

UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA O ENSINO DA DINÂMICA EM ENGENHARIA MECÂNICA

Paulo de Tarso Salviano Filho - tarsosalviano@ibest.com.br

Mario Olavo Magno de Carvalho - molavo@unb.br

Cristiano Viana Serra Villa - cvs@unb.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica.

Campus Universitário Darcy Ribeiro, Faculdade de Tecnologia, Bloco C.

70910-900 – Brasília - DF

Resumo: *Este trabalho apresenta um esforço no desenvolvimento de ferramentas para aperfeiçoamento do processo de aprendizagem em dinâmica de estruturas mecânicas. Na dinâmica de corpo rígido, as equações de movimento podem ser muito complexas devido a não linearidade. Para resolver estas equações, os métodos analíticos são frequentemente pouco práticos ou não usuais. Assim neste tipo de problema, são empregadas ferramentas de simulação numérica para determinar o movimento do sistema. Existem, dentro dos métodos numéricos, vários modos para integrar as equações de movimento, muitos dos quais são implementados em pacotes amigáveis, onde podem ser criados modelos complexos por meio gráfico. Em particular, este trabalho explora a ferramenta SIMULINK (de Mathworks®) por causa de seu potencial didático. O SIMULINK possui vários algoritmos numéricos para integrar as equações de movimento, em combinação com uma interface de usuário gráfica e possibilidades de animação. Para ilustrar a utilização do SIMULINK como ferramenta de auxílio ao ensino de mecânica de partícula, um exemplo simples de dinâmica é mostrado. Depois disso, é analisado um problema com um nível maior de complexidade. Os resultados são importantes do ponto de vista didático.*

Palavras-chave: *Dinâmica, Simulação numérica, Ensino.*

1 INTRODUÇÃO

O estudo da dinâmica das estruturas mecânicas, em particular da dinâmica dos corpos rígidos, constitui um dos fundamentos do conhecimento ligado à Engenharia Mecânica. O seu bom entendimento concorre de maneira fundamental para a intuição e para o domínio dos conceitos relacionados à disciplina e à compreensão da Física dos fenômenos envolvidos.

Com o intuito de simplificar o modelo e de facilitar o processo de aprendizagem, inicialmente são adotadas várias simplificações físicas (ex. assumindo corpo rígido e rótula ideais), bem como simplificações matemáticas (ex. através de linearizações). Posteriormente

essas restrições são por vezes relaxadas tornando os problemas progressivamente mais complexos.

Em uma linguagem gráfica e intuitiva (MATSUMOTO, 2003), através de diagramas de bloco, este trabalho, baseado na ferramenta SIMULINK, oferece uma alternativa à simulação numérica clássica para abordar problemas de maior complexidade.

O SIMULINK (CUNHA & SEVERO, 2006) é um programa (toolbox) baseado em uma plataforma MATLAB®, que permite facilmente modelar, simular e analisar sistemas dinâmicos (mecânicos, elétricos, etc), contínuos e/ou discretos no tempo. A principal vantagem desta ferramenta é apresentada na forma de se programar os modelos matemáticos, pois este lança mão de diagramas muito parecidos com os utilizados para estruturar inicialmente algoritmos de programação (Figura 1).

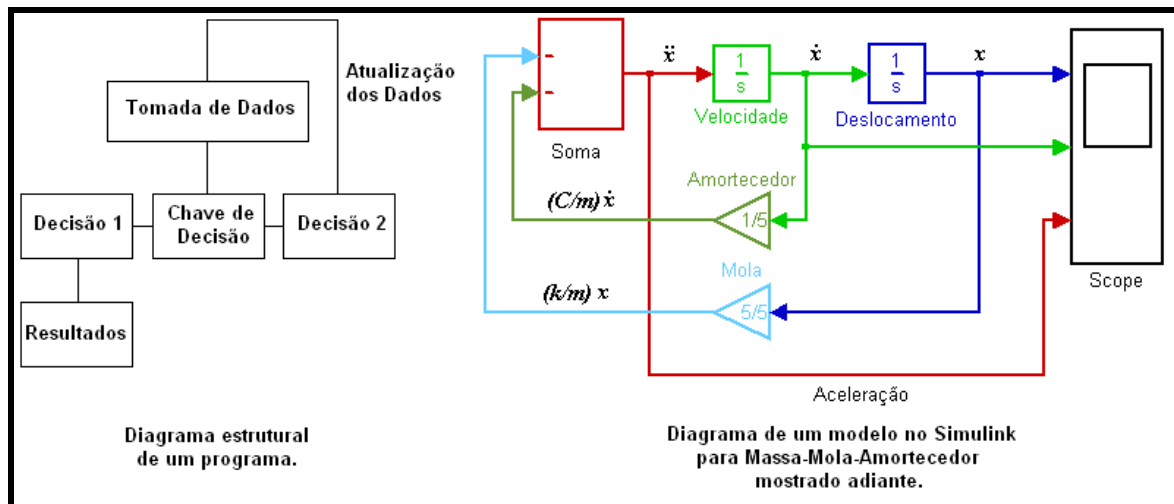


Figura 1. Analogia entre um Diagrama estrutural e um Diagrama criado no SIMULINK.

Assim, como a utilização deste software contribuiria para o incremento de eficiência no processo didático (ensino-aprendizado) vivenciado pelo professor e aluno? A vantagem apresentada se deve inicialmente à facilidade de programação no ambiente proposto, deixando mais tempo para a exploração e para a interpretação de aspectos físicos, sem o risco de se deslocar à ênfase do problema e de se perder na construção de algoritmos e de modelos numéricos de implementação difícil e demorada. A ferramenta SIMULINK dispõe ainda de interfaces muito amigáveis que permitem a apresentação dos resultados através de gráficos e de animações que potencializam o entendimento físico e a intuição sobre o problema.

No presente trabalho é explorado aplicações de conceitos relacionados à cinemática e à cinética, resultando em equações diferenciais ordinárias, que serão resolvidas através do modelo computacional feito no SIMULINK.

2 A METODOLOGIA APLICADA

A metodologia, para a solução dos problemas aqui abordados, pressupõe uma prévia modelagem do problema físico e matemático, conforme apresentado esquematicamente na primeira parte do fluxograma da Figura 2. Na seqüência, o modelo matemático obtido é introduzido no ambiente de simulação do SIMULINK, onde o modelo numérico é então construído através de diagrama de blocos. Embora a etapa anterior seja essencial para a modelagem do problema como um todo, neste trabalho é dada a atenção à segunda etapa de modelagem, isto é, ao modelo numérico para simulação dos problemas dinâmicos, incluindo aí a apresentação dos resultados através de gráficos e animações para melhor compreensão do problema. A abordagem, feita através da simulação numérica com o SIMULINK, não se

restringe aos problemas lineares ou à dimensão do mesmo, embora a complexidade da solução cresça rapidamente com o aumento do número de graus de liberdade.

