



## TENSORA: FERRAMENTA DE SUPORTE AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE DE TENSÕES EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2023.4419

João Victor Rosa Cruz - joao.cruz@ctec.ufal.br  
Universidade Federal de Alagoas

Evyllyn dos Santos Vieira - evyllyn.vieira@ctec.ufal.br  
Universidade Federal de Alagoas

Eduardo Toledo de Lima Junior - limajunior@lccv.ufal.br  
Universidade Federal de Alagoas

**Resumo:** A análise das estruturas configura-se como uma temática essencial para formação e atuação do estudante de engenharia civil no mercado. Para além das complexidades observadas na compreensão dos equacionamentos da mecânica dos sólidos, existe a necessidade do aluno de solucionar e verificar uma grande diversidade de exercícios no processo de aprendizagem. Nesse contexto, o uso de programas computacionais atua como uma ferramenta de auxílio ao estudante, permitindo uma maior compreensão do comportamento das estruturas a partir da interpretação dos resultados apresentados pela máquina. Dessa forma, este trabalho apresenta a ferramenta educacional Tensora, implementada para a análise do estado plano de tensões em um ponto material. A ferramenta conta com a implementação da formulação para cálculo das tensões principais e tensões extremas de cisalhamento através de uma interface gráfica de fácil utilização pelo usuário. Além disso, o aplicativo apresenta os resultados destas análises de maneira gráfica, possibilitando ao estudante uma melhor visualização e compreensão do comportamento do ponto material sujeito às tensões no plano. As implementações desenvolvidas na ferramenta foram elaboradas utilizando a linguagem de programação Python e a interface gráfica foi criada a partir do ambiente Qt Designer. Por fim, a validação do software desenvolvido neste trabalho é realizada por meio da análise de aplicações com resultados disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Mecânica dos sólidos, estado plano de tensões, interface gráfica, Python, Qt Designer

## TENSORA: FERRAMENTA DE SUPORTE AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE DE TENSÕES EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS

### 1 INTRODUÇÃO

No contexto das engenharias, a estrutura é um sistema composto de elementos que se relacionam entre si, desempenhando a função de transmitir as forças solicitantes até o meio equilibrante. Conforme Martha (2011), a análise estrutural é definida como a fase de idealização do comportamento de uma estrutura, que pode ser expresso por campos de tensões, deformações e deslocamentos. A concepção e o projeto estrutural constituem etapas fundamentais para garantir a segurança e o bom funcionamento de elementos e sistemas presentes em problemas de engenharia em geral. Assim, faz-se necessária a boa formação do profissional de engenharia, permitindo um adequado conhecimento dos efeitos causados pelas ações nas estruturas.

Nesse contexto, uma das maiores dificuldades observadas no ensino das matérias de estruturas diz respeito à complexidade das formulações que descrevem os métodos de análise estrutural. Outrossim, os estudantes de engenharia encontram-se diante da necessidade de resolução de uma grande diversidade de problemas, apresentados, por exemplo, no contexto de elementos de máquinas, sistemas mecânicos, estruturas civis, dentre outros. Diante disto, a utilização de programas computacionais pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que permite a realização dos cálculos de forma expedita, servindo como ferramenta de verificação e interpretação dos resultados obtidos em cálculos manuais. Segundo Valente (1999), o computador torna-se uma ferramenta de ensino, à medida que fornece condições para o estudante apresentar a resolução de problemas, refletir sobre os resultados e aperfeiçoar suas ideias acerca de um assunto.

