

USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Maria Madalena Dullius – madalena@univates.br

Centro Universitário UNIVATES, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Rua Avelino Tallini, 171, Bairro Universitário

95000-000 – Lajeado – RS

Eliane A. Veit – eav@if.ufrgs.br

Ives S. Araujo – ives@if.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física

Av. Bento Gonçalves, 9500

91501-9070 – Porto Alegre – RS

Resumo: *Apresentamos neste texto um estudo realizado sobre a aprendizagem de equações diferenciais com o auxílio de recursos computacionais. Levando em conta as dificuldades mais freqüentes que os alunos apresentam na aprendizagem deste conteúdo, elaboramos um material instrucional baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e na Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky para auxiliá-los na superação de suas dificuldades. O estudo envolveu estudantes de duas turmas regulares dos cursos de Engenharias e Química Industrial do Centro Universitário UNIVATES-RS, na disciplina de Cálculo III. Podemos destacar que as atividades propostas nos guias e a utilização de recursos computacionais motivaram os alunos para o estudo das equações diferenciais, o que é um importante fator para que ocorra a aprendizagem significativa segundo Ausubel. Também a interação dos alunos, em grupos e com o material instrucional proporcionou ricas discussões e condições propícias para a aprendizagem.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais, Modelagem computacional, Ensino-aprendizagem.*

1 INTRODUÇÃO

Não é necessário grande esforço para perceber que pouco do conteúdo matemático estudado no ensino médio e superior, da forma como é abordado, estimula o aluno a se envolver de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem. Percebemos que os alunos chegam à universidade sem as habilidades e competências requeridas para trabalhar com conteúdos matemáticos básicos, como operações com frações, regras de potenciação, cálculos de porcentagem, resolução de equações simples, logaritmos e trigonometria. Além disto, não demonstram interesse pelo conteúdo, resolvem os problemas mecanicamente e estão preocupados, na maior parte das vezes, apenas em obter a nota mínima necessária para a aprovação, participando das aulas sem motivação por não compreenderem em grande parte o

que estão fazendo e também não captarem a relevância desta aprendizagem para a sua vida profissional.

Neste contexto, tendo como foco o aprendizado do conteúdo de equações diferenciais em turmas de engenharia, iniciamos um projeto de pesquisa com o objetivo de identificar as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos sobre o tema e, a partir delas, elaborar uma abordagem didática que auxilie na superação das mesmas. Mais especificamente, estamos interessados em estudar as potencialidades do uso de recursos computacionais em nossa abordagem que potencializem uma aprendizagem significativa do tema equações diferenciais. Dentro desta proposta, o professor atua com um facilitador da aprendizagem, buscando engajar os alunos com seu próprio aprendizado e potencializar sua interação com a turma, deles entre si e também com o material didático. Neste intuito, torna-se fundamental que o aluno possa explorar problemas de seu interesse, e não puramente abstratos e descontextualizados com seu futuro ramo de atuação.

Tendo em vista estes objetivos nos propusemos as seguintes questões norteadoras da pesquisa:

- Quais são as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem das equações diferenciais?
- Como podemos trabalhar com recursos computacionais para amenizar estas dificuldades? Quais as vantagens e desvantagens do uso deste tipo de ferramenta no ensino das equações diferenciais?
- Como podemos ajudar os alunos na obtenção de uma aprendizagem significativa das equações diferenciais?
- Qual é a contribuição da interação social no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais?

Para o desenvolvimento da pesquisa, elaboramos uma proposta de ensino focada na solução de situações-problema com o uso de recursos computacionais. A contextualização através de situações-problema relacionadas à área de atuação dos futuros profissionais visou, por um lado motivar os alunos, por outro, explorar o raciocínio conceitual de modo a auxiliá-los a dar significado às equações diferenciais e suas soluções. Na elaboração do material instrucional, baseado no uso da planilha de cálculos do OpenOffice¹ e no *software* de modelagem Powersim², levou-se em conta os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), enquanto a metodologia empregada na prática pedagógica teve como suporte a Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky (2000 e 2003) especialmente no que diz respeito à interação professor-aluno-material didático no ambiente com recursos computacionais. A prática pedagógica foi desenvolvida na unidade relativa à solução de equações diferenciais ordinárias, na disciplina de Cálculo III, com alunos dos cursos de Química Industrial e Engenharias da UNIVATES-RS, no primeiro semestre de 2006. Na seção 2 deste artigo, apresentamos a descrição da elaboração e primeira aplicação da proposta de ensino, que constitui uma das etapas do projeto de pesquisa em desenvolvimento, bem como das ferramentas computacionais utilizadas. Os instrumentos de pesquisa e a síntese dos resultados obtidos constituem a seção 3. Na seção 4 são analisados os resultados e a 5 é dedicada aos comentários finais e perspectivas deste trabalho.

2 A PRÁTICA PEDAGÓGICA PROPOSTA

O caráter interdisciplinar das equações diferenciais, e o fato de não se tratar apenas de um objeto de conhecimento, mas sim um instrumento de trabalho para futuros engenheiros e químicos, nos fez pensar sobre a necessidade de mudar a abordagem deste conteúdo nos

¹ <http://www.openoffice.org.br/>

² <http://www.powersim.com/>

cursos de nível superior, focando seu ensino para as futuras necessidades destes profissionais e estimulando uma participação mais ativa dos alunos em sala de aula. Sob o ponto de vista de aprendizagem³, investimos no uso de recursos computacionais porque propiciam a oportunidade do aluno interagir com uma representação do modelo científico que descreve o fenômeno de interesse. Através desta interação, o aluno dispunha da oportunidade de observar, explorar e analisar como se comportam as diversas grandezas envolvidas nas equações diferenciais em estudo, focando a aprendizagem na interpretação e aplicação das equações diferenciais, em contraposição à mera solução analítica. Além disto, incentivamos o uso desses recursos como uma ferramenta auxiliar para os alunos externalizarem suas idéias, refletirem sobre elas e discuti-las em grupo e/ou com o professor.

