

ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO CIVIL DA UTFPR

Moacyr Molinari – moacyrmolinari@ufpr.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Construção Civil
Av. 7 de Setembro, 3165, Rebouças
CEP 80230-901 - Curitiba - Paraná
Universidade Federal do Paraná (UFPR), Departamento de Arquitetura e Urbanismo
Centro Politécnico, Jardim das Américas
CEP 81531-990 - Curitiba - Paraná

Resumo: Neste trabalho é apresentada a estratégia de ensino e uma amostra de material didático adotadas na disciplina de Pesquisa Operacional 1 (Programação Linear) do curso de Engenharia de Produção Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR, antigo Cefet/PR). Além das aulas presenciais, duas vezes por semana, os alunos dispõem de um sítio da Internet, que propicia atividades não-presenciais. No sítio eletrônico, são disponibilizadas as mesmas apresentações computacionais trabalhadas nas aulas presenciais, além de outros materiais didáticos e softwares. As apresentações computacionais possuem uma versão para impressão e uma versão dinâmica que pode ser revista pelo aluno em seu computador em qualquer momento e quantas vezes for necessário. A comunicação entre docente e discentes nos períodos entre as aulas presenciais é realizada por “e-mail” individual, MSN, Skype e através de uma “newsletter”.

Palavras-chave: Programação linear, Pesquisa operacional, Método Simplex, Internet, Recursos tecnológicos

1 INTRODUÇÃO

O curso de Engenharia de Produção Civil da Universidade Federal Tecnológica do Paraná – UTFPR (antigo Cefet/PR), propicia a seus alunos a formação em Engenharia Civil aliada à formação em Engenharia de Produção (ou Engenharia Industrial). Os egressos do curso possuem habilitação plena para executar as atividades típicas da Engenharia Civil e também podem atuar junto às empresas em atividades de planejamento e otimização da produção.

No quarto semestre, os alunos estudam uma das primeiras disciplinas da área de produção do curso que é Pesquisa Operacional 1, a qual compreende conteúdos da Programação Linear tais como:

- Formulação de modelos de Problemas de Programação Linear (PPLs);
- Resolução gráfica de PPLs;
- Resolução de PPLs pelo método Simplex, em forma algébrica;
- Resolução de PPLs pelo método Simplex, em quadros;
- Obtenção da solução inicial de PPLs pelo processo do M Grande (“Big M”);
- Aplicações computacionais;
- Problema do transporte;
- Problema da designação;
- Dualidade;
- Análise pós-otimização.

A disciplina é semestral, tem carga horária de 60 horas (quatro aulas de 50 min por semana) e é lecionada pelo autor desde 2003.

O conteúdo previsto é tão extenso que os dois últimos tópicos foram pouco trabalhados nos anos de 2003 e 2004. Visando, entre outros benefícios, otimizar o tempo destinado à disciplina, o autor passou a usar alguns recursos tecnológicos de modo presencial e também fora do ambiente da sala de aula.

2 AULAS PRESENCIAIS

Adotou-se o livro Programação Linear, de Abelardo de Lima Puccini e Nélio Domingues Pizzolatto como bibliografia básica e esteio teórico dos conteúdos da disciplina.

A programação dos assuntos de todas aulas ao longo do semestre é conhecida pelos alunos desde o encontro de apresentação da disciplina. Os alunos são sempre incentivados à leitura prévia, no livro, do conteúdo da aula seguinte. A experiência tem mostrado que esta prática leva a uma melhora no desempenho do processo ensino-aprendizagem na aula seguinte.

No início de cada aula, o professor revê o assunto anteriormente trabalhado e liga-o ao conteúdo do dia. Após a justificativa da importância do conteúdo para a atividade profissional do(a) engenheiro(a) de produção, passa-se a trabalhar o conteúdo de modo dialogado.