No campo das disciplinas básicas de engenharia de estruturas, pode-se citar algumas iniciativas para automatização de cálculos e suporte ao estudante. O *software Ftool* (2017), amplamente difundido entre os estudantes e profissionais de engenharia, permite a análise de estruturas planas quaisquer, em regime linear. Dados de material, geometria, vínculos e carregamentos são inseridos por meio de uma interface gráfica amigável, a qual também provê a visualização de resultados como deslocamentos, esforços internos solicitantes e reações de apoio. Outra ferramenta que se presta à análise estrutural de estruturas reticuladas planas é o *AcadFrame* (2006), este contemplando uma abordagem geometricamente não-linear, necessária à análise de estruturas mais esbeltas, sujeitas a grandes deslocamentos. França (2019) apresenta uma ferramenta para análise estrutural linear disponibilizada na *web*, que incorpora recursos de visualização dinâmica dos resultados. No que diz respeito à mecânica dos sólidos deformáveis, Silva e Ricardo (2022) propõem uma ferramenta para avaliação de parâmetros importantes ao estudo de mecânica dos sólidos e dos solos.

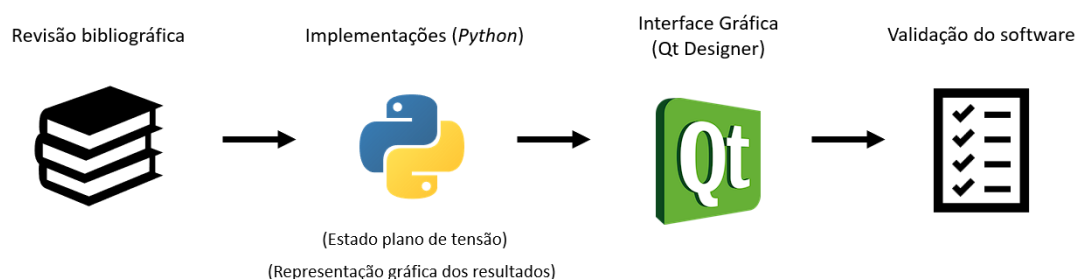
Segundo Hibbeler (2010), tensão é a medida das forças internas que atuam em um corpo sob ação de uma solicitação. Dentre os tópicos abordados no estudo da resistência dos materiais, a análise de tensões trata-se de uma temática que permite o conhecimento das ações solicitantes nas estruturas através do estudo dos infinitos pontos materiais que a compõem. O presente trabalho possui como objetivo apresentar o *software Tensora*,

desenvolvido para análise de tensões em estado plano, contemplando o cálculo e a visualização de tensões principais e tensões extremas de cisalhamento em um ponto material, a partir da análise de um tensor de tensão inserido pelo usuário. Trata-se de uma ferramenta gratuita e com fins educacionais, para suporte ao processo ensino-aprendizagem do tema, servindo como um ambiente de verificação e visualização dos resultados durante o estudo da análise de tensões. Como forma de validação do programa desenvolvido, apresenta-se o estudo de um problema *benchmark* retirado da literatura.

## 2 METODOLOGIA

Com o objetivo de consolidar o *software Tensora*, a metodologia para o trabalho dividiu-se em quatro atividades: a) revisão bibliográfica acerca da análise de tensões principais no estado plano; b) implementação computacional (estado plano de tensão e representação gráfica dos resultados); c) criação de uma interface gráfica para o *software*; d) validação do programa. Todas essas etapas são detalhadas a seguir. Além disso, a metodologia também é ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Atividades desenvolvidas na metodologia do trabalho

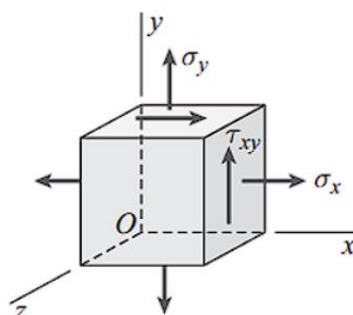


Fonte: Autores, 2023

### 2.1 Estado principal de tensões

A noção de estado de tensão de um ponto material diz respeito ao pleno conhecimento da mobilização interna de um ponto em análise. Isto é, trata-se da caracterização das componentes normal e tangencial do vetor de tensão para todos os planos de corte, englobando as infinitas interações com a vizinhança do ponto material. Para tal, é conveniente analisar a matriz denominada tensor de tensão, que permite a manipulação das tensões para quaisquer direções de interesse e representa o estado geral de solicitações. No entanto, na prática da engenharia, é comum a adoção de simplificações na geometria e nas cargas atuantes, de modo que a tensão produzida em um elemento estrutural pode ser analisada em um único plano (HIBBELER, 2010). Assim, define-se que o ponto material está submetido a um estado plano de tensões, sendo sua representação gráfica ilustrada na Figura 2.