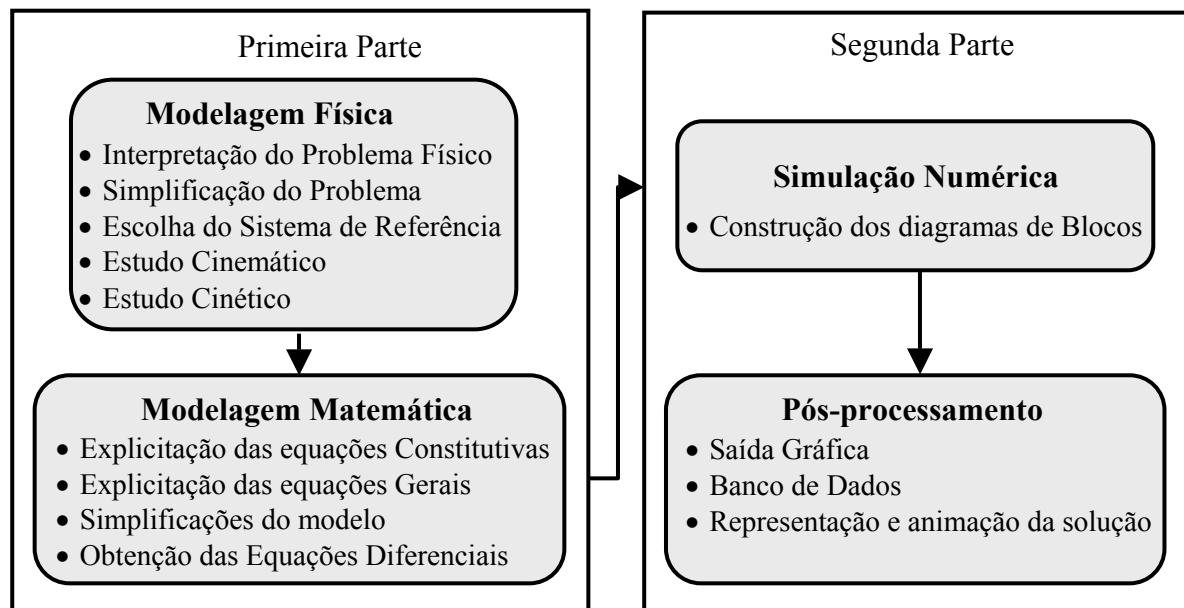


Figura 2. Fluxograma.

3 UM CASO SIMPLES: MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

O primeiro caso apresentado consiste no estudo do movimento oscilatório de uma partícula (SETO, 1971), sob ação de uma força elástica e de uma força de amortecimento. O sistema massa-mola-amortecedor, com um único grau de liberdade, pode ser modelado por uma equação diferencial linear ordinária, homogênea com coeficientes constantes, que possui solução analítica. Na Figura 3 é apresentado um esquema da idealização deste sistema e seu Diagrama de Corpo Livre (DCL).

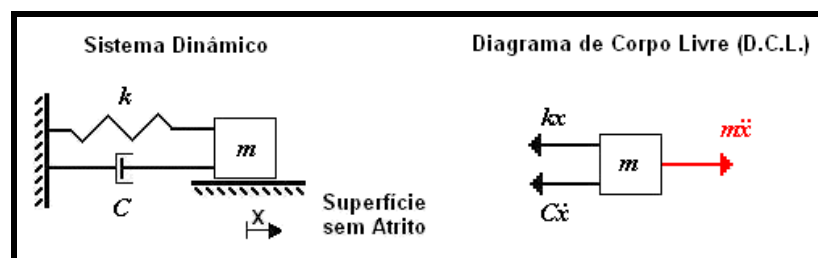


Figura 3. Esquema do sistema Massa-Mola-Amortecedor e DCL.

3.1 Modelagem física

Após a escolha de um referencial para observar o fenômeno, é construído um DCL, a partir do qual é possível identificar as forças de campo e de contato que atuam sobre o corpo. No diagrama da Figura 3, na direção “ x ”, são destacadas as forças devido à mola (kx) e ao amortecimento ($C\dot{x}$). A força devido à mola é expressa por uma relação constitutiva linear entre a própria força e a deformação elástica da mola. Tal relação possui uma constante de proporcionalidade, que no caso é denominada rigidez e representada por k . Esta constante depende tanto da geometria da mola como do material com que esta foi construída. Esta força está associada à energia potencial elástica ou ao trabalho conservativo da força da mola.

A constante de proporcionalidade C , presente na relação que determina a força de amortecimento, relaciona à proporcionalidade entre a força e a velocidade relativa entre as extremidades do elemento amortecedor. Esta força está associada à energia dissipada na forma de calor, devida ao trabalho dissipativo da força do amortecedor. Outra constante de proporcionalidade que aparece é a massa do corpo m , e esta representa a característica de inércia e está associada à oposição de um corpo à aceleração a que se submete.

Empregando a 2ª lei de Newton sobre a partícula, encontra-se a seguinte equação de movimento:

$$m \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad - \quad C \dot{x}(t) - k x(t) = m \ddot{x}(t) \quad \Sigma F = m a \quad (1)$$

3.2 Simulação numérica através do SIMULINK

Manipulando algebricamente a Equação (1), obtém-se que:

$$\ddot{x}(t) = - \left(\frac{C}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) \right) = - \frac{C}{m} \dot{x}(t) - \frac{k}{m} x(t) \quad (2)$$

A idéia aqui, utilizada na construção do modelo computacional, é isolar o termo da aceleração $\ddot{x}(t)$ a cada passo de iteração, igualando-o ao simétrico da soma dos termos devido à aceleração exercida pelo amortecimento $(C/m)\dot{x}(t)$ e pela mola $(k/m)x(t)$. O modelo numérico no SIMULINK para Equação (2) é mostrado na Figura 1.

Na Figura 1 pode-se ver um bloco de Soma (no SIMULINK denominado por **Sum**) realizando a soma das parcelas $(C/m)\dot{x}(t)$ e $(k/m)x(t)$. Os blocos denominados por Amortecedor e Mola (**Gain**) efetuam a multiplicação das constantes (C/m) e (k/m) pelos respectivos valores das funções velocidade $\dot{x}(t)$ e deslocamento $x(t)$ provenientes do passo anterior na iteração. Os blocos Velocidade e Deslocamento (**Integrator**), que efetuam a integração dos sinais de $\ddot{x}(t)$ e $\dot{x}(t)$ de para resolução da Equação (2), são mostrados de forma isolada na Figura 4.

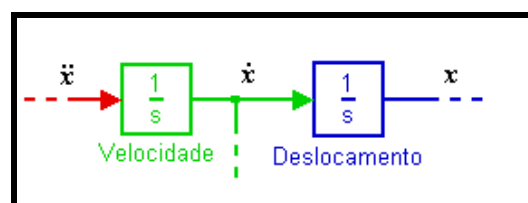


Figura 4. Integração de $\ddot{x}(t)$ e $\dot{x}(t)$.