Durante as aulas, o professor utiliza quadro de giz quando necessário e conduz o estudo do conteúdo principalmente através de apresentações elaboradas com o programa PowerPoint (© Microsoft), com utilização de “notebook” e “datashow” (uma destas apresentações será mostrada detalhadamente na seqüência). Ao final de cada aula, são propostas tarefas domiciliares: exercícios do livro, leitura do assunto da próxima aula etc. .

Dois das aulas presenciais ocorrem em laboratório de informática, quando são elaborados programas computacionais elementares na linguagem BASIC, discute-se a listagem-fonte de um programa computacional do algoritmo do método Simplex e faz-se a resolução de diversos PPLs com a utilização do programa computacional. As respostas obtidas com o programa computacional são comparadas com aquelas anteriormente obtidas manualmente pelos alunos. Finalmente, são discutidas as limitações do programa computacional.

3 ATIVIDADES NÃO-PRESENCIAIS

Todas as apresentações computacionais discutidas em sala de aula são disponibilizadas no sítio eletrônico www.mamn.com.br/pesquisaoperacional1.htm , no formato “.pdf”, para

impressão, e no formato “.pps” , para visualização dinâmica na tela do computador. Os alunos acessam o sítio eletrônico e lá executam as apresentações ou as gravam em seus computadores para utilização futura. Com isso, as apresentações ficam disponíveis permanentemente e os alunos podem rever os conteúdos quantas vezes forem necessárias.

A figura a seguir mostra uma tela do sítio eletrônico citado:



Figura n.º 01 – Reprodução da tela do sítio eletrônico da disciplina Pesquisa Operacional 1

No mesmo sítio eletrônico, é disponibilizada uma planilha com os resultados das avaliações e a programação dos assuntos das aulas de todo o semestre (“*link*” [Notas e Programação de Atividades](#)). Com esta informação, o aluno sempre pode saber o assunto da aula seguinte, podendo lê-lo previamente no livro adotado.

Os programas computacionais utilizados na disciplina são disponibilizados no sítio eletrônico, assim como exercícios resolvidos, exercícios propostos complementares e provas aplicadas desde o primeiro semestre de 2005 (incluindo respostas das questões, planilhas detalhando as resoluções e desenhos das soluções gráficas). Portanto, são dadas as condições para que os alunos exercitem os conteúdos trabalhados, aprofundem seus conhecimentos e visualizem em que nível os conteúdos são avaliados.

Quando ocorrem atualizações de materiais didáticos, publicações de notas ou alterações eventuais de programação de atividades, os alunos são comunicados por mensagem eletrônica geral enviada a todos os cadastrados no grupo de “e-mail” (“newsletter”) do professor, cujo sítio eletrônico é [http://br.groups.yahoo.com/group/Alunos do prof Moacyr Molinari/](http://br.groups.yahoo.com/group/Alunos_do_prof_Moacyr_Molinari/) . Para se cadastrarem no grupo de “e-mail”, os alunos enviam, no início do semestre, uma mensagem para o endereço Alunos do prof Moacyr Molinari-subscribe@yahoogrupos.com.br .

O atendimento de cada aluno fora do ambiente presencial é realizado através da Internet pela aplicação dos programas MSN (Messenger) e Skype. Com isso, o professor pode dar atendimento individual a cada discente, em ambiente virtual, em horários além daqueles destinados às aulas presenciais.

Os materiais didáticos das demais disciplinas do autor podem ser acessados a partir do sítio www.mamn.com.br/indicadocente.htm, do qual uma tela é mostrada na figura a seguir:

