



## UTILIZAÇÃO DE UMA BIBLIOTECA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS NO ESTADO UNIAXIAL, PLANO E TRIDIMENSIONAL DE TENSÃO

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2022.3965

Ana Caroline dos Santos - caroline.ana@academico.ifpb.edu.br  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba

Evilly Raquel Henrique da Silveira - evilly.raquel@academico.ifpb.edu.br  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba

Sebastião Simão da Silva - sebastiao\_simao@yahoo.com.br  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba

Adenilda Timóteo Salviano - adenilda.salviano@academico.ifpb.edu.br  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba

**Resumo:** *As análises de problemas estruturais e geotécnicos podem ser realizadas por meio de diversos métodos, entretanto, a viabilidade do uso de alguns se torna limitada com o aumento da complexidade dos problemas. Diante disso, cada vez mais tem-se utilizado métodos numéricos como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este trabalho utilizou uma biblioteca de elementos finitos uniaxiais, planos e tridimensionais construída a partir das formulações de elementos finitos clássicos da literatura e disponibilizada periodicamente na disciplina Introdução ao Método dos Elementos Finitos do curso de engenharia civil. Os resultados das análises comprovaram a boa qualidade da implementação, quando comparados com os apresentados na literatura e/ou calculados por meio de um software comercial. Assim, depreende-se que os códigos computacionais utilizados neste trabalho possuem um considerável potencial de aplicação no ensino didático do MEF e para a iniciação científica, contribuindo dessa forma para a solidificação e disseminação dos fundamentos do método.*

**Palavras-chave:** *Método dos elementos finitos, códigos computacionais*



# UTILIZAÇÃO DE UMA BIBLIOTECA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS NO ESTADO UNIAXIAL, PLANO E TRIDIMENSIONAL DE TENSÃO

## 1 INTRODUÇÃO

As atuais concepções de projetos e imposições normativas estão demandando análises cada vez mais complexas. Diante deste cenário, surge como alternativa às soluções numéricas, que vêm sendo cada vez mais exploradas por meio de alguns métodos, dentre os quais o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Segundo Heleno (2011, p.5), o MEF baseia-se em discretizar uma estrutura em elementos finitos, que podem ser aplicados para análises lineares ou não-lineares, para os sistemas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais.

Atualmente, o MEF se faz presente em muitos softwares de análise usados na engenharia civil. Entretanto, de acordo com Azevedo (2003), a utilização dessas ferramentas sem uma base de conhecimento mais consistente acarreta em erros. Além disto, a maioria destes softwares comerciais apresentam limitações de uso para fins didáticos.

Com isso, é possível perceber que são necessárias pesquisas para a validação de códigos computacionais simples e de livre acesso, tanto para a introdução de conceitos sobre o MEF e entendimento dos softwares comerciais comumente utilizados, quanto para o desenvolvimento de códigos mais complexos a partir deles.

Assim, diante do exposto, este trabalho pretende mostrar como os códigos numéricos podem contribuir para o entendimento didático de alguns tipos de elementos finitos e suas aplicações. Para tanto utilizou-se uma biblioteca de elementos finitos uniaxiais, planos e tridimensionais disponibilizados periodicamente em uma disciplina de introdução ao Método dos Elementos Finitos de um curso de Engenharia Civil, para analisar problemas estruturais e geotécnicos disponíveis na literatura.

## 2 ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D E 3D

De acordo com Azevedo (2003), o MEF requer uma formulação que contenha uma integral para que seja possível substituir um domínio complexo de volume  $V$ , por uma somatória de integrais com subdomínios de geometria mais simples, de volume  $V_i$ :

$$\int_V f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (1)$$

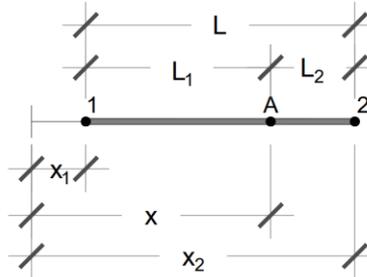
Esses subdomínios correspondem aos elementos finitos sejam eles unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Além disso, muitas integrais aplicadas ao MEF não são triviais, ou são complexas para utilização prática. É devido a isso que se recorre a integração numérica, que também recebem a designação de quadratura.