Condições iniciais

Uma vez estabelecidas às equações diferenciais do problema, as condições iniciais devem ser escolhidas para possibilitar uma solução única do problema (BOYCE & DIPRIMA, 2002). Assim a inserção, destas condições, é feita através de clique duplo sobre os blocos (Figura 4) denominados *Velocidade* e *Deslocamento*, para alterar, respectivamente, a velocidade inicial e o deslocamento inicial por meio de caixas de diálogos que serão abertas. Os valores utilizados na simulação numérica (item 3.3) são: $\dot{x}(0) = 2 [m/s]$ e $x(0) = 0 [m]$.

Escolha da função de integração

Outra questão, a ser esclarecida, é a respeito da simbologia utilizada pelos ícones dos blocos *Velocidade* e *Deslocamento*, que é uma alusão à transformada de Laplace. Estes blocos operam a integração indicada através de rotinas otimizadas no Matlab e incorporadas nas funções ODE45, ODE113, dentre outras. Essas funções predefinidas resolvem à equação

diferencial de forma numérica, e podem ser detalhadas e/ou alteradas através do menu *Simulation* → *Configuration Parâmetro* → *Solver* no SIMULINK.

Ajuste de parâmetros no modelo

Para alteração dos valores, tais como a constante elástica da mola, coeficiente de amortecimento e massa da partícula, basta clicar duas vezes sobre os blocos (Figura 1) denominados *Mola* e *Amortecedor*, assim respectivamente cada um irá abrir uma caixa de diálogo, nas quais se podem efetuar as alterações desejadas, ou seja, alterar os valores de (C/m) e (k/m) . A título de exemplo, foi simulada uma situação onde a partícula possuía uma massa de $5[kg]$. Alguns parâmetros utilizados na simulação numérica são expostos na tabela abaixo.

Tabela 1. Parâmetros utilizados na simulação numérica.

Vibração Mecânica para uma Partícula			
Caso	Constante Elástica da Mola $k [N/m]$	Coefficiente de Amortecimento $C [Ns/m]$	Fator de Amortecimento $\xi = \frac{C}{2m\omega_n}$
1	5	1	0,1
2	5	10	1
3	5	0	0

Na quarta coluna da Tabela 1 aparece um fator importante para a análise dos resultados obtidos na simulação numérica. Este, denominado de fator de amortecimento (SETO, 1971), estabelece uma relação entre o amortecimento C e o amortecimento crítico $2m\omega_n$, onde a frequência natural ω_n de vibração é $\sqrt{k/m}$. O fator de amortecimento indica se o movimento realizado estará com amortecimento subcrítico, crítico ou supercrítico.

3.3 Resultados alcançados pela simulação numérica

Pode-se observar que quando $(C/2m)^2 < (k/m)$, ou seja $\xi < 1$, as raízes da equação característica são complexas e conjugadas, levando a solução de vibração amortecida ou de amortecimento subcrítico (caso 1). Caso contrário é denominado de amortecimento crítico com $\xi = 1$ (caso 2) ou ainda supercrítico quando $\xi > 1$ (não simulado). O caso 3 da Tabela 1 representa uma vibração sem amortecimento. A simulação numérica é mostrada na Figura 5.

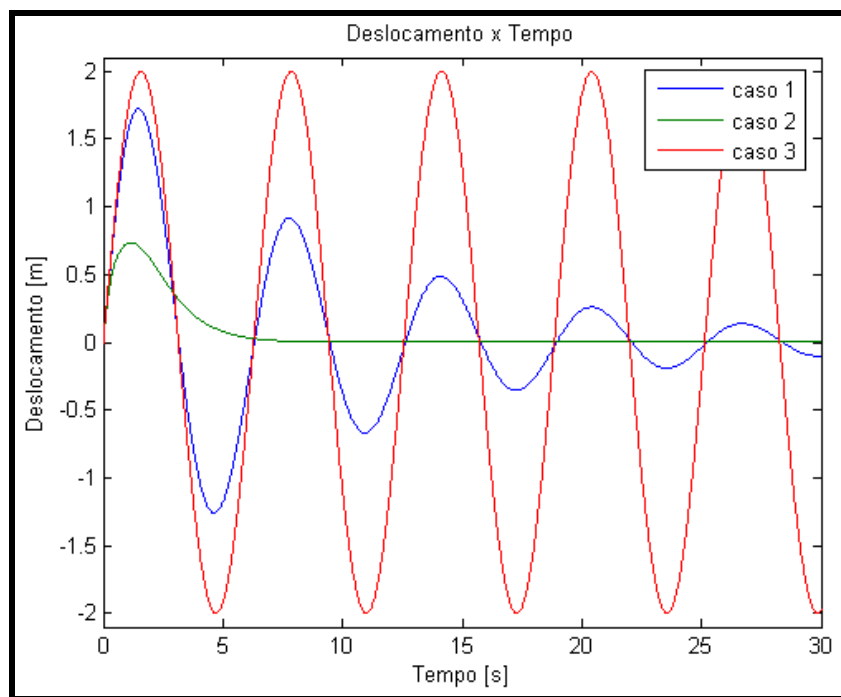


Figura 5. Casos de subamortecimento, criticamente amortecido e movimento harmônico simples.

4 MECANISMO COM TRÊS ROTAÇÕES SIMULTÂNEAS

O segundo problema (SANTOS, 2001) tratado, já um pouco mais elaborado e com um maior grau de complexidade, consiste em se encontrar a função que descreve o movimento de um pêndulo simples, rotulado na extremidade “D” de uma haste vertical, montada sobre o mecanismo mostrado na Figura 6. Para explicitar os movimentos realizados aqui, são definidos arbitrariamente quatro sistemas referencias (um inercial e três móveis). O sistema inercial R , do qual se deseja explicitar o movimento do pêndulo, é orientado pelos eixos ortogonais X - Y - Z e tem como origem o ponto O . O primeiro sistema móvel $R1$, foi escolhido como sendo solidário ao braço AB , é orientado pelos eixos ortogonais X_1 - Y_1 - Z_1 com origem no ponto B . O segundo sistema móvel $R2$, solidário ao disco, possui orientação dada pelos eixos ortogonais X_2 - Y_2 - Z_2 com origem no ponto C . E por fim, o terceiro sistema móvel $R3$ solidário a haste DE , que possui orientação dada pelos eixos ortogonais X_3 - Y_3 - Z_3 e origem no ponto D . O mecanismo, idealmente rígido, executa duas rotações simultâneas e tem massas e inércias desprezíveis. Neste mecanismo, o braço AB gira em torno do eixo “Z” com velocidade angular $\dot{\alpha}$ quando observada do referencial R . O disco, rotulado na extremidade “B” do braço, gira em torno do eixo “Z₁”, de forma independente do movimento do braço, com velocidade angular constante $\dot{\beta}$ quando observada do referencial $R1$. A combinação das rotações impostas confere ao problema características não lineares.