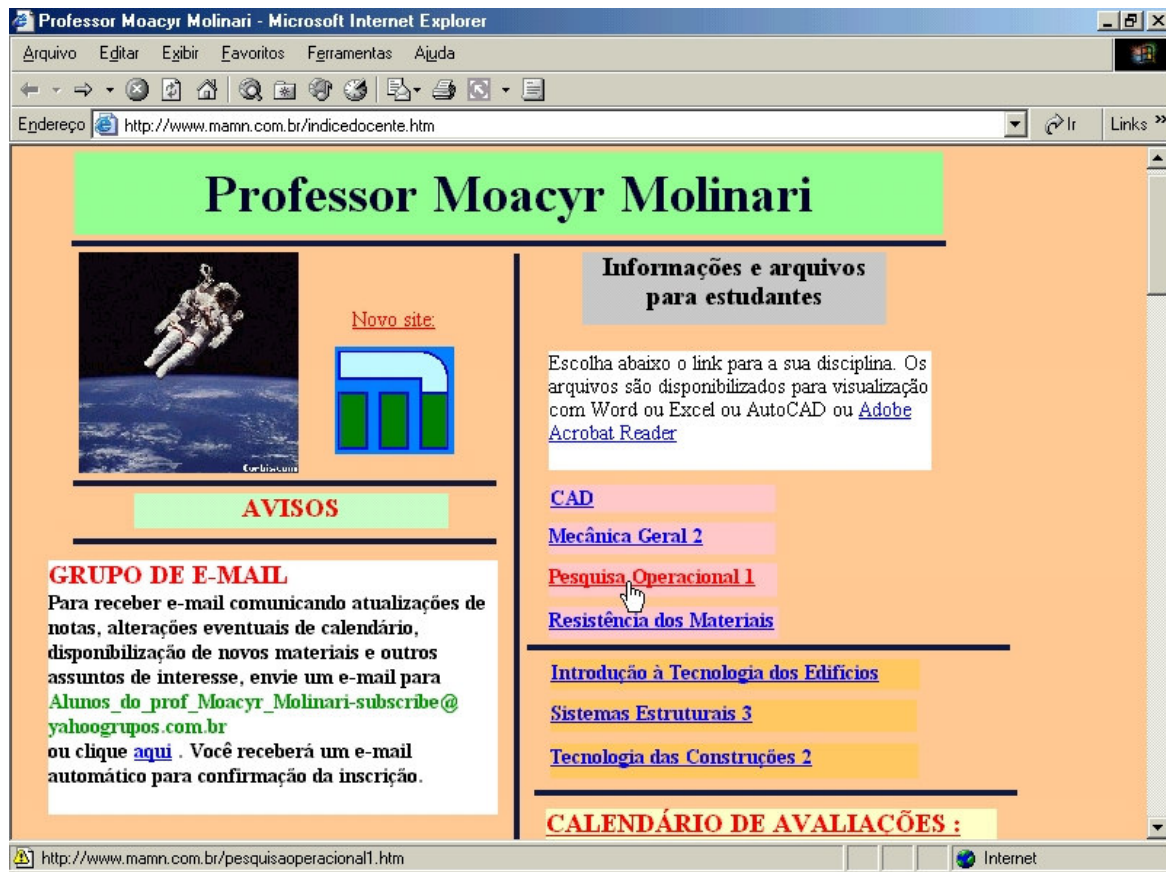


Figura n.º 02 – Reprodução da tela do sítio eletrônico das disciplinas do autor

4 MATERIAL DIDÁTICO

Entre os diversos materiais didáticos utilizados, aqui será descrita e discutida a apresentação para PowerPoint disponibilizada no sítio eletrônico, sobre a aplicação do método Simplex para a resolução de problemas de programação linear. O arquivo computacional pode ser acessado no “link” [Método Simplex – Solução por Quadros](#). Este material será discutido detalhadamente a seguir, visando exemplificar a abordagem construtivista adotada nas aulas presenciais.

Na programação da disciplina, o método Simplex é inicialmente trabalhado em sua forma algébrica, quando os alunos percebem que se trata de um método iterativo: parte-se de uma solução inicial e, com algumas iterações, consegue-se a convergência para a solução ótima procurada. O material didático aqui discutido se refere a uma aula posterior, na qual faz-se a sistematização do método em quadros.