A prática pedagógica foi realizada com 59 alunos dos cursos de Química Industrial e Engenharias (Computacional, de Produção, de Automação e Controle, Ambiental e Sanitária) da UNIVATES-RS, que cursaram a disciplina de Cálculo III, ministrada pela primeira autora deste trabalho, no primeiro semestre de 2006. Os alunos estavam distribuídos em duas turmas regulares, uma no turno da manhã (27 alunos, predominantemente dos cursos de Engenharias) e uma turma à noite (32 alunos, predominantemente de Química Industrial). A prática pedagógica concentrou-se na unidade relativa à solução de equações diferenciais ordinárias, com um total de 32 horas-aula no horário regular da disciplina, sendo 8 horas-aula com a planilha de cálculos do OpenOffice, 12 horas-aula com o *software* Powersim e 12 horas-aula de atividades usando simplesmente papel e lápis.

2.1 Materiais instrucionais

Conforme mencionado anteriormente, nesta primeira etapa do projeto de pesquisa, foi concebida e desenvolvida uma prática pedagógica envolvendo uma série de atividades computacionais sobre o conteúdo de equações diferenciais, mais especificamente equações diferenciais ordinárias, na tentativa de propiciar aos alunos uma aprendizagem significativa deste conteúdo numa perspectiva ausubeliana. Ausubel (2003) caracteriza a aprendizagem significativa por uma interação, não-arbitrária e não-literal, entre as novas informações, ou conceitos objetos de atenção no processo de ensino e aprendizagem, e a estrutura conceitual (conceitos e relações) existente na mente do indivíduo. Havendo essa interação, a nova informação adquire significado para o aprendiz, na medida em que se ancora em conceitos ou proposições relevantes, pré-existentes em sua estrutura conceitual, definidos como conceitos subsunçores, ou meramente, *subsunçores*. Ausubel (op. cit.) ainda propõe duas condições básicas que devem ser satisfeitas para que ocorra a aprendizagem significativa: a primeira é que o aluno deve manifestar uma predisposição para aprender, isto é, uma disposição para relacionar não-arbitrária, mas substantivamente⁴, o novo material com a sua estrutura cognitiva; segunda condição é que o material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo para aquele aluno em particular, relacionável à sua estrutura cognitiva. Essa condição implica o aprendiz ter disponível em sua mente os subsunçores adequados. Em nosso trabalho, procuramos detectar os subsunçores necessários para a aprendizagem das equações diferenciais através de uma entrevista realizada com professores e a partir da nossa experiência profissional, e os levamos em conta no desenvolvimento do material instrucional e na mediação do professor no acompanhamento das atividades práticas.

³ Sob o ponto de vista instrumental, o uso de recursos computacionais na solução dos problemas típicos da área de atuação é indispensável para todo bom profissional do século XXI.

⁴ Substantividade significa que a relação entre o material a ser aprendido e a estrutura cognitiva não é alterada se outros símbolos diferentes, mas equivalentes, forem usados.

Procurando atender as duas condições, focamos nossa abordagem em atividades computacionais que estivessem de acordo com os interesses, dificuldades e necessidades dos alunos em relação ao conteúdo de equações diferenciais. Para isso, priorizamos a interpretação e análise do comportamento das soluções encontradas para equações diferenciais, relativas às situações-problema estudadas, em vez de priorizar a simples resolução analítica, como feito anteriormente. Basicamente as situações-problema abordadas são as que constam na Tabela 1.

Tabela 1- Situações-problema abordadas na prática pedagógica.

Situação-problema	Equação diferencial
decaimento radioativo	$\frac{dN}{dt} = kN$
crescimento populacional	$\frac{dP}{dt} = kP$
absorção de drogas	$\frac{dQ}{dt} = kQ$
reações químicas	$\frac{dC_A}{dt} = kC_A$
problemas de mistura	$\frac{dQ}{dt} = T_{entrada} - T_{saída}$
lei do resfriamento de Newton	$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$
queda de corpos com resistência	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$
circuitos elétricos	$L \frac{di}{dt} + Ri = V$
Crescimento populacional	$\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L}P^2$
disseminação de doenças	$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$

Os materiais instrucionais (guias) elaborados procuraram respeitar os dois princípios sugeridos por Ausubel (2003) como norteadores para a programação de um conteúdo quando objetivamos a aprendizagem significativa:

- *diferenciação progressiva*: programamos abordar o conteúdo de equações diferenciais partindo das idéias mais gerais e inclusivas, apresentando uma idéia do todo e depois progressivamente diferenciamos em termos de detalhes e especificidades, classificando-as em tipos, técnicas de resolução, tipos de solução, gráficos;
- *reconciliação integrativa*: no início de cada aula, procuramos apresentar e discutir com os alunos as semelhanças e diferenças entre os tipos de equações diferenciais, o comportamento das soluções, as técnicas de resolução analítica, os gráficos e as aplicações já abordadas. Ao final da unidade, fizemos uma ampla reconciliação integrativa.