Além disso, este método consiste em obter uma solução aproximada, o que gera erros ou resíduos. Conforme afirma Luersen (2000), uma boa aproximação é aquela em que os resíduos são minimizados.

## 2.1 Elementos finitos unidimensionais

Seja o elemento finito unidimensional isoparamétrico, ilustrado na Figura 1. De acordo com Logan (2016), a formulação deste elemento utiliza as coordenadas naturais  $\xi$ , definidas pela geometria do elemento. Essas coordenadas, segundo Vázquez e López (2001), são adimensionais, e neste caso, estão relacionadas com as longitudes.

Figura 1 - Elemento unidimensional isoparamétrico.



Fonte: Autores, 2022.

A função de deslocamento para um dos elementos da barra apresentada, é igual a:

$$\tilde{u}(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (2)$$

em que  $N_i$  são as funções interpoladoras e  $u_i$  são os deslocamentos nodais. Já as deformações são definidas de forma que:

$$\varepsilon = [B]\{u\} \quad (3)$$

em que a matriz  $[B]$  é chamada de matriz das deformações. Neste caso, a lei de Hooke escrita de forma generalizada obedece a expressão:

$$\sigma = [D]\varepsilon = [D][B]\{u\} \quad (4)$$

na qual  $[D]$  é a matriz constitutiva. E a matriz de rigidez do elemento é igual a:

$$[k] = \int_0^L [B]^T [D] [B] A dx \quad (5)$$

sendo a matriz  $[B]$  função da coordenada cartesiana  $x$ .

Nesta situação se faz fundamental a utilização do Jacobiano  $[J]$ , que segundo Logan (2016), relaciona um comprimento de um elemento em coordenada cartesiana com um em coordenadas naturais. Logo  $[J]$  é função de  $\xi$ :

$$|J| = \frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (6)$$

Voltando a matriz de rigidez, de acordo com Fish e Belytschko (2007), em uma dimensão a matriz  $[D]$  será igual ao módulo de elasticidade  $E$ . Aplicando as transformações necessárias para esta situação em (5), tem-se:

$$[k] = \frac{L}{2} \int_0^2 [B]^T E [B] A d\xi \quad (7)$$

## 2.2 Elementos finitos bidimensionais

Estruturas estão em um sistema bidimensional quando duas de suas dimensões são muito maiores que a terceira (espessura). Assim as tensões atuantes e as deformações geradas nestes elementos, são iguais, respectivamente, a:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

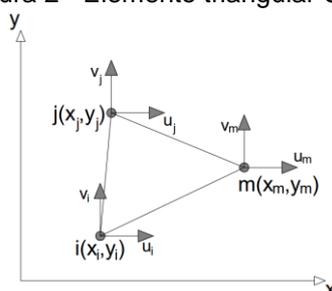
A matriz de rigidez para o elemento é obtida através da expressão:

$$[k] = \int_{A_e} [B]^T [D] [B] t dA_e \quad (10)$$

em que  $t$  é a espessura da estrutura, e  $A_e$  é a área do elemento.

Vários elementos bidimensionais foram desenvolvidos e suas formulações são encontradas na extensa literatura do MEF. A Figura 2 apresenta um elemento finito bidimensional, denominado elemento triangular CST.

Figura 2 - Elemento triangular CST.



Fonte: Autores, 2022.

As funções de deslocamento para o elemento triangular CST são iguais a:

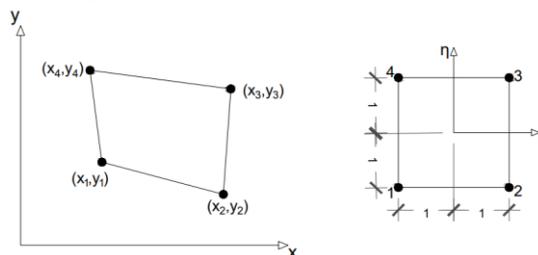
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Para o presente elemento a matriz de rigidez será equivalente a:

$$[k] = [B]^T [D] [B] t A_e \quad (12)$$

Além do elemento finito triangular CST, outro que pode ser usado em análises bidimensionais são os quadriláteros de 4 nós, conforme ilustrado Figura 3.