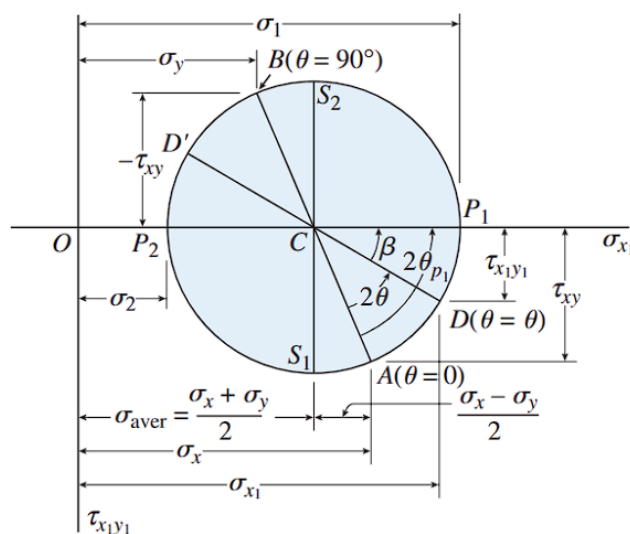
Figura 2 – Representação do estado plano de tensões



Fonte: Gere e Goodno, 2013

Na análise do estado plano de tensões, o Círculo de Mohr consiste na representação gráfica que permite a visualização das relações entre as tensões normais e de cisalhamento agindo em diferentes planos inclinados do ponto material (GERE e GOODNO, 2013). Além disso, é possível extrair desta ferramenta a configuração do ponto material para a qual se obtém as tensões normais e cisalhantes máximas, vide Figura 3.

Figura 3 – Representação gráfica do Círculo de Mohr



Fonte: Gere e Goodno, 2013

Sendo assim, mediante o conhecimento do tensor de tensão que representa o estado plano a ser analisado, é possível construir a representação gráfica do Círculo de Mohr. A análise gráfica permite o desenvolvimento das equações que determinam o estado principal - no qual se observam apenas tensões normais, bem como o estado para o qual as tensões cisalhantes são máximas. Este equacionamento é descrito nas Equações (1) a (5).

$$\sigma_{méd} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \quad (1)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{méd} + R \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{méd} - R \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_{p1} = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad (5)$$

Nas equações acima,  $\sigma_{méd}$  representa a tensão média entre as tensões principais máxima ( $\sigma_1$ ) e mínima ( $\sigma_2$ ),  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  representam as tensões normais nas direções x e y, respectivamente,  $R$  é o raio do Círculo de Mohr,  $\tau_{xy}$  é a tensão de cisalhamento e  $\theta_{p1}$  está relacionado com o ângulo que define a orientação dos planos relacionados às tensões principais. Os pontos P1 e P2 correspondem às posições onde se medem as tensões principais.

## 2.2 Estado de tensões extremas de cisalhamento

Considerando-se o estado plano de tensão, as máximas tensões de cisalhamento podem ser observadas orientando um elemento a 45° em relação à posição de um elemento que define os planos de tensões principais (HIBBELER, 2010). Os valores das tensões extremas de cisalhamento são dados em função do raio do círculo de Mohr, como segue:

$$\tau_{min} = -R \quad (6)$$

$$\tau_{max} = R \quad (7)$$

Cujos valores estão associados aos pontos S1 e S2 na Figura 3.