2.2 Método de ensino-aprendizagem

A metodologia empregada na prática pedagógica baseou-se na Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky (2000 e 2003) que destaca dois fatores como sendo primordiais para a aprendizagem. O primeiro e mais importante para ele, é a aquisição de conhecimentos pela interação social, que é o veículo fundamental para a transmissão dinâmica do conhecimento construído social, histórica e culturalmente. A interação social implica um mínimo de duas pessoas intercambiando significados. O segundo fator primordial para a aprendizagem é a possibilidade de organização de situações de ensino que atuem na zona de desenvolvimento proximal do aluno permitindo-lhe alcançar níveis de conhecimento mais elaborados. A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é definida por Vygotsky como um nível intermediário entre o nível de desenvolvimento cognitivo real do indivíduo, medido por sua capacidade de resolver problemas sozinho, e o seu nível de desenvolvimento potencial, medido através da solução de problemas sob orientação. A zona de desenvolvimento proximal engloba as funções ainda em processo de maturação. Vygotsky (MOREIRA, 2006) destaca que sendo a aprendizagem decorrente da interação social, é importante que o aluno tenha oportunidades de interagir socialmente com os colegas e com o professor para favorecer seu desenvolvimento cognitivo e sua aprendizagem.

Em nossa prática pedagógica, na maior parte da aula, os alunos trabalhavam em duplas ou trios na solução de situações-problema, situadas na sua zona de desenvolvimento proximal. Raramente algum dos alunos saberia solucionar individualmente a situação-problema em questão, entretanto, ao propô-la em um guia impresso com desafios intermediários a serem enfrentados pelo grupo, visamos fomentar a interação social e dar condições para que o pequeno grupo, com a mediação do professor e o suporte do recurso computacional, tivesse condições de resolver a situação-problema. Faz parte desta estratégia de ensino evitar ao máximo responder diretamente ao questionamento dos alunos, fornecendo-lhes uma resposta. O professor, durante a mediação em sala de aula, responde aos questionamentos formulando nova(s) questão(ões) cuja(s) resposta(s) pode(m) contribuir para diminuir as dúvidas dos alunos e provocar novas discussões que levem à solução final, ou a novas discussões.

As aulas geralmente eram iniciadas com uma explanação da professora sobre as atividades a serem desenvolvidas, com o objetivo de apresentar uma motivação para o tema, introduzir o assunto a ser trabalhado e para dar uma visão panorâmica do recurso computacional que seria utilizado. Em seguida, em pequenos grupos, os alunos trabalhavam em situações-problema apresentadas em guias impressos com várias questões intermediárias, cuja resposta dependia da exploração de um modelo computacional entregue pronto ao aluno ou da criação de um modelo pelo grupo. Iniciava-se por atividades exploratórias que, além de auxiliarem a solução da situação-problema, também tinham por finalidade a familiarização do aluno com o *software*. Ao final da aula, os alunos entregavam por escrito um guia impresso por grupo, com as respostas do grupo, para que a professora os corrigisse e iniciasse a aula seguinte com uma discussão com o grande grupo, em que eram retomadas as questões-chave e feita uma pequena reconciliação integrativa. De imediato, a professora fazia uma introdução sobre o novo tema a ser trabalhado, os alunos passavam a trabalhar em grupo e o ciclo se repetia. Com a exigência de entrega de um único guia por grupo, visamos fomentar a negociação de significados entre os alunos, que são compelidos a encontrar uma solução satisfatória para todos os membros do grupo. É neste estágio que a professora dispunha; i) das melhores condições para captar se os significados compartilhados pelo grupo eram os esperados cientificamente para aquela matéria de estudo e ii) de campo fértil para semear idéias que levassem a uma resignificação que fomentaria a aprendizagem significativa.

2.3 As ferramentas computacionais

Dentre as ferramentas computacionais disponíveis para a modelagem matemática optamos pela planilha de cálculo⁵ e pelo *software* Powersim⁶, pelos motivos que passamos a expor.

Planilhas de cálculo são constituídas por um conjunto de células organizadas em linhas e colunas, onde são digitados números, textos e fórmulas matemáticas, cujo argumento pode estar localizado em alguma outra célula da planilha. A sintaxe é simples e a inserção de fórmulas em células adjacentes é tremendamente facilitada pelo fato de que elas podem ser automaticamente ajustadas, permitindo que facilmente se implemente cálculos recursivos cumulativos, como os requeridos na integração de equações diferenciais. O usuário pode, então, se concentrar na lógica dos cálculos que estão sendo implementados. Por exemplo, para determinar o saldo ao final do mês em uma conta de poupança para a qual se conhece o capital inicial e a taxa de rendimento, basta digitar quatro células da planilha: o mês do depósito inicial e seu valor, o mês subsequente e o capital acumulado (capital no mês anterior mais o rendimento auferido = capital vezes a taxa de rendimento). A extensão desta fórmula ao longo da coluna permite que se determine o valor do capital ao final de tantos meses quanto se queira. Os valores encontrados podem ser representados na forma gráfica e, se o algoritmo for apropriadamente implementado, as conseqüências de modificações nos valores de parâmetros e variáveis iniciais podem ser visualizadas instantaneamente. Também são facilmente implementados cálculos de variações em intervalos finitos, cujos valores podem ser tornados tão pequenos quanto se queria, desde que limitados à precisão das máquinas (usualmente, 10^{-16}).

As planilhas foram previstas em nossa proposta para favorecer a compreensão dos conceitos de limite e taxa de variação média e instantânea (derivadas), já que estes são conceitos subsunçores indispensáveis para aprendizagem significativa de equações diferenciais e, embora supostamente devessem ter sido apreendidos no curso de Cálculo I e II, nossa experiência e entrevista com professores que ministram esta disciplina ao longo de muitos anos nos indicaram que a maior parte dos alunos não atribui qualquer significado a estes conceitos, dominando, quando muito, alguma técnica de cálculo.