Figura 3 - Elemento quadrilátero Q4.



Fonte: Autores, 2022.

Trata-se de um elemento isoparamétrico, logo é definido pelas coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ . E as funções de deslocamento são equivalentes a Equação (11). Além disto, mais uma vez é preciso utilizar o Jacobiano, sendo ele igual a:

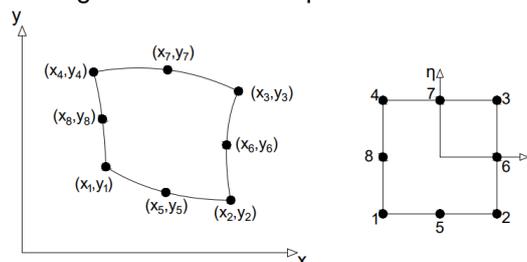
$$[J_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Desenvolvendo as formulações do elemento chega-se na expressão da matriz de rigidez, a qual é dada por:

$$[k_e]_{(8 \times 8)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t \det [J_e] d\xi d\eta \quad (14)$$

O elemento quadrilátero pode ter 8 nós, como ilustrado na Figura 4, que, segundo Logan (2016), é de ordem superior. Essa adição de pontos resulta em uma matriz de funções de forma com mais termos, o que melhora a convergência do elemento.

Figura 4 - Elemento quadrilátero Q8.



Fonte: Autores, 2022.



Para obter a matriz de rigidez para este elemento, o procedimento é idêntico ao realizado para o quadrilátero de 4 nós, ou seja, chegando-se a uma expressão semelhante a Equação (14). Assim como, as funções de deslocamento são análogas a Equação (11).

### 2.3 Elementos finitos tridimensionais

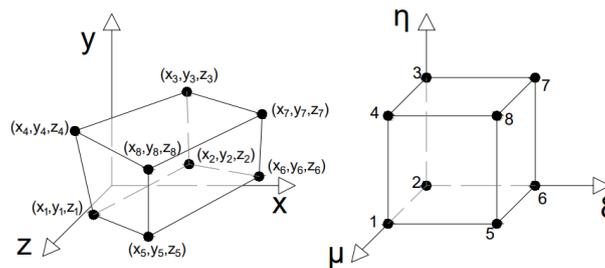
Sólidos tridimensionais possuem as três dimensões de magnitude significativa, não devendo-se considerar a anulação de tensões e deformações em nenhuma direção. Neste caso, as deformações passam a ser calculadas por meio de:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} \quad (16)$$

Existem na literatura alguns tipos de elementos finitos que podem ser utilizados na discretização de sólidos 3D. Um dos mais simples é o hexaédrico de 8 nós (Figura 5).

Figura 5 - Elemento Hexaédrico de 8 nós (H8).



Fonte: Autores, 2022.

As funções de deslocamento para o elemento, obedece a expressão:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{(3 \times 24)} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