Uma propriedade interessante sobre operações com sistemas de coordenadas é a transformação linear efetuada pela passagem de um sistema de coordenadas para um outro qualquer, e vice-versa. Estas operações são realizadas pelas matrizes ortogonais de rotação e por suas inversas (EDWARDS & PENNEY, 1998), e é empregada na resolução deste problema para projetar coordenadas de um sistema em outro.

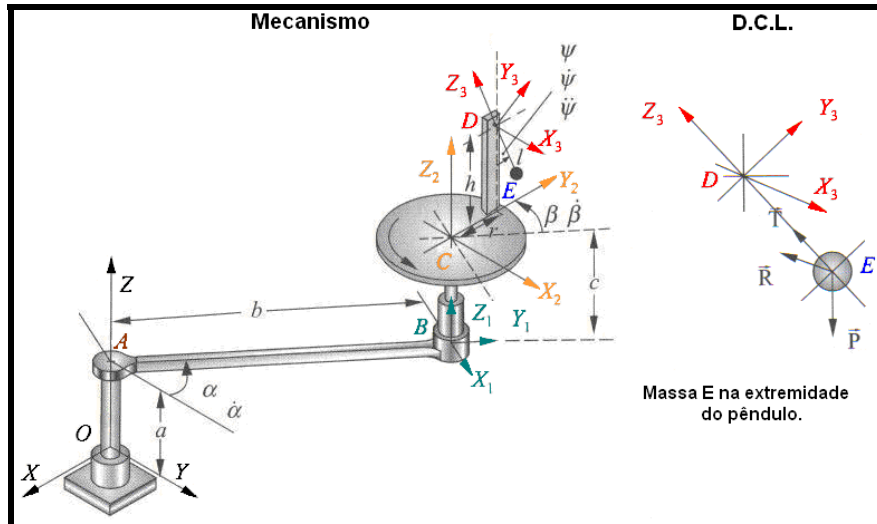


Figura 6. Mecanismo e DCL para a massa E. Figura adaptada de (SANTOS, 2001).

4.1 Modelagem física

O primeiro passo, na modelagem, foi definir os sistemas de referência (R , $R1$, $R2$, e $R3$). Tal procedimento é tomado com intuito de descrever o movimento complexo do pêndulo, em função de movimentos mais simples (vistos dos referenciais R , $R1$ e $R2$ combinados). Assim cada sistema móvel de referência foi vinculado, através de um referencial, a movimentos específicos do mecanismo, conforme mostrado na Figura 6.

Ao se estudar o movimento do pêndulo, é estritamente necessário determinar a aceleração linear absoluta da massa na extremidade do pêndulo (localizada no ponto E, Figura 6), e assim aplicar o equilíbrio dinâmico conforme a 2ª Lei de Newton (SANTOS, 2001).

Calculando a aceleração linear absoluta da massa na extremidade do pêndulo a partir do referencial R , é obtida a Equação (3). Porém esta é projetada no sistema de referência $R3$ (transformação de R em $R3$), pois o objetivo é calcular a função $\psi(t)$ (descrita pelo movimento angular do sistema móvel $R3$ em relação ao suporte vertical, no qual o pêndulo é rotulado).

$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{DE} + \dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{r}_{DE} + 2\vec{\omega}_3 \times \vec{v}_{DE\,rel} + \vec{a}_{DE\,rel} \quad (3)$$

Na equação acima, \vec{a}_D é a aceleração linear absoluta do ponto D em relação a $R1$ projetada no referencial $R3$. A aceleração linear relativa $\vec{a}_{DE\,rel}$ e a velocidade linear relativa $\vec{v}_{DE\,rel}$, ambas do ponto E em relação ao referencial $R3$, são nulas devido à hipótese adotada de corpo rígido. O vetor posição \vec{r}_{DE} (que liga o ponto D ao ponto E) e $\vec{\omega}_3$ (que é a velocidade angular absoluta de $R3$ em relação a R) são ambos representados na base em $R3$. De forma análoga ao desenvolvimento proposto para \vec{a}_E , a expressão para a aceleração \vec{a}_D , bem como a acelerações absolutas dos outros pontos do mecanismo (A, B, C, e O) podem ser explicitadas. Levando este resultado na Equação (3), é obtido:

$$\vec{a}_E = \left\{ \begin{array}{l} -b(\dot{\alpha})^2 \sin \beta - 2l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ (-b(\dot{\alpha})^2 \cos \beta - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2) \cos \psi - l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \cos \psi \sin \psi + l\ddot{\psi} \\ (b(\dot{\alpha})^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2) \sin \psi - l(\dot{\psi})^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2 \psi \end{array} \right\} \quad (4)$$

As forças de campo e de contato atuantes sobre a massa, projetadas nos eixos de $R3$, são mostradas a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Peso} & \text{Tração sobre a haste } Z_3 & \text{Reação na direção } X_3 \\
 \vec{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \sin \psi \\ -mg \cos \psi \end{Bmatrix} & \vec{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_z \end{Bmatrix} & \vec{R} = \begin{Bmatrix} -R_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

Após a determinação da aceleração linear absoluta da massa na extremidade do pêndulo, e expressando todas as forças atuantes sobre a massa (ver DCL da Figura 6) no terceiro sistema móvel de referência, pode-se aplicar o equilíbrio dinâmico através da 2ª Lei de Newton, conforme Equação 5.

$$\begin{Bmatrix} -R_x \\ -mg \sin \psi \\ -mg \cos \psi + K_z \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} -b(\dot{\alpha})^2 \sin \beta - 2l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ (-b(\dot{\alpha})^2 \cos \beta - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2) \cos \psi - l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \cos \psi \sin \psi + l\ddot{\psi} \\ (b(\dot{\alpha})^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2) \sin \psi - l(\dot{\psi})^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2 \psi \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Onde g é a constante gravitacional e m é a massa na extremidade do pêndulo.

A segunda linha da equação vetorial acima descreve o movimento angular do pêndulo observado do referencial R , porém projetado no R_3 , e esta será modelada através do SIMULINK. As outras duas, a primeira e a terceira equações, permitem expressar as intensidades das forças \vec{R} e \vec{T} , respectivamente nas direções X_3 e Z_3 .