Os alunos são incentivados a uma leitura prévia da teoria do assunto, no livro. Na aula presencial, o material didático é então discutido, dando-se ênfase à aplicação dos passos do algoritmo em um exemplo prático.

No primeiro “slide” da apresentação, resume-se o algoritmo do método, com a intenção de que os alunos tenham um segundo contato com o assunto (o primeiro contato ocorreu na leitura prévia do assunto, no livro).

PESQUISA OPERACIONAL I – prof. Moacyr Molinari	
Método Simplex SOLUÇÃO POR QUADROS - EXEMPLO	
<p>Para sistematizar a aplicação do Método Simplex, o problema de programação linear (PPL) será adaptado a quadros (tabelas). A resolução terá os seguintes passos:</p> <p>a) Transformar o PPL para a forma padrão.</p> <p>b) Adaptar a expressão da função objetivo de modo que passe a ser uma equação com o membro da direita nulo.</p> <p>c) Organizar os coeficientes do PPL em um quadro: colocar a função objetivo na primeira linha, colocar a primeira restrição na segunda linha, colocar a segunda restrição na terceira linha, etc. .</p> <p>d) Obter a solução inicial do PPL: os valores de Z e das variáveis básicas estarão na coluna mais à direita.</p> <p>e) Verificar a otimalidade da solução obtida. A solução será ótima se a primeira linha do quadro <u>NÃO TIVER ELEMENTOS NEGATIVOS</u>. Esta situação corresponde, na solução algébrica, à função objetivo ter apenas coeficientes negativos para as variáveis não-básicas.</p> <p>Se a solução não for ótima, a resolução continua. Se for ótima, a resolução atingiu seu final.</p>	<p>f) Determinar a variável não-básica que entrará na base: será aquela que tiver, na primeira linha do quadro, O MENOR COEFICIENTE. Esta situação corresponde, na solução algébrica, à escolha da variável com maior coeficiente na função objetivo.</p> <p>g) Determinar a variável básica que sairá da base: dividir os termos independentes pelos elementos existentes na coluna correspondente à variável não-básica que entrará na base. Resultados negativos ou indeterminados ($n / 0 = \infty$) serão desconsiderados. O MENOR RESULTADO indicará a variável básica que sairá da base.</p> <p>h) Utilizando combinações lineares entre as linhas, adequar o novo quadro de modo que exista UM TERMO UNITÁRIO EM CADA INTERSECÇÃO DE LINHA E COLUNA CORRESPONDENTES ÀS VARIÁVEIS BÁSICAS. OS DEMAIS TERMOS NAS CITADAS COLUNAS DEVERÃO SER NULOS.</p> <p>i) Obter a solução atual do PPL: os valores de Z e das variáveis básicas estarão na coluna mais à direita. Observe que o valor de Z deve aumentar de quadro para quadro (já que se trata de uma maximização). Voltar ao passo (e).</p>
www.mamn.com.br	1

Figura n.º 03 – Reprodução do primeiro “slide” da apresentação do método Simplex: resumo do algoritmo

Nesta primeira etapa da apresentação, não há ainda a intenção de que os conceitos sejam construídos pelos alunos (aliás, uma informação tão concentrada dificilmente o permitiria). Mas, finda a apresentação, os alunos podem voltar ao resumo e verificar que cada passo do algoritmo foi aplicado na resolução do exemplo. O resumo é também um apoio para a resolução dos exercícios propostos.

Durante toda a resolução do problema, antes de cada etapa de cada “slide”, o aluno é incentivado a imaginar o que ocorrerá a seguir. O professor direciona o diálogo no sentido de que os alunos descubram cada passo a ser dado. O tempo da aula presencial é suficiente para todas as pausas necessárias, de modo a oportunizar as discussões sobre todas as etapas da resolução do problema.