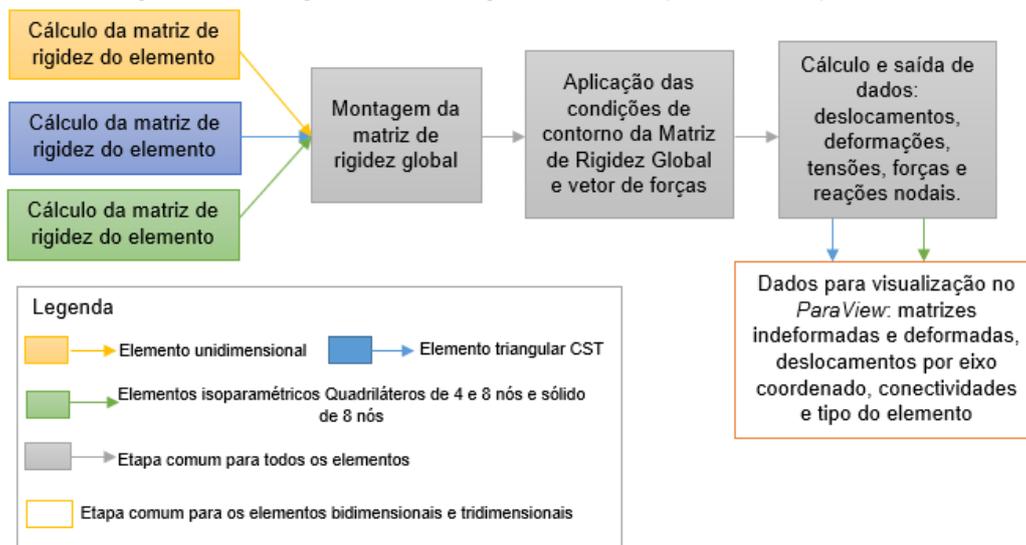
Neste caso irá surgir uma terceira coordenada natural  $\mu$ . Além disso, esse elemento é isoparamétrico, logo, também é preciso o Jacobiano para realizar as transformações das coordenadas cartesianas para as naturais. Assim, expande-se a Equação (13), obtendo:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Já a matriz de rigidez para o elemento é obtida utilizando a expressão:



Figura 7 - Fluxograma dos códigos numéricos para análise pelo MEF.



Fonte: Autores, 2022.

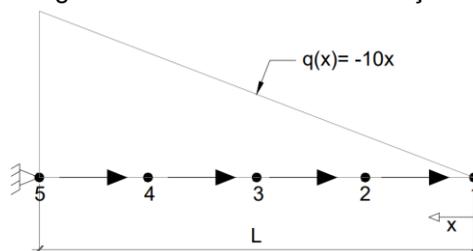
## 4 Exemplos Numéricos

Alguns problemas numéricos clássicos da literatura foram selecionados para aplicação dos elementos finitos implementados.

### 4.1 Barra submetida a tração

A estrutura ilustrada na Figura 8, possui comprimento  $L=60uc$  (unidade de comprimento), área transversal  $A=2uc^2$  (unidade de área), módulo de elasticidade  $E=30 \times 10^6 uf/uc^2$  (unidade de força/unidade de área), e está submetida a um carregamento distribuído linearmente, expresso pela equação  $q(x) = -10x$ .

Figura 8 - Barra submetida a tração.



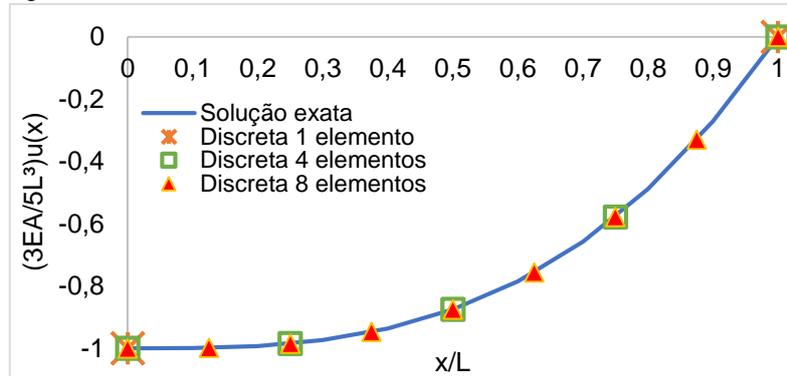
Fonte: Autores, 2022.

Para este exemplo, utilizou-se os elementos finitos isoparamétricos unidimensionais discretizados em 3 malhas com 1, 4 e 8 elementos. Os resultados foram comparados com a solução exata de deslocamentos nodais expresso pela Equação (20).

$$\frac{3EA}{5L^3} u(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 1 \quad (20)$$

De acordo com a Figura 9, é possível observar a convergência dos resultados numéricos com a solução exata à medida que ocorre um refinamento da malha. Diante da relativa simplicidade do problema, observou-se que com apenas 4 elementos obtêm-se a solução exata.

Figura 9 - Gráfico dos deslocamentos obtidos através do *1Dbar\_iso.sce*.

