cos(13,52t - 0,05) - 0,00043 \cdot e^{-1,772t} \cdot \cos(35,45t - 0,05)$$

$$U_2(t) = 0,00474 \cdot e^{-0,667t} \cdot \cos(13,52t - 0,05) + 0,00026 \cdot e^{-1,772t} \cdot \cos(35,45t - 0,05)$$

A partir desse processo de mudança de variável realizado para resolver mais facilmente o sistema de equações diferenciais de segunda ordem representando pela Equação (1), podemos explorar, do ponto de vista da Álgebra Linear, os seguintes conteúdos: diagonalização de matrizes, que na situação em questão é sempre possível uma vez que as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são simétricas; mudança de base (e, neste processo também a ortonormalização de vetores) e a aplicação das noções de autovalor e de autovetor para a resolução de sistemas de equações diferenciais.

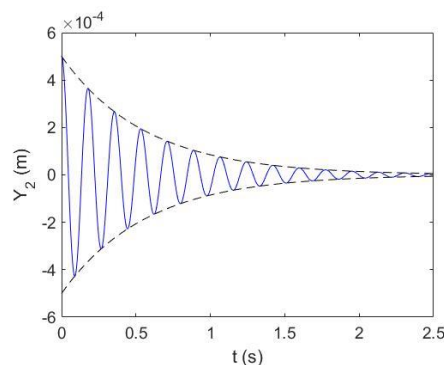
Podemos representar graficamente as funções $U_1(t)$ e $U_2(t)$ (Figura (2) e Figura (3), respectivamente). Da mesma forma, pode-se explorar a Figura (4), que representa, conjuntamente, o comportamento das funções $U_1(t)$ e $U_2(t)$.

Figura 2 – Representação gráfica de Y_1 em função do tempo



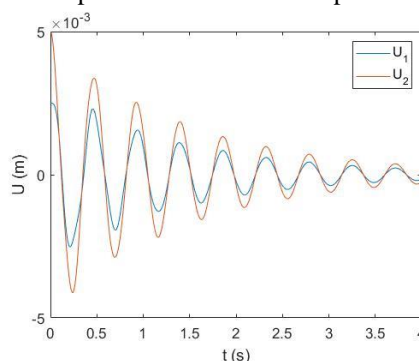
Fonte: Os autores, 2018.

Figura 3 – Resposta da variável Y_2 no tempo



Fonte: Os autores, 2018.

Figura 4 – Resposta dinâmica final do problema proposto



Fonte: Os autores, 2018.

Essas representações gráficas podem ser exploradas em aulas de Matemática. Por exemplo, por meio da Figura (2) e da Figura (3), evidencia-se uma aplicação do teorema do confronto para limite de uma função real de uma variável. Neste sentido, nota-se que tal problema, no qual tratamos nesse artigo, pode ser utilizado, também, para eventos contextualizados em outras áreas da Matemática que não a Álgebra Linear.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema considerado evidencia o quão vinculado estão os conceitos matemáticos com as situações da Engenharia e, portanto, o quanto podemos, nesse contexto, abordar as Ciências Básicas e a Matemática de forma articulada aos conhecimentos específicos a serem construídos pelos futuros engenheiros.

Abordagens segundo esta orientação demandam, por sua vez, estreito diálogo entre engenheiros, matemáticos e demais docentes das Ciências Básicas, no sentido de o engenheiro auxiliar os matemáticos, os físicos, os químicos, etc., na compreensão do problema, sob o ponto de vista da Engenharia, e estes professores responsáveis pelas disciplinas de Matemática e de Ciências Básicas auxiliarem os engenheiros a perceberem a conexão – e evidenciá-la aos estudantes - dos conteúdos com que trabalharam com aqueles que os graduandos estudaram anteriormente nas disciplinas das áreas básicas.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Barbara L.; MACHADO, Silvia D. A. Noções básicas de Álgebra Linear: o que revelam as pesquisas do GPEA? In: IV SIPEM. Taguatinga - DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Anais**. 2009.

CAMARENA, Patricia. *Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería*, 2010. **Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica**.

Disponível em:

<http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf> - Acesso em 28 de janeiro de 2016.

_____. A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". **Innovación Educativa**, vol. 13, n. 62, 2013.

_____. Didáctica de la matemática en contexto. **Educación Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 2, p. 01-26, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26>.

DORIER, Jean- Luc. Teaching Linear Algebra at University. In: ICM, 2002, Beijing, China. **Anais**. 2002.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Conhecimentos Docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. **Educación Matemática Debate**, Montes Claros, v. 2, n. 4, jan./abr. 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06>

LIMA, Gabriel L.; BIANCHINI, Barbara L.; GOMES, Eloiza. *Dicping*: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de Matemática em cursos de Engenharia. In: XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2016, Natal. **Anais**. 2016.

MAZZILLI, Carlos Eduardo Nigro *et al.* **Lições em mecânica das estruturas: dinâmica**. São Paulo: Blucher, 2016.

PAULETTI, Ruy Marcelo de Oliveira. **Pórticos**. Palestra/ Notas de aula da Universidade de São Paulo. 2010. Disponível em: <<http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2602/pef2602-2010-porticos.pdf>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

DYNAMIC ANALYSIS OF FRAMES: AN OPORTUNITY TO CONSTRUCT A CONTEXTUALIZED EVENT FOR LINEAR ALGEBRA TEACHING AND LEARNING

Abstract: *In the current work, we analyzed from both mathematic and Civil Engineer points of view a classical problem: the dynamic analysis of a frame. The analysis, theory and solution of the problem are approached in order to use it in the preparation of contextualized events, according to the precepts of The Mathematics in the Context of Sciences, for teaching and learning concepts of Linear Algebra, such as matrix, linear equations system, eigenvalue, eigenvector, change of basis and matrix diagonalization. Considerations in this article show how linked the mathematical concepts and Engineering situations are. Therefore, it is possible to study the Basic Sciences and Mathematics in this context in an articulated way to the specific knowledge to be constructed by students.*

Key-words: Civil Engineer, Frame, Linear Algebra, Contextualized Events.