No segundo “slide” da apresentação, propõe-se o problema de programação linear a resolver, com três restrições constituídas por inequações:

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 04 – Segundo “slide” da apresentação: proposição do problema a resolver

Em seguida, no mesmo segundo “slide”, os alunos são incentivados a transformar o problema para a forma-padrão, pela introdução de variáveis artificiais (X_3 , X_4 e X_5). A apresentação do segundo “slide” prossegue paulatinamente, seguindo os movimentos dos alunos que vão transformando cada restrição do problema em uma equação:

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

Introduzindo as variáveis de folga X_3 , X_4 e X_5 , que permitem transformar as desigualdades em igualdades, obtém-se a forma padrão:

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

(com $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$)

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 05 – Segundo “slide” da apresentação: problema expresso na forma-padrão

Continuando a construção da resolução, os alunos adaptam a expressão da função-objetivo Z: o segundo “slide” acompanha este movimento e organiza o problema na forma de um sistema de equações, adequada para a obtenção do primeiro quadro.

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

Introduzindo as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 , que permitem transformar as desigualdades em igualdades, obtém-se a forma padrão:

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

(com $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$)

Adaptando a expressão da função objetivo Z:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

O PPL, pronto para ser organizado no primeiro quadro é:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 06 – Segundo “slide” : função-objetivo readequada, sistema formado

Os alunos identificam as variáveis envolvidas e propõem que variáveis estarão na base da solução inicial (X_3, X_4 e X_5) . O “slide” paulatinamente corrobora a proposta e realça as variáveis não-básicas X_1 e X_2 em azul-esverdeado:

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

Introduzindo as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 , que permitem transformar as desigualdades em igualdades, obtém-se a forma padrão:

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

(com $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$)

Adaptando a expressão da função objetivo Z:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

O PPL, pronto para ser organizado no primeiro quadro é:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

O PPL passa a ter o aspecto de um sistema de 4 equações, com 6 incógnitas, cujos coeficientes constituem uma matriz, organizada no quadro a seguir:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1						
X_3	0						
X_4	0						
X_5	0						

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 07 – Segundo “slide” : início da construção do primeiro quadro - variáveis

Em seguida, os alunos propõem a colocação dos coeficientes do sistema de equações no quadro, iniciando pela linha da função-objetivo. O segundo “slide” logo confirma a proposta, mostrando os elementos numéricos (-5, -2, 0, 0, 0 e 0) da primeira linha do quadro em movimento de queda, desde o sistema de equações até a posição definitiva na tabela:

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

Introduzindo as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 , que permitem transformar as desigualdades em igualdades, obtém-se a forma padrão:

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

(com $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$)

Adaptando a expressão da função objetivo Z:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

O PPL, pronto para ser organizado no primeiro quadro é:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

O PPL passa a ter o aspecto de um sistema de 4 equações, com 6 incógnitas, cujos coeficientes constituem uma matriz, organizada no quadro a seguir:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5	-2	0	0	0	0
X_3	0						
X_4	0						
X_5	0						

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 08 – Segundo “slide”: colocação dos elementos na primeira linha do quadro

Os alunos então propõem os demais coeficientes, em correspondência a cada equação. O segundo “slide” vai paulatinamente confirmando a distribuição proposta, mostrando os elementos numéricos de cada linha do quadro em movimento de queda, desde o sistema de equações até suas posições na tabela e chama a atenção para os elementos **unitários** e **nulos**:

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Por exemplo, seja o P.P.L. a seguir, com 3 restrições e 2 variáveis (X_1 e X_2):

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 9$$

(com $X_1, X_2 \geq 0$)

Introduzindo as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 , que permitem transformar as desigualdades em igualdades, obtém-se a forma padrão:

Max $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

(com $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$)

Adaptando a expressão da função objetivo Z:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

O PPL, pronto para ser organizado no primeiro quadro é:

$$Z - 5 X_1 - 2 X_2 = 0$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_5 = 9$$

O PPL passa a ter o aspecto de um sistema de 4 equações, com 6 incógnitas, cujos coeficientes constituem uma matriz, organizada no quadro a seguir:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5	-2	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