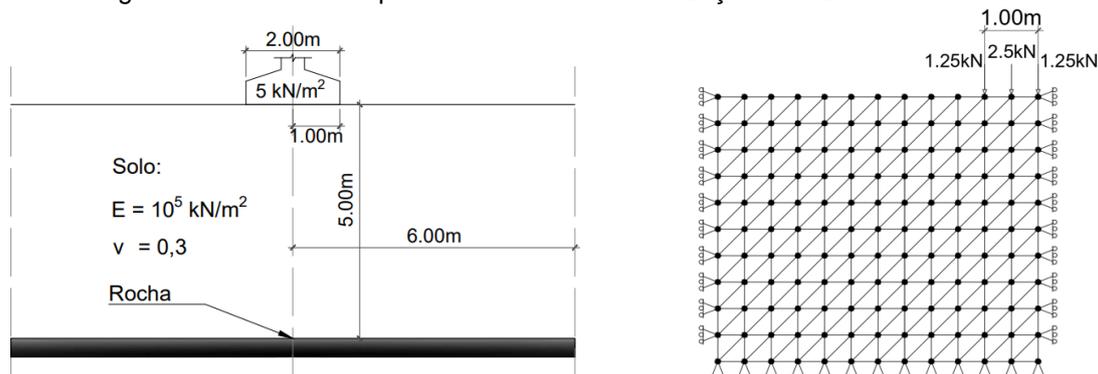


Fonte: Autores, 2022.

#### 4.2 Solo sob sapata corrida

O elemento finito triangular CST foi aplicado para a analisar um maciço de solo sob uma sapata corrida, cuja características estão ilustradas na Figura 10 (a). Esta conta com 2m de largura, com distribuição de carga uniformemente de 5 kN/m<sup>2</sup>. A Figura 10 (b) apresenta uma das discretizações realizadas para a estrutura.

Figura 10 – Solo sob sapata corrida e sua discretização com 240 elementos.



(a) Solo sob sapata corrida.

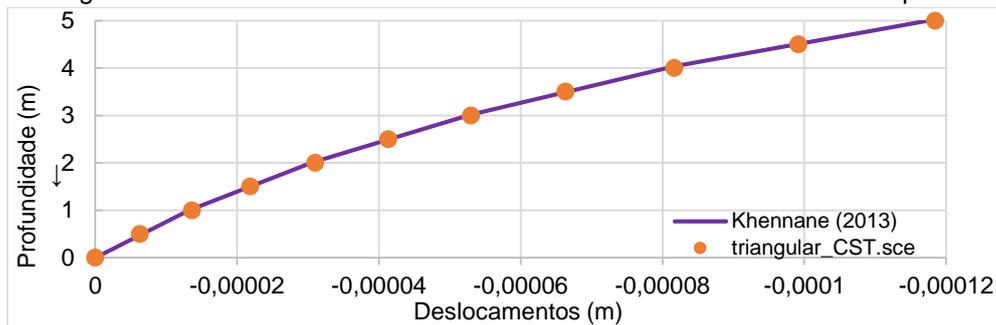
(b) Discretização com 240 elementos.

Fonte: Autores, 2022.

Trata-se de um sistema tridimensional, porém, considerando as condições do estado plano de deformação, pode-se analisar o problema como bidimensional utilizando a espessura de solo de 1 m. Além disso, para não haver deslocamentos e tensões no eixo z, paralelo a espessura, foi considerado também que a uma distância de 6m do centro da sapata, as deformações podem ser desprezadas. E tendo em vista a simetria do conjunto, apenas metade do maciço foi analisado. Para este problema foram realizadas 3 discretizações com 240, 540, e 960 elementos.

Utilizou-se o programa *triangular\_CST.sce* e ao *ABAQUS STUDENT 2020* para realização da análise. Os resultados foram inicialmente comparados com os obtidos por Khennane (2013) e pelo software *triangular\_CST.sce*. O gráfico na Figura 11 apresenta a variação dos deslocamentos em relação a profundidade sob o centro da sapata para a malha de 240 elementos. É possível perceber que os deslocamentos obtidos através do programa *triangular\_CST.sce* são iguais aos encontrados pelo autor, o que mostra uma boa precisão do código utilizado.