## 2.3 Implementação computacional

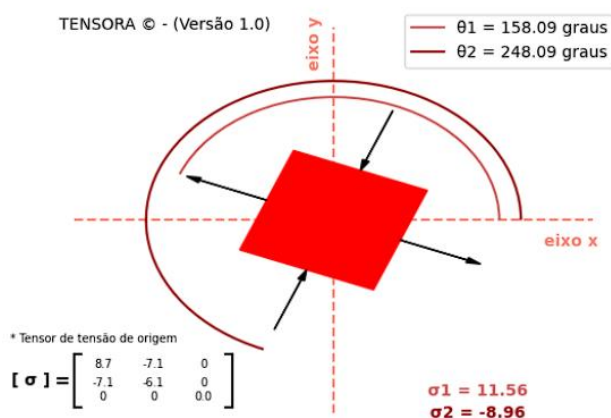
Para desenvolvimento das implementações foi adotada a linguagem de programação *Python* (VAN ROSSUM e DRAKE, 2009), que se trata de uma linguagem de alto nível e é amplamente utilizada nos cursos de engenharia. Nesse sentido, para desenvolvimento da ferramenta *Tensora*, foram implementados dois módulos: o equacionamento do estado plano de tensões e a representação gráfica deste estado.

O primeiro módulo contempla o cálculo das Equações (1), (2), (3), (4) e (5), mediante a interpretação do tensor de tensão no estado plano inserido. Além disso, tal módulo efetua o cálculo dos componentes isotrópico e desviador do tensor de tensão, responsáveis pela indicação de variação de volume e de distorções no material, respectivamente.

O segundo módulo diz respeito à representação visual do ponto material rotacionado no estado plano, de acordo com os dados calculados no primeiro módulo. Essa representação gráfica configura uma ferramenta importante para os estudantes, uma vez que proporciona uma melhor visualização dos resultados obtidos na análise de tensões. A Figura 4 ilustra um gráfico gerado pelo programa desenvolvido neste trabalho, evidenciando o estado plano para o qual as tensões normais são extremas.