O uso de planilhas também é apropriado para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, em que o algoritmo concebido pelo aluno pode se basear no raciocínio conceitual apropriado à situação-problema proposta, e não na formulação matemática da equação diferencial. Por exemplo, na Tabela 2, apresentamos um modelo de decaimento radioativo, explorado pelos alunos com o auxílio da planilha, onde as duas primeiras colunas apresentam o número de átomos radioativos (N) para diferentes valores de tempo (t); a terceira coluna apresenta a variação de N (ΔN) pela variação de t (Δt), calculada com os valores apresentados nas duas primeiras colunas e a quarta coluna apresenta a razão entre as colunas 3 e 2. Com esta planilha, os alunos puderam observar que variando o valor de Δt o valor obtido na quarta coluna é constante e quando Δt diminui, a taxa de variação média tende à taxa de variação instantânea, que neste caso é a constante de decaimento radioativo. Este tipo de exercício pode auxiliar o aluno a dar significado a expressões como a Equação (1).

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta N}{\Delta t} \right] = k, \text{ ou } \frac{dN}{dt} = kN. \quad (1)$$

⁵ Optamos pela planilha de cálculo do OpenOffice por se tratar de um *software* livre.

⁶ Dispomos da versão 5 do Powersim, que é livre.

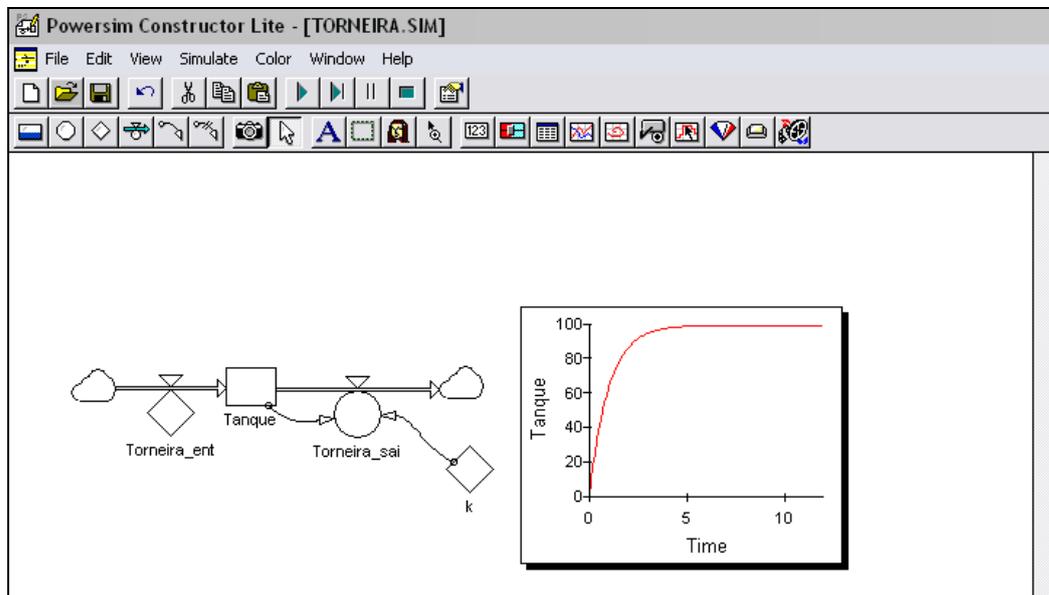
Tabela 2 – Um dos decaimentos radioativos explorados pelos alunos na planilha de cálculos do OpenOffice.

	Δt (segundos)	0,1	
t (segundos)	N	$(\Delta N/\Delta t)$	$(\Delta N/\Delta t)/N$
0,0	1000000		
0,1	991373	-86269	-0,087
0,2	982821	-85524,9	-0,087
0,3	974342	-84787,07	-0,087
0,4	965936	-84055,623	-0,087
0,5	957603	-83330,482	-0,087
0,6	949342	-82611,597	-0,087
0,7	941152	-81898,914	-0,087
0,8	933033	-81192,380	-0,087
0,9	924984	-80491,940	-0,087
1,0	917004	-79797,543	-0,087
1,1	909093	-79109,137	-0,087
1,2	901250	-78426,669	-0,087
1,3	893475	-77750,089	-0,087
1,4	885768	-77079,346	-0,087
1,5	878126	-76414,389	-0,087
1,6	870551	-75755,169	-0,087
1,7	863040	-75101,636	-0,087

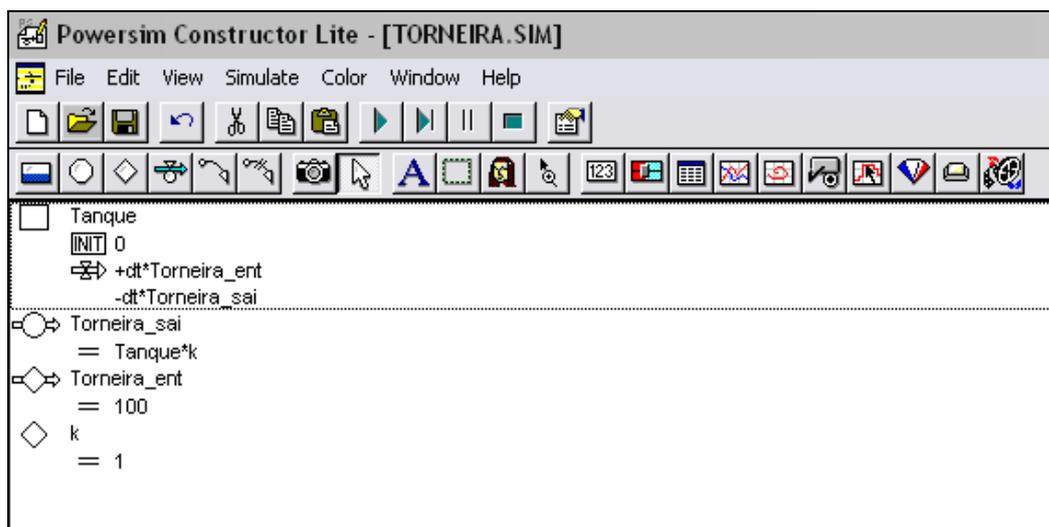
O Powersim é um *software* que permite modelar um sistema através da elaboração de diagramas de fluxo utilizando a metáfora de Forrester (1990, apud SANTOS et al. 2002), na qual existem dois tipos fundamentais de variáveis: os níveis e as taxas, representados pela metáfora de tanques e torneiras. O tanque (estoque ou nível) representa uma quantidade que é acumulada e a torneira (taxa) conectada a um tanque representa a variação da quantidade no tanque. Através da criação e conexão desses objetos básicos, representados por ícones na camada de construção do modelo do Powersim, pode-se construir um modelo computacional fornecendo apenas relações algébricas entre seus elementos. De imediato, representações na forma de gráficos e tabelas são facilmente implementadas e o usuário pode explorar as conseqüências das alterações de variáveis, parâmetros e suas relações, sem conhecimento da formulação matemática do problema. De particular interesse é o comportamento de variáveis em função do tempo, que permite investigar o comportamento dinâmico do sistema.