Figura 11 - Gráfico dos deslocamentos verticais abaixo do centro da sapata.



Fonte: Autores, 2022.

Deslocamentos ligeiramente maiores foram encontrados à medida que houve o refinamento da malha. Isso foi averiguado através de um estudo comparativos com as diversas malhas e utilizando o sistema ABAQUS®. A Tabela 1 apresenta os deslocamentos verticais máximos obtidos na posição abaixo do centro da sapata. Os resultados obtidos entre o código *triangular\_CST.sce* e o software comercial, são coincidentes para as três malhas analisadas. Dessa forma, fica comprovada a validade da ferramenta utilizada.

Tabela 1 - Deslocamento vertical máximo abaixo do centro da sapata.

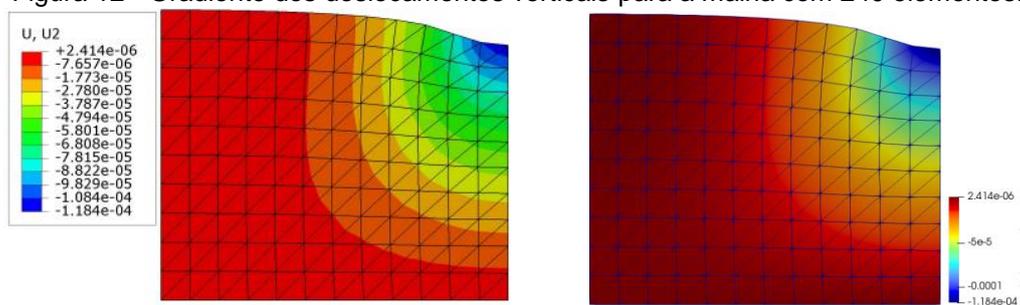
**Solo Sob Sapata Corrida**

Números de Elementos	ABAQUS® (CPS3)	<i>triangular_CST.sce</i>
240	-1,184×10 <sup>-4</sup>	-1,184×10 <sup>-4</sup>
540	-1,200×10 <sup>-4</sup>	-1,201×10 <sup>-4</sup>
960	-1,204×10 <sup>-4</sup>	-1,204×10 <sup>-4</sup>

Fonte: Autores, 2022.

A Figura 12 mostra o gradiente dos deslocamentos verticais para a malha com 240 elementos utilizando o ABAQUS® e o *triangular\_CST.sce*. Neste caso a visualização da resposta foi realizada através do Paraview. É possível perceber a semelhança das representações gráficas, apresentando o comportamento físico esperado.

Figura 12 - Gradiente dos deslocamentos verticais para a malha com 240 elementos.



(a) ABAQUS®.

(b) *triangular\_CST.sce*.

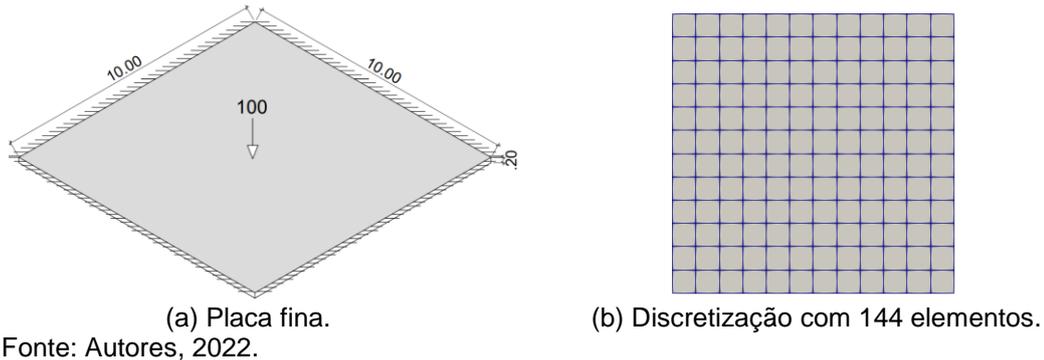
Fonte: Autores, 2022.