Figura 4 – Representação gráfica do estado plano de tensões normais extremas



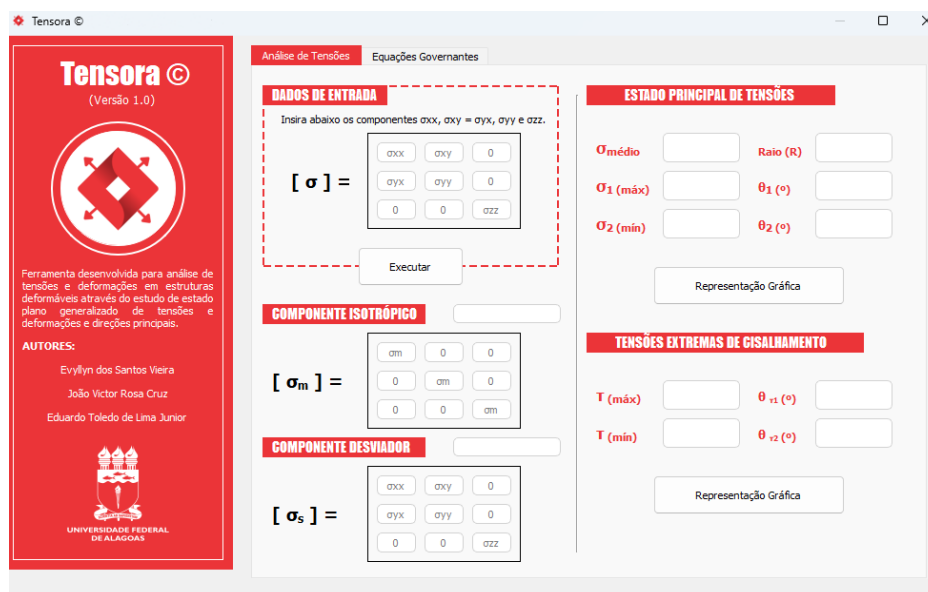
Fonte: Autores, 2023

## 2.4 Interface gráfica do software

No intuito de concentrar as implementações computacionais em um único ambiente de fácil utilização para o usuário, foi utilizada a ferramenta *Qt Designer*, que permite o projeto e construção de interfaces gráficas de forma integrada aos códigos em *Python*. Na tela inicial (ver Figura 5), são inseridos os dados de entrada referentes ao tensor de tensão a ser analisado. Depois de processada a análise, a tela indica os componentes isotrópico e desviador. Além disso, o *software* apresenta todos os dados calculados referentes às equações anteriormente citadas. Por fim, os botões “Representação Gráfica” levam a modais que apresentam a visualização gráfica dos estados de tensão. Estas saídas são customizáveis e podem ser exportadas pelo usuário em diferentes formatos gráficos.

Considerando-se o aspecto educacional da ferramenta, um resumo da formulação referente ao problema é disponibilizado por meio da aba “Equações Governantes”.

Figura 5 – Tela inicial do *Tensora*



Fonte: Autores, 2023

## 2.5 Validação do programa

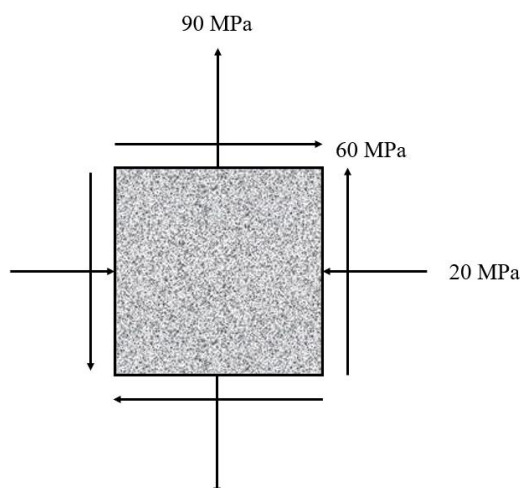
A última etapa da metodologia consiste na validação da ferramenta desenvolvida. Para tal, foram coletados exemplos da literatura relativa ao tópico de interesse da resistência dos materiais. As aplicações foram inseridas no *software* e os resultados foram comparados, obtendo-se congruência com as respostas de referência. De forma a ilustrar o funcionamento da ferramenta, um desses exemplos é apresentado na seção a seguir.

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A validação da ferramenta desenvolvida é imprescindível, uma vez que se trata de um *software* com viés educacional. Dessa forma, é apresentada nesta seção uma aplicação da literatura acerca da análise do estado plano de tensões. Os dados das aplicações são inseridos na ferramenta desenvolvida e os resultados são confrontados com os valores de referência.

A aplicação utilizada na validação foi retirada da 7ª edição do livro Resistência dos Materiais (HIBBELER, 2010). Trata-se de uma adaptação dos exemplos 9.5 e 9.6, das páginas 330 e 331. A Figura 6 apresenta a representação de um dado ponto material submetido ao estado plano de tensões. Nesse sentido, pede-se para calcular o estado de tensão em termos das tensões principais, bem como o estado para o qual a tensão de cisalhamento é máxima.

Figura 6 – Representação do ponto material a ser verificado



Fonte: Adaptado de Hibbeler, 2010

Sendo assim, o tensor de tensão é inserido na ferramenta *Tensora*. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1, os quais são comparados com os valores encontrados pela referência. Observa-se que as respostas estão em acordo.