4.2 Simulação numérica através do SIMULINK

A partir da Equação (5) será construído um modelo numérico, para descrever o movimento angular do segmento DE em relação à vertical. Essa equação é mostrada a seguir, após seus termos terem sido rearranjados:

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \psi + \frac{(b \cdot (\dot{\alpha})^2 \cdot \cos \beta + r \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2)}{l} \cdot \cos \psi + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \quad (6)$$

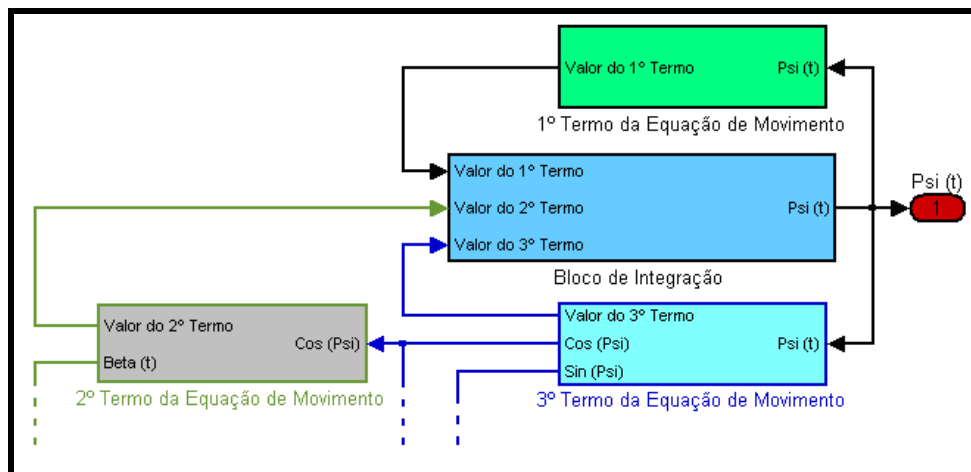


Figura 7. Subsistemas que executam a integração da Equação 6.

A idéia utilizada neste modelo numérico é aplicar a mesma estrutura (*Bloco de Integração*) que foi montada para o problema Massa-Mola-Amortecedor mostrado anteriormente, visto que a solução do problema passa pela resolução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Assim foram criados os subsistemas mostrados na Figura 7, que são denominados por “1º Termo da Equação de Movimento”, “2º Termo da Equação de Movimento”, e “3º Termo da Equação de Movimento”. Cada subsistema executa, a cada passo de iteração, o cálculo do valor das respectivas parcelas na Equação (6).

De forma a mostrar a construção de um desses subsistemas, será descrita a implementação do primeiro termo da Equação (6), que depende do valor do $\sin\psi$ a cada passo de iteração. Assim o bloco “1º Termo da Equação de Movimento”, deverá ser realimentado pelo valor da função $\psi(t)$ (calculado na iteração anterior), sendo posteriormente multiplicado pelo valor constante de g/l . Esse termo é implementado pelo subsistema, visto na Figura 8 com os seus blocos no detalhamento correspondente.

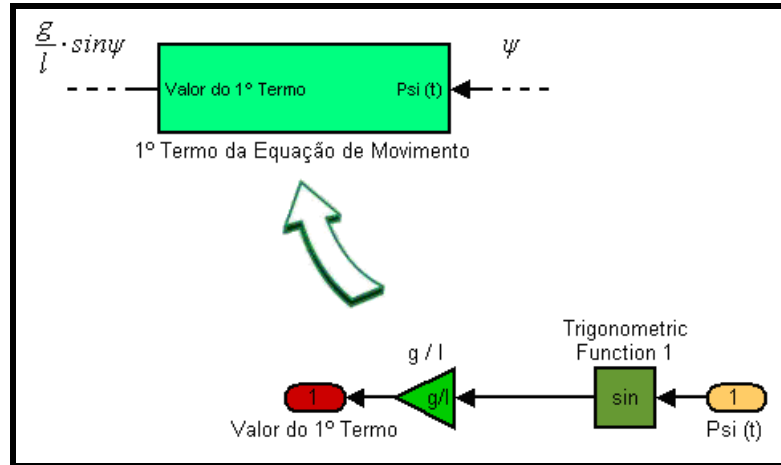


Figura 8. Subsistema e blocos que calculam o valor do 1º termo da equação.

A partir da determinação da solução para a Equação (6), pode-se também calcular a trajetória do ponto material “E”, quando observado do referencial R. Esta trajetória, também conhecida como órbita, é obtida pela Equação (7) e está implementada na Figura 9.

$$\vec{R}_{OE} = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} + \vec{r}_{CD} + \vec{r}_{DE} = \begin{cases} -b \sin \alpha - r \sin (\alpha + \beta) \\ b \cos \alpha + r \cos (\alpha + \beta) + l \sin \psi \\ a + c + h - l \cos \psi \end{cases} \quad (7)$$

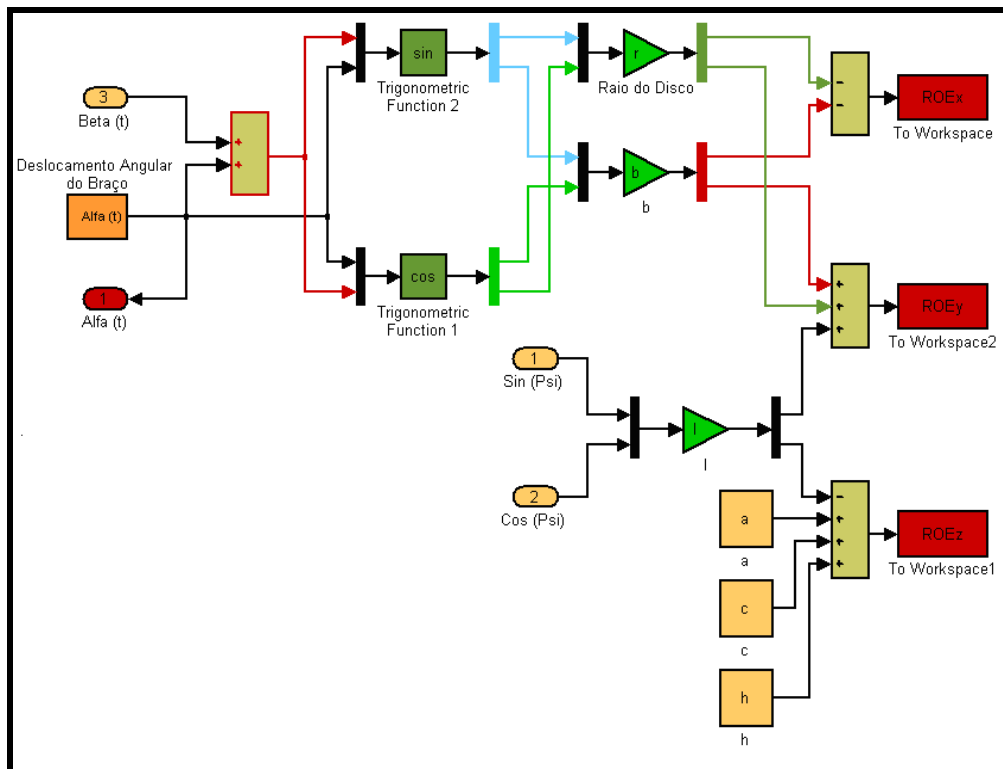


Figura 9. Cálculo da órbita efetuada pela massa.