### 4.3 Placa fina

O elemento sólido foi aplicado a uma placa fina com dimensões 10×10×0,2uc (unidade de comprimento), submetida a uma força concentrada no centro de 100uf (unidade de força), com todas as bordas engastadas, apresentada na Figura 13 juntamente com uma

de suas discretizações. O módulo de elasticidade é igual a  $E = 3 \times 10^7$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Trata-se também de uma peça simétrica e, assim como visto anteriormente, para a discretização é possível utilizar apenas uma parte da mesma (neste caso  $\frac{1}{4}$  da placa). As condições de contorno precisaram ser compatibilizadas, restringindo os deslocamentos dos nós no eixo ortogonal aos locais do corte na estrutura. Além disso, a carga também foi adaptada, sendo utilizada  $\frac{1}{4}$  da mesma, 25uf. Foram realizadas discretizações com o elemento sólido de 8 nós (*programa\_H8.sce*), com 4 malhas:  $N_e = 16$  ( $4 \times 4 \times 1$ ),  $N_e = 144$  ( $12 \times 12 \times 1$ ),  $N_e = 400$  ( $20 \times 20 \times 1$ ) e  $N_e = 1600$  ( $40 \times 40 \times 1$ ).

Figura 13 – Placa fina e sua discretização com 144 elementos.

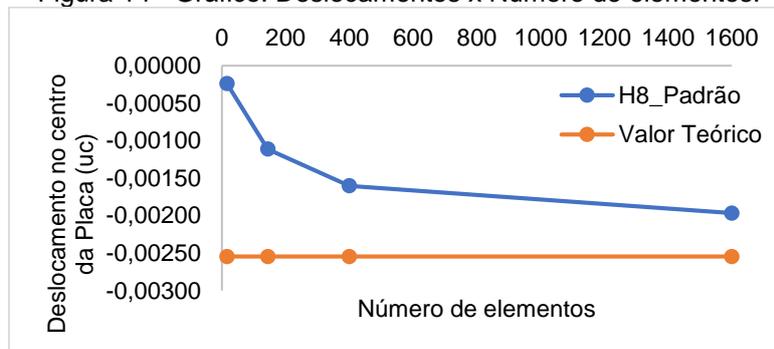


O comportamento dessa placa é conhecido, assim o valor teórico do deslocamento no centro é dado por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) através da equação (21):

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{0.0056 \times F \times L^2}{D} \quad \text{onde, } D = \frac{E \times t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (21)$$

Logo, os resultados obtidos através das discretizações foram comparados com o valor teórico. Observando a Figura 14, percebe-se que as malhas menores apresentam resultados de deslocamentos, medidos no centro da placa, mais distantes do valor teórico. Ao refinar as malhas, é possível observar uma melhora na resposta, chegando erros relativos de 37,06% para  $N_e = 400$  e 22,74% para  $N_e = 1600$ . Entretanto, o aumento significativo no número de elementos não apresentou uma rápida aproximação para o valor teórico. Isso pode ter sido causado pelos efeitos de torção desenvolvidos no interior da placa e que não são capturados pela formulação. Sendo assim, para a obtenção de resultados melhores, seria necessário usar uma malha ainda mais densa.

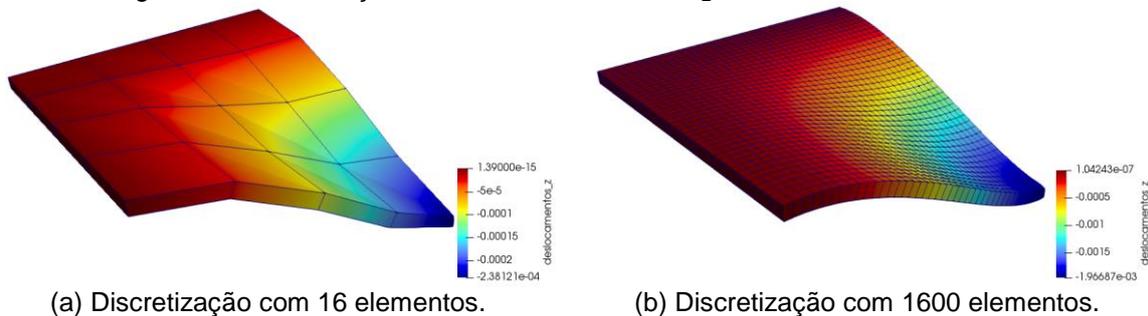
Figura 14 - Gráfico: Deslocamentos x Número de elementos.