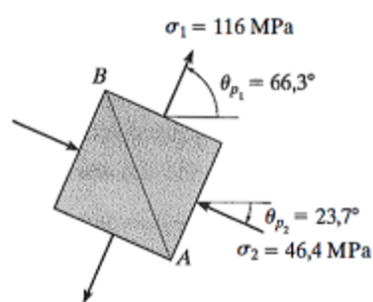
Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos

Variável	Hibbeler (2010)	Tensora (2023)
$\sigma_{\text{méd}}$ (Mpa)	35,00	35,00
R (Mpa)	81,40	81,39
$\sigma_1$ (Mpa)	116,40	116,39
$\sigma_2$ (Mpa)	- 46,40	- 46,39
$\theta_1$ (graus)	66,30	66,26
$\theta_2$ (graus)	156,30	156,26
$ \tau $ (Mpa)	81,40	81,39

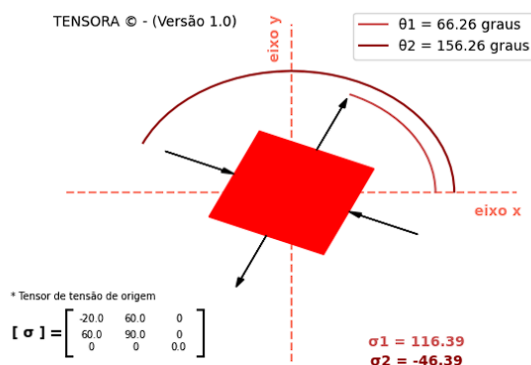
Fonte: Autores, 2023

Além disso, a literatura apresenta a representação gráfica do ponto material rotacionado para o estado em que as tensões normais e cisalhantes são máximas. As Figuras 7 e 8 ilustram ambos os estados supracitados de acordo com os resultados obtidos por Hibbeler (2010).

Figura 7 – Representação gráfica do estado para o qual as tensões normais são máximas



Adaptado de Hibbeler (2010)



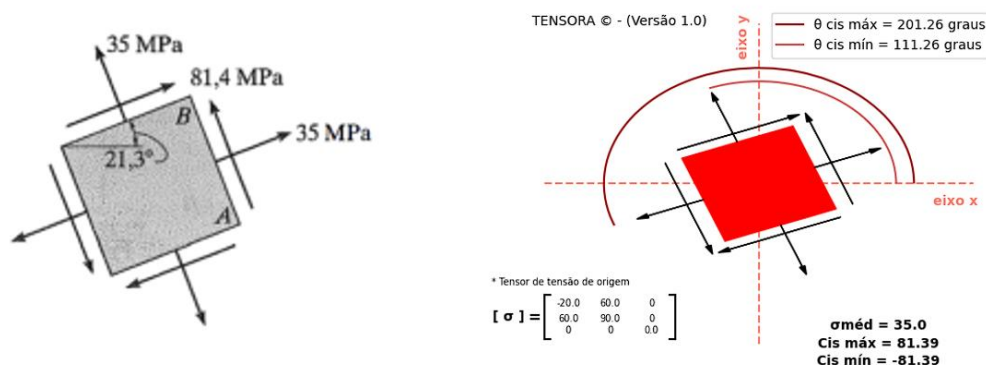
Tensora (2023)

Fonte: Autores, 2023

A única diferença observada diz respeito ao ângulo de  $\theta_2$  apresentado por Hibbeler (2010). Na verdade, tal ângulo representa o menor ângulo associado à segunda direção principal. A ferramenta *Tensora* apresenta o maior ângulo. Mediante a subtração de 180 graus, é possível realizar a conversão de um ângulo para o outro. Visualmente, nota-se que as direções principais são as mesmas em ambos os casos.



Figura 8 – Representação gráfica do estado para o qual as tensões cisalhantes são máximas



Adaptado de Hibbeler (2010)

Tensora (2023)