Condições iniciais

As condições iniciais de velocidade angular e deslocamento angular podem ser alteradas clicando dentro do Bloco de Integração (Figura 7). Na simulação realizada no item 4.3 foram adotadas as seguintes condições iniciais: $\psi(0) = \pi/4$ [rad] e $\dot{\psi}(0) = 0$ (partindo do repouso).

Ajuste de parâmetros no modelo

Os parâmetros geométricos a , b , c , r , h , e l podem ser alterados através da caixa de diálogo presente no modelo. As alterações tanto de parâmetros geométricos quanto de parâmetros cinemáticos ($\dot{\alpha}(t)$ e $\dot{\beta}(t)$) podem ser feitas com um duplo clique sobre a máscara principal mostrada na Figura 10.

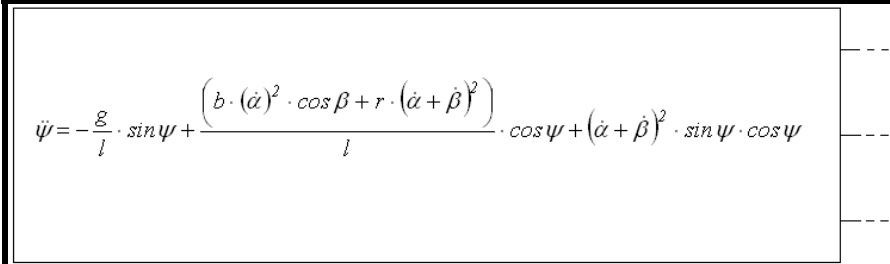
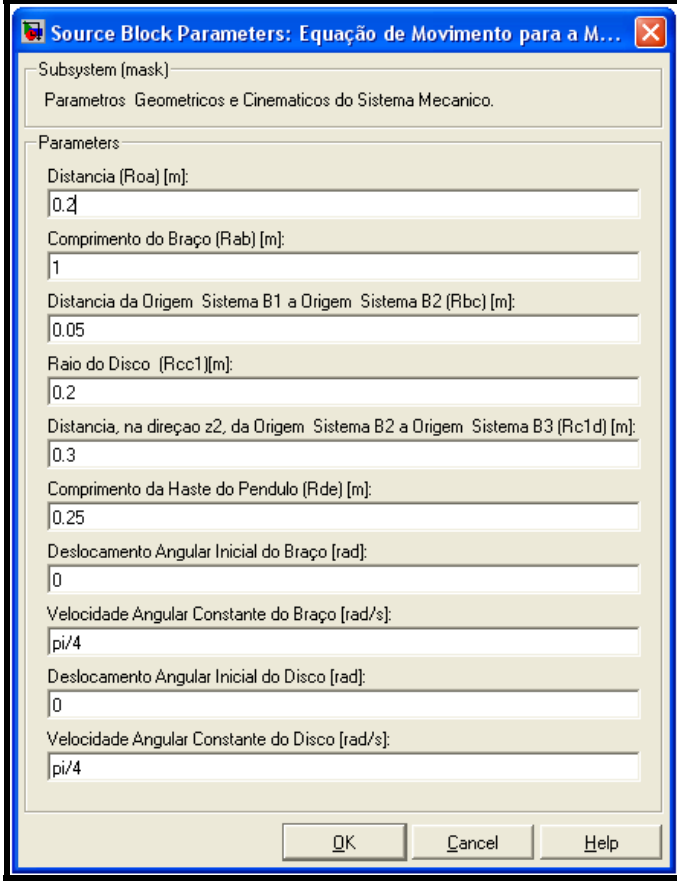

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \psi + \frac{\left(b \cdot (\dot{\alpha})^2 \cdot \cos \beta + r \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \right)}{l} \cdot \cos \psi + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi$$

Figura 10. Máscara Principal

A Figura 11 mostra a caixa de diálogo para escolha dos valores dos parâmetros geométricos e cinemáticos mencionados acima.



The dialog box contains the following parameters and values:

- Subsystem (mask): Parametros Geometricos e Cinematicos do Sistema Mecanico.
- Parameters:
 - Distancia (Roa) [m]: 0.2
 - Comprimento do Braço (Rab) [m]: 1
 - Distancia da Origem Sistema B1 a Origem Sistema B2 (Rbc) [m]: 0.05
 - Raio do Disco (Rcc1)[m]: 0.2
 - Distancia, na direção z2, da Origem Sistema B2 a Origem Sistema B3 (Rc1d) [m]: 0.3
 - Comprimento da Haste do Pendulo (Rde) [m]: 0.25
 - Deslocamento Angular Inicial do Braço [rad]: 0
 - Velocidade Angular Constante do Braço [rad/s]: pi/4
 - Deslocamento Angular Inicial do Disco [rad]: 0
 - Velocidade Angular Constante do Disco [rad/s]: pi/4

Figura 11. Caixa de Diálogo da Máscara Principal.

Na Figura 12 pode-se ver o detalhamento de todos os subsistemas envolvidos para calcular a solução da Equação (6) e para o cálculo da órbita da efetuada pela massa. Para se ter acesso a esses subsistemas do modelo numérico, deve-se dar um clique simples sobre a máscara principal para selecioná-la, e depois apertar simultaneamente as teclas *Ctrl+U*. Nesta mesma figura pode-se observar o bloco “*Cálculo da Órbita da Partícula E*”, que é um subsistema que contém todos os blocos mostrados na Figura 9.