Fonte: Autores, 2022.

A Figura 15 ilustra o comportamento físico da placa, sendo condizente com as condições geométricas e de carregamento da estrutura.

Figura 15 - Visualização através do ParaView do gradiente dos deslocamentos.



Fonte: Autores, 2022.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho utilizou-se uma biblioteca de elementos para a realização de análises lineares elásticas de problemas estruturais e geotécnicos. Os códigos utilizados foram implementados com a linguagem Scilab e são aplicados semestralmente na Disciplina Introdução ao Método dos Elementos Finitos do Curso de Engenharia Civil. Por se tratar de tratar códigos abertos se tornam uma opção frente as limitações que softwares comerciais possui em suas versões estudantis. A partir dos resultados obtidos, pode-se perceber a viabilidade de utilização da biblioteca, uma vez que os resultados apresentados são compatíveis com aqueles encontrados na literatura e por meio do ABAQUS.

Observa-se que no estudo, ensino e aprendizagem do MEF torna-se importante o estudo mais aprofundado dos conceitos e formulações. Este ensino e aprendizagem pode ser catalisado com a utilização de rotinas condizentes com os conceitos e formulações estudadas. Por outro lado, o entendimento sobre o MEF facilita a compreensão das etapas pelo qual percorrem um software comercial, evitando erros devido a, por exemplo, incorreta entrada de dados e escolha de elementos.

Por fim, conclui-se que a formulação descrita e os códigos utilizados neste trabalho possuem um considerável potencial de aplicação para análise de problemas práticos da engenharia, no ensino didático do MEF e para a iniciação científica. Futuramente pretende-se realizar um estudo quali-quantitativo sobre a aprendizagem dos alunos da Disciplina em relação a utilização dos códigos.

## REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos elementos finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. 248 p.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A first course in finite elements**. S. L: Wiley, 2007. 319 p.

HELENO, Aline Fernandes. **Análise inversa da prova-de-carga em uma sapata rígida utilizando o método dos elementos finitos**. 2011. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2011.



KHENNANE, Amar. **Introduction to finite element analysis using MATLAB and ABAQUS**. [S. l.]: Crc Press, 2013. 487 p.

LOGAN, Daryl L. **A first course in the finite element method**. 6. ed. S. L: Cengage Learning, 2016. 992 p.

LUERSEN, Marco Antônio. **Métodos numéricos para a engenharia: introdução ao método dos elementos finitos: fundamentos teóricos**. S. L: McGraw-Hill, 2000. CEFET/PR, Departamento de Engenharia Mecânica.

VÁZQUEZ, Manuel; LOPEZ, Eloisa. **El metodo de los elementos finitos aplicado al analisis estructural**. Madri: Editorial Noela, 2001. 499 p.

TIMOSHENKO, S. P; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. 2. ed. McGraw-Hill, 1959.

## EVALUATION OF A LIBRARY OF FINITE ELEMENTS FOR THE ANALYSIS OF PROBLEMS IN THE UNIAXIAL, PLANE AND THREE-DIMENSIONAL STRESS STATE

**Abstract:** *The analysis of structural and geotechnical problems can be performed using several methods, however, the feasibility of using some becomes limited with the increase in the complexity of the problems. Therefore, numerical methods have been increasingly used, such as the Finite Element Method (FEM). This work used a library of uniaxial, plane and three-dimensional finite elements built from classical finite element formulations in the literature and made available periodically in the discipline Introduction to the Finite Element Method of the Civil Engineering course. The results of the analyzes proved the good quality of the implementation, when compared with those presented in the literature and/or calculated using commercial software. Thus, it appears that the computer codes used in this work have considerable potential for application in the didactic teaching of the FEM and for scientific initiation, thus contributing to the solidification and dissemination of the method's foundations.*

**Keywords:** *Finite element method, computer codes.*