A opção pelo uso do *software* Powersim deve-se exatamente ao fato de usarmos representação com ícones para modelar uma situação-problema em estudo, e seu uso facilita o entendimento das relações entre variáveis das equações diferenciais e o comportamento das mesmas sem estarmos de posse da solução analítica. Em nossa proposta, apresentamos situações-problema contextualizadas às quais os alunos conseguem atribuir significados, por exemplo, o nível de água em um tanque que é abastecido por uma torneira e tem um ralo por onde pode escoar a água, conforme consta na Figura 1. Os alunos são questionados, então, sobre as variáveis e parâmetros que podem afetar este nível (fluxo da torneira, área do ralo,...). Através de um raciocínio conceitual intrínseco à particular situação-problema em estudo, o aluno era levado a criar ou explorar o modelo computacional de modo a compreender o seu comportamento. Só, então, passava-se à formulação da equação diferencial que descreve o

fenômeno e à sua solução analítica. Com esta metodologia reversa, que enfatiza a compreensão do comportamento da solução, para somente depois equacionar e resolver formalmente o problema, visamos motivar o aluno e dar-lhe condições para atribuir significados às equações diferenciais e suas soluções.



(a)



(b)

Figura 1 - Modelo de fluxo de entrada e saída de água em um tanque, implementado na camada de construção do Powersim. a) Representação icônica usada para construir o modelo. b) Janela de equações, gerada automaticamente pelo Powersim, uma vez que se tenha implementado o modelo na camada de construção.

3 INSTRUMENTOS DE PESQUISA E SÍNTESE DOS RESULTADOS

A coleta de dados para análise foi feita através i) dos guias entregues pelos alunos ao final de cada aula, com as respostas concensuadas pelo grupo; ii) das observações realizadas pela professora durante as aulas e anotadas no seu diário de classe; iii) de um questionário aplicado ao final do semestre aos alunos e iv) das entrevistas semi-estruturadas realizadas ao final do semestre com vinte duplas de alunos e gravadas em áudio.

No que segue apresentamos os dados coletados com os questionários e entrevistas, pois os outros dois instrumentos de coleta (guias impressos e diário de classe) produziram resultados semelhantes no que tange ao foco de nossa discussão neste trabalho.

Os itens do questionário foram elaborados com o intuito de avaliar os alunos, individualmente, em relação ao seu envolvimento nas atividades (motivação para aprender), compreensão conceitual, participação nos trabalhos de grupo, dificuldades enfrentadas e sugestões para melhorar o material e estratégias de aplicação em uma nova prática. Um total de 55 alunos respondeu este questionário.

Como resultados deste questionário, podemos destacar que todos os alunos:

- assistiram a maior parte das aulas, se consideraram bons alunos e foram participativos nos trabalhos em grupo;
- estão conscientes de suas dificuldades para realizar cálculos, tanto os que envolvem a matemática do ensino básico como do ensino superior.

Os alunos, na sua maioria:

- consideraram produtiva a realização das atividades em grupo (49 alunos)
- consideraram importante a participação da professora no processo (46 alunos);
- perceberam a importância das equações diferenciais (48 alunos) e conseguiram estabelecer relação entre este conteúdo e outros estudados em seus cursos (42 alunos);
- encontraram dificuldades para entender as atividades solicitadas (38 alunos);
- consideraram que aprenderam bastante na disciplina (40 alunos);
- destacaram que a metodologia favoreceu a aprendizagem (37 alunos);
- consideraram que o uso do computador favoreceu a aprendizagem (44 alunos);
- consideraram que não há necessidade de melhorias significativas na abordagem didática apresentada. As principais sugestões, dos alunos que se manifestaram neste sentido, foram: dispor de mais aulas teóricas e explicativas (7 alunos), exercitar mais (5 alunos), dar explicações mais claras por parte da professora (5 alunos), disponibilizar mais material de apoio (4 alunos), apresentar mais aplicações (3 alunos), retomar conteúdos básicos (1 aluno) e diminuir o ritmo das aulas (1 aluno),

Na entrevista semi-estruturada tínhamos o intuito de coletar dados para avaliar os alunos em relação aos aspectos motivacionais, ao envolvimento nas atividades, à aceitação da estratégia de ensino-aprendizagem proposta, à interação com os colegas, às dificuldades encontradas, à importância atribuída aos recursos computacionais e sugestões de melhoramento. As entrevistas partiram de 10 questões básicas feitas aos alunos e acrescidas, ocasionalmente, de perguntas para esclarecimentos ou aprofundamento das opiniões dos alunos.