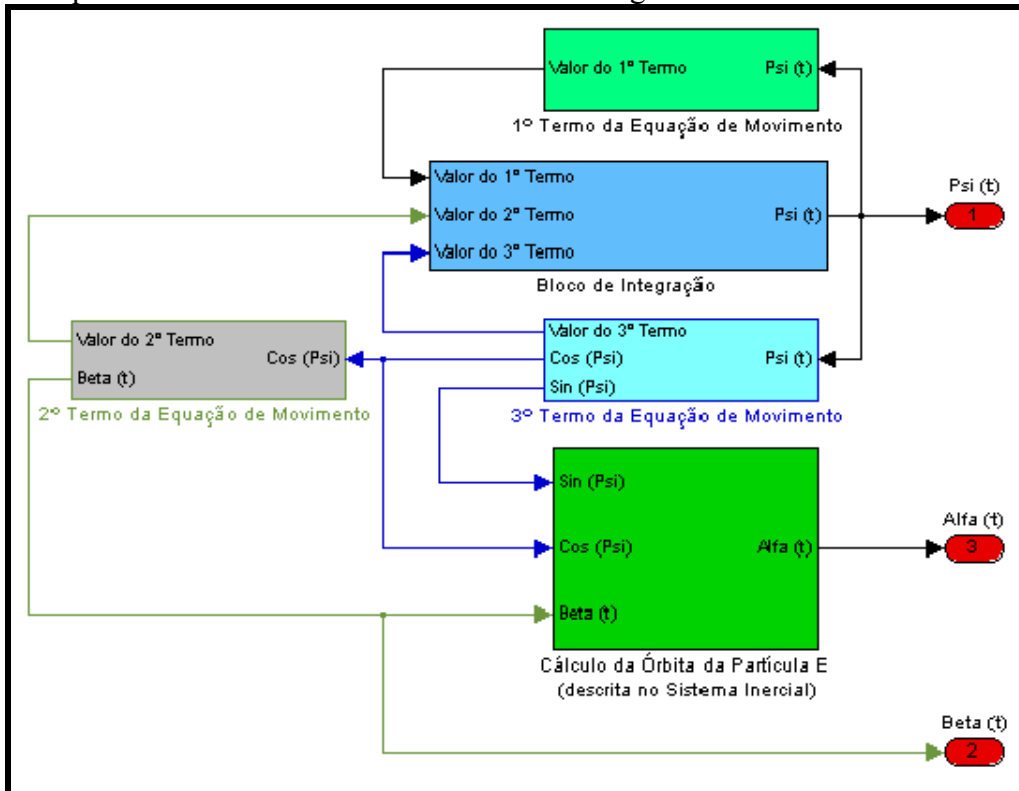


Figura 12. Subsistemas da Máscara Principal.

Os deslocamentos angulares iniciais do braço e do disco do mecanismo foram escolhidos nulos, porém as velocidades angulares para ambos foram $\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(t) = \pi/2 [rad/s]$. Os parâmetros geométricos adotados, na simulação mostrada no item 4.3, foram: $a = 0,2 [m]$, $b = 1 [m]$, $c = 0,05 [m]$, $r = 0,2 [m]$, $h = 0,3 [m]$, e $l = 0,25 [m]$.

4.3 Resultados alcançados pela simulação numérica

A função $\psi(t)$ resultante da simulação numérica, mostrando o ângulo do pêndulo com a direção vertical, é mostrada na Figura 13.

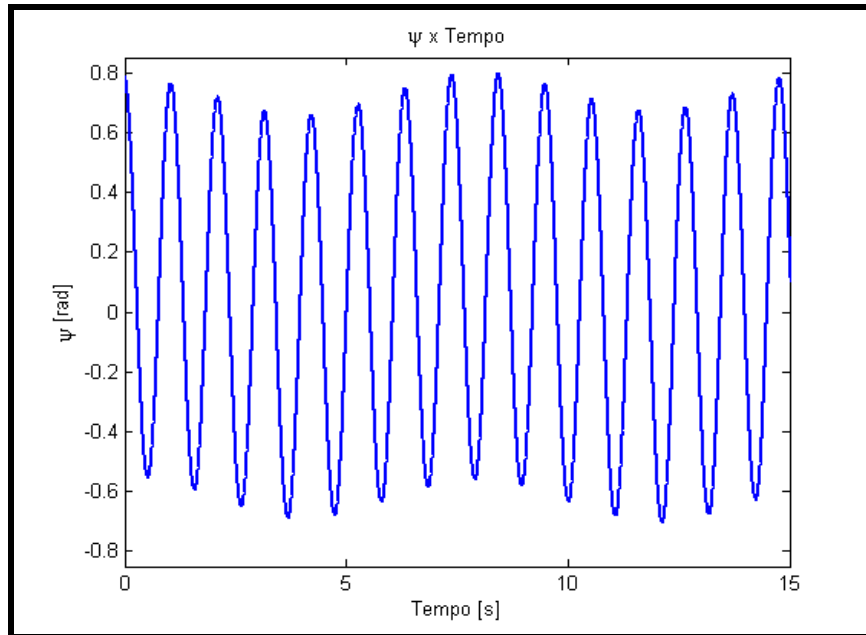


Figura 13. Gráfico da função $\psi(t)$.

A Figura 14 apresenta a órbita executada pela massa na extremidade do pêndulo, quando observada do referencial R .

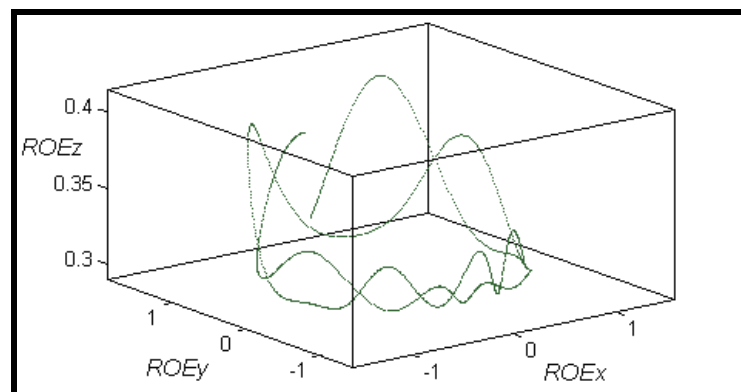


Figura 14. Órbita da partícula E .

Com o propósito de verificar a consistência do modelo numérico construído, foram simuladas condições particulares, cujas soluções analíticas fossem conhecidas. Uma delas é o movimento harmônico simples executado pelo pêndulo. Para tanto se assumiu que as velocidades angulares $\dot{\alpha}(t)$ e $\dot{\beta}(t)$ fossem constantes e nulas.

Impondo essas condições na Equação 6, esta se torna:

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \psi \quad (8)$$

Além disso, visando o comportamento linear do pêndulo, foi adotada a condição inicial de pequeno deslocamento do mesmo, isto é, $\psi(0) = \pi/30 [rad]$ (aproximadamente 6°) e $\dot{\psi}(0) = 0$. Nessas condições, fazendo $\sin \psi \cong \psi$, a Equação (8) tem sua solução dada por:

$$\psi(t) = C_1 \cdot \text{Re}(e^{i\omega_n t - \varphi}) = C_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t - \varphi) \quad (9)$$

Onde: $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$; C_1 e φ são constantes a se determinar.

Pelas condições iniciais em $\psi(0)$ e $\dot{\psi}(0)$, pode-se determinar as constantes C_1 e φ . Assim para $\psi(0) = \pi / 30$ [rad] e $\dot{\psi}(0) = 0$, encontra-se que: $C_1 = \pi / 30 \cong 0.1047$ e $\varphi = 0$.

A Equação (9), baseada em um modelo linear do pêndulo, pode ser visualizada na Figura 15. A solução não linear é apresentada na mesma figura, e como se pode perceber, se confunde com a solução linear analítica para pequenas amplitudes de vibração.