Fonte: Autores, 2023

No que diz respeito às tensões cisalhantes extremas e suas direções associadas, também é possível observar a coerência dos resultados obtidos pela ferramenta proposta. O comentário feito anteriormente acerca da adoção dos ângulos suplementares também se aplica aqui.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No contexto atual, a utilização do computador como ferramenta pedagógica de auxílio no processo de construção do conhecimento torna-se cada vez mais notável, uma vez que se trata de um artifício de desenvolvimento dos componentes curriculares. Nesse sentido, o presente trabalho apresentou o desenvolvimento da ferramenta *Tensora*, um *software* gratuito de auxílio aos estudantes de engenharia no estudo da análise de tensões no estado plano. Para ilustrar a acurácia dos dados obtidos pela ferramenta desenvolvida foi apresentada uma aplicação da literatura. Nesta verificação, observou-se que os resultados convergiram para os valores encontrados na literatura. Para além da validação das variáveis calculadas, evidenciou-se também que o *software* apresenta uma interface gráfica amigável, com recursos de visualização simples e enxutos. Dessa forma, a ferramenta assume seu papel de suporte ao ensino e aprendizagem do conteúdo de interesse.

A ferramenta encontra-se em fase de aprimoramento. Para além do módulo já implementado atualmente, pretende-se expandir o escopo do *software* para a análise do Estado plano de deformações, fornecendo o cálculo e visualização das deformações e direções principais, e deformações angulares máximas. Sendo assim, o *Tensora* permitirá uma avaliação sob a ótica da rigidez, complementar ao estudo relativo à resistência dos materiais atualmente contemplado.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem a Universidade Federal de Alagoas (UFAL) por toda a estrutura e espaço disponibilizado em prol dos estudantes. Além disso, os autores agradecem ao Centro de Tecnologia (CTEC) e ao seu corpo docente por todo o

aprendizado compartilhado, o que possibilitou não somente o conhecimento da temática abordada neste trabalho, como entusiasmo em relação à pesquisa científica.

## REFERÊNCIAS

ACADFRAME. Software acadêmico para análise de pórticos e treliças planas, versão beta. Disponível em: [http://web.set.eesc.usp.br/software\\_depto/acadframe/](http://web.set.eesc.usp.br/software_depto/acadframe/). Acesso em: 16 maio. 2023.

FRANÇA, Arthur Henrique. **Um Sistema Web para Análise de Estruturas Reticuladas Planas**. Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil. Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2019.

FTOOL. A graphical-interactive program for teaching structural behavior, v. 4.00. Disponível em: <https://www.ftool.com.br/Ftool/>. Acesso em 16 maio. 2023.

GERE, James Monroe; GOODNO, Barry John. **Mecânica dos materiais**. 7. ed, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7. ed, São Paulo: Pearson, 2010.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas**. 4. ed, Rio de Janeiro: LTC, 2011.

SILVA, S. O.; RICARDO, A. S. Ferramenta computacional para o cálculo de parâmetros abordados em disciplinas de mecânica dos sólidos e dos solos. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 18, n. 1, p. 1-17, 2022.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. 1. ed, São Paulo: UNESP, 1999.

VAN ROSSUM, Guido; DRAKE, Fred. L. **Python 3 Reference Manual**. CreateSpace, Scotts Valley, CA. 2009.

## TENSORA: A TOOL TO SUPPORT THE TEACHING-LEARNING OF STRESS ANALYSIS IN SOLID MECHANICS

**Abstract:** *Structural analysis stands out as an essential subject for the formation and professional practice of civil engineers. Besides the complexities observed in understanding the equations of solid mechanics, there is the need to solve and verify a wide range of exercises for the benefit of the student's learning. In this context, the use of computer programs acts as a tool to assist the student, allowing a greater understanding of the behavior of structures from the interpretation of the results presented by the machine. Thus, this work presents the Tensora educational tool, implemented for the analysis of plane stress state in a material point. It counts on the implementation of the equations for the calculation of principal stresses and maximum shear stresses through a user-friendly graphic interface. Additionally, the application presents the results of these analyses graphically, allowing the student to better visualize and understand the behavior of the material point subjected to in-plane stresses. The implementations were developed using Python programming language and the graphical interface was created from the Qt Designer platform. Finally, the validation of the proposed software is performed through the analysis of applications with results available in the literature.*

**Keywords:** *Solid mechanics, plane stress state, graphical interface, Python, Qt designer.*