Das entrevistas realizadas com 20 duplas de alunos, destacamos que:

- em uma apreciação geral da prática pedagógica, 19 duplas se manifestaram positivamente. Uma única dupla comentou não ter gostado da forma de trabalho;
- em relação ao auxílio prestado pelo computador, 9 duplas consideraram que o computador os auxiliou porque permite a visualização da dinâmica da situação-problema; 7 duplas manifestaram que o computador os ajudou, mas não sabiam caracterizar em que sentido, 3 duplas entenderam que o computador não lhes ajudou e 1 dupla diz não saber opinar a respeito;
- as principais dificuldades apontadas pelos alunos estão relacionadas aos cálculos que envolvem matemática básica (4 duplas) ou derivadas e integrais (8 duplas). Quatro duplas comentaram que sentiram dificuldades para resolver analiticamente as equações diferenciais, somente duas duplas sentiram dificuldades para entender

as equações diferenciais e uma dupla disse ter dificuldades para trabalhar com o computador;

- em relação a realização das atividades em dupla, 16 se manifestaram positivamente, destacando que favorece a interação, discussão e troca de idéias. Quatro duplas não se manifestaram.
- quando solicitados a falarem sobre a importância das equações diferenciais, 13 duplas conseguiram explicar bem e 7 explicaram com muita dificuldade;
- 19 duplas perceberam relevância no estudo de equações diferenciais para o curso e uma dupla não perceberam relevância.
- quando solicitados a diferenciar a solução geral da particular de uma equação diferencial, 15 duplas conseguiram explicar claramente e 5 duplas explicaram com grande dificuldade;
- quando foi apresentada uma situação-problema que envolve uma equação diferencial, 17 duplas conseguiram esboçar o gráfico da solução e/ou apresentar a solução analítica e 3 duplas apresentaram dificuldades.
- para melhorar as aulas, 3 duplas sugeriram diminuir o número de aulas no laboratório de informática e 4 sentiram falta de uma introdução de equações diferenciais em aula.

Para o estudo das equações diferenciais ordinárias os dois principais subsunçores são os conceitos de derivada e de integral, que compreendem os principais conceitos e técnicas do curso de Cálculo Diferencial e Integral. Os alunos perceberam a importância desses conteúdos para o entendimento das equações diferenciais, mas vários apresentavam lacunas no domínio das técnicas de resolução analítica de derivadas e integrais, conforme pode ser observado em alguns depoimentos. Assim que os dados foram coletados, a cada dupla associou-se um código, Dn.

"... as dificuldades eram mais em equações que nós já passamos em outras épocas do que com a interpretação do problema..."(D3)

"... a dificuldade que eu tive foi essa parte das cadeiras anteriores, integrais..."(D9)

Apesar destas dificuldades, os alunos associaram o conceito-chave de derivada à taxa de variação, concepção fundamental para a compreensão conceitual de equações diferenciais. Destacamos algumas argumentações:

"...bom resumindo, uma equação diferencial tem uma derivada ali junto, daí trabalha com taxa de variação..."(D10)

*"...é interessante a questão das taxas, eu acho que isso foi bem legal, pra nós tanto em física, quanto em circuitos, é usado muito em física por questão de temperatura, variação de velocidade, e circuitos por causa da amperagem ..."
(D4)*

Entre as condições necessárias para a ocorrência da aprendizagem significativa, Ausubel (2003) destaca a predisposição do aluno para aprender. Acreditamos que a forma como foi abordado o conteúdo de equações diferenciais tenha gerado uma disposição dos alunos para aprender devido às aplicações que foram trabalhadas e à utilização de recursos computacionais. Alguns depoimentos dos alunos:

"...eu achei interessante em função dos guias porque forçou a gente a raciocinar mais, e não só olhar a situação e fazer aquela coisa mecânica sabe, forçou a gente a pensar mais, tem aplicação, achei bem legal..." (D3)

"...eu gostei da disciplina por causa do jeito de mostrar a parte mais prática, a queda de um corpo, a professora deu um exemplo nos circuitos, decaimento radioativo, isso aí, mostrou na prática, o que a gente geralmente não tem, nas disciplinas de engenharia a gente vê os cálculos e não sabe como aplicar, isso

eu achei uma coisa importante e foi bom pra mim, gostei do jeito que a professora passou, dando exemplos de como aplicar..."(D5)

"...eu acho que é muito importante porque nós tivemos vários exemplos, população, crescimento, isso eu vejo no meu próprio trabalho também que a gente tem que ter uma lógica, por isso a gente tem que saber interpretar, esses casos a gente encontra seguido aí fora, se tu vai fazer uma avaliação de impacto ambiental de uma poluição de um rio tu, analisando bem agora, depois que a "gente passou pela disciplina", tu vê que tudo passa por uma equação..." (D3)

Segundo Vygotsky (MOREIRA, 2006) o fator que merece destaque no processo ensino-aprendizagem é a interação social, que provoca a aprendizagem. A aprendizagem, vista como criadora da zona de desenvolvimento proximal, desperta vários processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando o indivíduo interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com colegas. É preciso haver intercâmbio de significados dentro da zona de desenvolvimento proximal do aluno e isto ocorreu com vários alunos, conforme atestam, por exemplo, os seguintes depoimentos:

"... a gente aprende mais porque tu tá discutindo o assunto, porque se às vezes tu faz individual e não sabe, pega o do colega e copia, fica sem saber, mas em dupla se tu tá tentando responder tu acaba aprendendo, porque se tu não sabe o teu colega tá respondendo ele vai te ensinar por que ele tá respondendo daquela maneira ..." (D3)

"...eu evolui bastante depois que começou as aulas de laboratório, por que na sala eu tentava e de vez em quando eu trancava, pedia pra outro, eu não conseguia chegar até o final sozinho, depois dessas aulas a gente começou a sentar junto, fazer mesmo..." (D9)