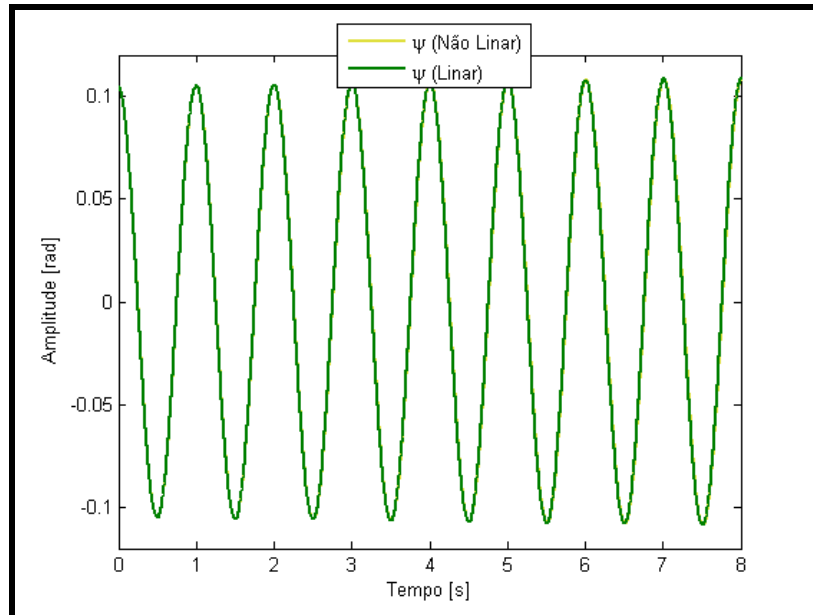


Figura 15. Gráfico da função $\psi(t)$.

A órbita da massa na extremidade do pêndulo, como era de se esperar, quando observada do referencial inercial, para as condições apresentadas, descreve uma trajetória plana de um arco de círculo, Figura 16a. O pêndulo descreve ao longo desta trajetória um movimento harmônico simples, conforme mostrado na Figura 15 gerada pelo modelo numérico. Como a trajetória do pêndulo é plana, ela pode ser melhor observada no plano YZ apresentado na Figura 16b.

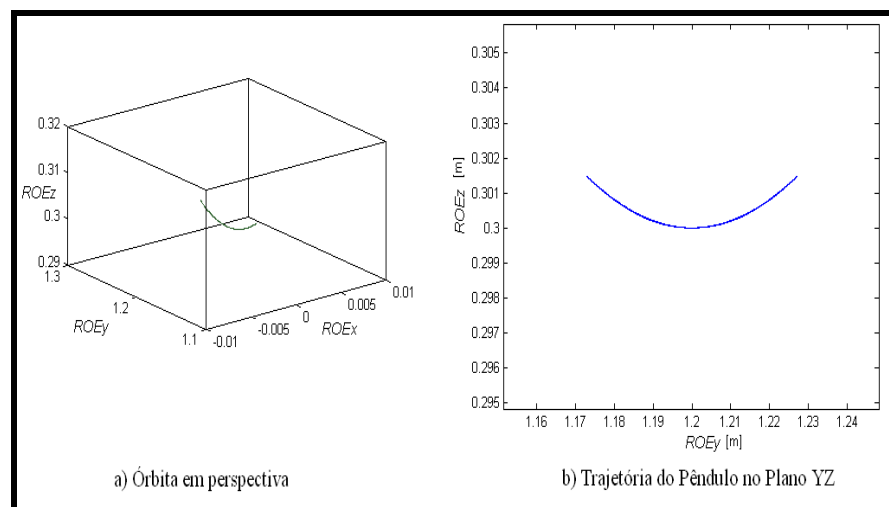


Figura 16. a) Órbita da massa na extremidade do pêndulo. b) Trajetória vista no plano definido pelos eixos Z e Y (Obs. A órbita deformada devido às escalas diferentes apresentadas pelos eixos Y e Z.).

5 CONCLUSÃO

A ferramenta computacional SIMULINK mostrou-se uma forma alternativa e eficiente para resolução numérica de problemas em Dinâmica do Corpo Rígido, abordando os problemas de forma mais didática e estruturada, além de empregar uma linguagem gráfica e intuitiva. Esta vantagem possibilita focalizar a atenção no entendimento dos fenômenos físicos envolvidos no problema, evitando o risco de se perder na construção de algoritmos e de modelos numéricos de implementação difícil e demorada.

Para mostrar as características, que tornam o SIMULINK uma ferramenta interessante na modelagem de problemas de Mecânica, dois exemplos foram estudados, nos quais se pode observar a potencialidade da abordagem.

O primeiro modelo abrange um exemplo simples de vibração mecânica com um grau de liberdade, construído de forma bastante direta com propósitos didáticos. Tal abordagem possibilita o primeiro contato do aluno, através de um problema clássico e simples, para a solução de problemas em Dinâmica nesta linguagem.

O segundo modelo já trata, com a mesma simplicidade, um exemplo mais complexo, que envolve a resolução de uma equação diferencial não linear ordinária de segunda ordem. Os casos tratados pelos dois exemplos proporcionam ao aluno uma metodologia simples para a simulação do comportamento dinâmico de problemas bem mais complexos.

Agradecimentos

Agradecemos ao Professor Fernando J. R. Neves, pela colaboração na revisão deste trabalho.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2002.

EDWARDS, Jr. C. H., PENNY, D. E. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ed. Prentice-Hall do Brasil, 1998.

MATSUMOTO, E. Y. **Simulink 5: Fundamentos**. São Paulo: Ed. Érica, 2003.

SANTOS, I. F. **Dinâmica de Sistemas Mecânicos: Modelagem, Simulação, Visualização, Verificação**. São Paulo: Ed. Makron Books, 2001.

SETO, W. W. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: Ed. McGraw Hill do Brasil, 1971.

CUNHA, C. de S., SEVERO, B. da S. F. **Curso de Simulink 2.0: Modelagem, Simulação e Análise de Sistemas Dinâmicos**. Disponível em: <<http://www.lee.eng.uerj.br/downloads/cursos/simulink/simulink.pdf>> Acesso em: 06 jul. 2006.

ON THE USE OF A SIMULATION TOOL FOR TEACHING ENGINEERING DYNAMICS

***Abstract:** This work presents an effort to develop tools to improve the learning process in dynamics of mechanical structures. In the rigid body dynamics, the equations of motion can*

be very complex due to nonlinearities. To solve these equations, analytical methods are often found unpractical or even unusable. As a result, numerical simulation tools are employed to find the motion of the system. There are several ways to integrate the equations of motion, many of which are implemented in user friendly packages where complex models can be created graphically. In particular, this work explores the tool SIMULINK (from Mathworks ®) because of its didactic potential. SIMULINK has several numerical algorithms to integrate the equations of motion, in combination with a graphic user interface and animation possibilities. To illustrate how SIMULINK can be used as an auxiliary tool in the teaching of particle mechanics, a simple example of dynamics is shown. After that, increasing complexity level problems are analyzed. The results are considered to be very useful from didactic point of view.

Key-words: *Dynamics, Numerical simulation, Learning.*