"...eu gostei bastante do sistema de trabalhar em grupo, o uso do computador, no grupo tu pode discutir, não tem uma só idéia..."(D9)

"... eu aprendi mais no laboratório do que em sala de aula. Saber a dificuldade em sala de aula, que fazendo ali, fica mais fácil tu olhando o gráfico e analisando tal, o decaimento dele ali ou o crescimento exponencial, dele como é que ele é. É mais fácil analisar ele assim, botando as tabelas. É um pouco complicado assim no início lá, tu formar a entrada, a saída, mas depois se a gente vai acostumando fica mais fácil." (DF)

Procuramos elaborar o material de ensino usado no desenvolvimento de nosso estudo para que fosse potencialmente significativo, especialmente em relação ao significado lógico, ou seja, que apresentasse características potenciais para que o aluno transforme o significado lógico do material em significado psicológico para si. Alguns argumentos dos alunos refletem indícios de que houve a transformação do significado lógico em significado psicológico⁷ e que professor e aluno estão compartilhando significados, por exemplo:

"... a (solução) geral serve pra resolver situações semelhantes que tu vai usar aquela geral, aí as situações que tiver algum dado tu vai ter as equações específicas pra aquela situação ..." (D5)

"...a solução particular é restrita a uns critérios e condições que sejam dados no problema..."(D3)

"... decai na proporção do que tem, conforme vai diminuindo vai decaindo menos, vai mudar a proporção que vai saindo..."(D3)

"...(caso da despoluição de um rio) a poluição vai caindo, se vai entrando água limpa ... o gráfico começa alto e vai caindo, porque entrando só água limpa

⁷ O significado psicológico representa uma atribuição individual que cada aluno dá ao significado lógico.

sempre vai saindo alguma coisa de poluição junto. (a quantidade de poluentes que sai por mês é sempre igual?) não porque primeiro vai sair mais poluentes porque a água está mais poluída, ..., daí vai sair cada vez uma menor quantidade e a tendência é chegar numa linha que se encontre a nula, mas essa linha a tendência é ser o infinito..."(D10)

"... a solução geral serve para bastantes casos e a solução particular é um caso específico. É só um, né..." (DB)

Das entrevistas com os alunos podemos perceber que eles valorizaram a metodologia reversa, em que a discussão do comportamento das soluções precedia a apresentação da solução analítica, com argumentos como:

"... eu passei a minha vida inteira assim, essa didática de o professor vir daí mostrar aquela seqüência, a rotina da aula, os exercícios, exemplos, no decorrer do bimestre a gente foi vendo os diversos casos e aplicando logo, não tivemos a senhora explicando, esse exemplo agora vocês vão fazer, não, foram aplicações diversas, foram diversos exemplos, diversos tipos de aplicabilidade nos diversos casos e a gente ia fazendo envolvendo, e quando tu acaba na equação, claro daí vinha o auxílio da senhora..."(D10)

"... eu achei diferente ... porque usou o computador, teve uma associação bem diferente e tal, lá (na outra disciplina) o método era direto, o professor dava a folha com o cálculo, o cálculo direto aí, e achava o resultado e deu. Já aqui não, aqui não é só o cálculo pra fazer, tem algum exemplo que tu tava colocando, aquela do crescimento populacional. Outro método de reações químicas, do medicamento, então, quer dizer assim tem uma aplicação também, é uma ferramenta que vou precisar na minha vida profissional, mas eu nunca me dei por conta e nem sabia que eu poderia utilizar, saber dessa forma assim." (DH)

"Foi um coisa diferente, uma maneira diferente de trabalhar, me lembro em 2002 quando tive, quase não vencia copiar do quadro, saber fazer bem a técnica, mais trabalhar em grupo, em computador." (DC)

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em todos os dados que coletamos procuramos indícios que nos permitissem avaliar os quatro aspectos que fundamentam o nosso trabalho, quais sejam, a superação das dificuldades de aprendizagem do conteúdo de equações diferenciais, a contribuição da interação social na aprendizagem, a importância do uso de recursos computacionais e a motivação para aprender gerada por estes elementos inter-relacionados em ambiente de sala de aula e pela contextualização dos problemas trabalhados.

Nos dados coletados, independentemente do instrumento de coleta, ficou evidenciado o quanto foi importante e produtiva a realização das atividades em grupo, pois propiciava discussões e confronto de resultados e interpretações, permitindo que os alunos fossem além do que normalmente iriam, se estivessem trabalhando de forma individual. A participação ativa do aluno no processo educativo, buscando negociar significados com o professor ou interagindo com seus colegas, com os recursos computacionais e com os materiais parece ter sido relevante para a aprendizagem significativa. Nas discussões em grupo apareciam análises e conclusões interessantes, por exemplo, um aluno, após construir o primeiro esboço de um gráfico sobre decaimento radioativo concluiu que todas as curvas que envolvem situações de meia-vida têm a forma de exponenciais decrescentes.

As atividades exploratórias de simulação motivaram os alunos e os ajudaram a compreender melhor as aplicações apresentadas, principalmente por facilitarem a visualização

e pela agilidade com que fornecem os resultados na variação de parâmetros, o que fazia com que os alunos realizassem muitas simulações em pouco tempo, de acordo com o interesse, a curiosidade e a necessidade que sentiam, na medida em que os resultados não lhes pareciam satisfatórios.

Os resultados deste estudo também mostram que os alunos ficaram mais motivados pelo fato de trabalharem com conteúdos relacionados com seu curso e que os recursos computacionais foram importantes para interpretação das situações abordadas que envolviam as equações diferenciais. Pudemos observar, no desenrolar das atividades, que os alunos usaram as simulações computacionais para explicar o conteúdo aos colegas e suas dúvidas ao professor, utilizando-as para externalizar o seu pensamento e testar suas hipóteses.

As duplas de alunos se mostravam sempre muito empenhadas na realização das tarefas, mas nas primeiras aulas suas atenções estavam inteiramente voltadas para executar o solicitado de um modo mecânico, sem se preocuparem em entender o conteúdo. Como os guias apresentavam questões instigantes, que dificilmente poderiam ser respondidas sem alguma compreensão, eles se tornaram ansiosos e muito dependentes da professora, tendo por hábito solicitar-lhe ajuda com muita frequência, procurando se certificarem de que estavam procedendo de modo correto. Nesta etapa inicial, os alunos manifestaram inconformidade com o fato da professora não responder diretamente as perguntas e com a falta de apresentação prévia de um modelo de resolução a ser seguido. Após certa insistência da professora e com o prosseguimento das atividades, foi possível perceber mais confiança e entusiasmo dos alunos na realização das suas tarefas.

Uma concepção muito forte entre os alunos é que as soluções apresentadas necessariamente devem ser calculadas exatamente. Quando solicitada alguma estimativa que não exigia cálculo algum, mas somente uma interpretação, os alunos, na sua maioria, não se contentavam em colocar uma resposta sem que tivesse um cálculo que a sustentasse.

Percebemos que os alunos continuam apresentando muitas dificuldades para resolver analiticamente uma equação diferencial devido aos erros cometidos em cálculos envolvendo matemática elementar e cálculo diferencial e integral, mas podemos dizer que em sua maioria conseguem resolver numericamente equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes, e discutir sua solução a partir de uma equação fornecida com o auxílio de recursos computacionais. Acreditamos também ter motivado os alunos para a aprendizagem das equações diferenciais, liberando-o dos cálculos tediosos, ao focar as aulas na avaliação qualitativa das soluções das equações diferenciais apresentadas e na resolução numérica das mesmas, com o auxílio de recursos computacionais, proporcionado assim melhores condições para uma aprendizagem significativa.

Acreditamos que as atividades computacionais motivaram os alunos a aprender e facilitaram a visualização e resolução numérica das situações problemáticas, no entanto, não pareceu ser suficiente para os alunos se sentirem confortáveis e preparados para freqüentarem as disciplinas seguintes do curso, em que os professores exigem uma solução analítica, pois o tempo investido nas soluções analíticas ficou reduzido em nossa abordagem. Este fato será levado em consideração em uma reestruturação futura da proposta.

5 COMENTÁRIOS FINAIS

Percebendo as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de equações diferenciais e a desmotivação para estudar, decidimos introduzir este conteúdo a partir de situações-problema relacionadas aos cursos de graduação para os quais a disciplina é oferecida. Adotamos uma metodologia reversa, em que partindo de situações-problema contextualizadas, às quais os alunos eram capazes de atribuir algum significado, nos concentrávamos no comportamento das soluções das equações diferenciais, exploradas com o

recurso computacional, para somente em etapa posterior apresentar as técnicas de obtenção da solução analítica. Buscamos centrar o ensino no aluno e incentivar a interação aluno-professor-material-recursos, de modo a minimizar a exposição transmissiva do conhecimento. Dos vários *softwares* atualmente disponíveis, optamos pelo *Powersim* e pela planilha de cálculos do OpenOffice, porque permitem ao aluno fazer experimentos conceituais, simulações, construir tabelas e gráficos que ajudam na interpretação das aplicações apresentadas, e são *softwares* de distribuição gratuita, aos quais o aluno tem acesso via *internet*.

Em linhas gerais, a abordagem adotada mostrou resultados positivos em relação ao engajamento e interação dos alunos entre si, com a professora, com a matéria de ensino e os recursos computacionais. Acreditamos que isto contribuiu para uma melhor compreensão das equações diferenciais, embora ainda persistam várias das dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo. Surgiram também alguns indicativos para melhoria da proposta, principalmente no que se refere à metodologia das aulas, que estão sendo considerados na re-aplicação da proposta, no primeiro semestre de 2007.

A título de conclusão, voltemos ao início: de fato os estudantes demonstram falta de habilidades matemáticas básicas e isso não pode ser ignorado. Entretanto, uma preocupação excessiva com a resolução analítica de equações diferenciais, apresentadas com pouco ou nenhum vínculo com os interesses, principalmente profissionais, dos estudantes de engenharia não parece ser o caminho. Acreditamos que trabalhando com situações de provável interesse do estudante, seja o modo mais seguro de engajá-lo com seu próprio aprendizado, fazendo com que ele mesmo anseie por superar suas dificuldades, em vez de termos que forçá-lo para tal.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Platano, 2003.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e diagramas V.** Porto Alegre: Ed. do Autor, 2006.

SANTOS, A. de C. K. dos; CHO, Y.; ARAUJO, I. S.; GONÇALVES, G. P. **Modelagem computacional utilizando STELLA.** Rio Grande: Editora da Furg, 2002.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2003.

THE USE OF COMPUTATION RESOURCES FOR THE TEACHING AND LEARNING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: This article is based on a study carried out about the learning of differential equations with the use of computation resources. Taking into account the most common difficulties students face in the learning of this content, instructional material based on Ausubel's Meaningful Learning Theory and Vygotsky's Social

Interactive Theory was prepared as an aid to help them to overcome their difficulties. The study involved two regular groups of students of Engineering and Industrial Chemistry Programs of the University Center – UNIVATES-RS, in the Calculus III course. The results showed that the proposed activities as well as the use of computation resources motivated the students in the learning of differential equations, which is an important factor for the meaningful learning according to Ausubel. The interaction of the students in groups as well as the instructional material provided interesting discussions and favorable conditions for the learning.

Keywords: *Differential equations, Computational modeling, Teaching and learning process.*