As variáveis X_3, X_4 e X_5 estão na base (são básicas). Observe os termos unitários (1) em cada interseção de linha e coluna correspondentes às variáveis básicas. Observe que, nestas colunas, os demais termos são nulos (0).

www.mamn.com.br 2

Figura n.º 09 – Término do segundo “slide”: todos os elementos estão no primeiro quadro

O quadro obtido ao final do segundo “slide” reaparece no início do terceiro “slide” para que os alunos o analisem e nele identifiquem a solução inicial do problema. O professor dirige o diálogo para que os alunos percebam em que posições do quadro estão os valores das variáveis básicas ($X_3=3$, $X_4=4$ e $X_5=9$) e da função-objetivo ($Z=0$), verifiquem a não-otimalidade da solução obtida e identifiquem a variável que entrará na base no próximo passo (X_1 , ressaltada pela seta verde). Enquanto os alunos vão atingindo estas etapas, a apresentação prossegue, confirmando os resultados por eles obtidos (vide figura n.º 10).

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari							
Repetindo o primeiro quadro, passemos à resolução completa.							
	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5 ↓	-2	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

SOLUÇÃO INICIAL (PRIMEIRO QUADRO):

- $Z = 0$, não é ótima: $-5 < 0$ e $-2 < 0$
 X_1 entrará na base porque $-5 < -2$
- $X_3 = 3$
- $X_4 = 4$
- $X_5 = 9$

www.mamn.com.br 3

Figura n.º 10 – Início do terceiro “slide”: obtenção da solução inicial do problema

Em seguida, os alunos são direcionados à identificação da variável que sairá da base (X_3 , ressaltada pela seta vermelha), logo confirmada no mesmo “slide” (vide figura n.º 11).

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari							
Repetindo o primeiro quadro, passemos à resolução completa.							
	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5 ↓	-2	0	0	0	0
← X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

SOLUÇÃO INICIAL (PRIMEIRO QUADRO):

- $Z = 0$, não é ótima: $-5 < 0$ e $-2 < 0$
 X_1 entrará na base porque $-5 < -2$
- $X_3 = 3 \rightarrow 3 / 1 = 3 \rightarrow 3 < 9 \rightarrow X_3$ sai da base
- $X_4 = 4 \rightarrow 4 / 0 = \bar{\infty} \rightarrow X_4$ não sairá da base
- $X_5 = 9 \rightarrow 9 / 1 = 9$

www.mamn.com.br 3

Figura n.º 11 – Continuação do terceiro “slide”: identificação da variável que sai da base

Identificada a nova base (constituída pelas variáveis X_1 , X_4 e X_5), os alunos iniciam a construção do segundo quadro, fixando os coeficientes **unitários** e **nulos**. A proposta é logo confirmada pela continuação da apresentação (vide figura n.º 12).

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Repetindo o primeiro quadro, passemos à resolução completa.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5	-2	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

SOLUÇÃO INICIAL (PRIMEIRO QUADRO):

- $Z = 0$, não é ótima: $-5 < 0$ e $-2 < 0$
 X_1 entrará na base porque $-5 < -2$
- $X_3 = 3 \rightarrow 3 / 1 = 3 \rightarrow 3 < 9 \rightarrow X_3$ sai da base
- $X_4 = 4 \rightarrow 4 / 0 = \infty \rightarrow X_4$ não sairá da base
- $X_5 = 9 \rightarrow 9 / 1 = 9$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	0			0	0	
X_1	0	1			0	0	
X_4	0	0			1	0	
X_5	0	0			0	1	

SEGUNDA SOLUÇÃO (SEGUNDO QUADRO):

www.mamn.com.br 3

Figura n.º 12 – Continuação do terceiro “slide”: início da construção do segundo quadro

Comparando os dois quadros, os alunos podem perceber que o coeficiente **-5** na coluna da variável X_1 e o coeficiente unitário na mesma coluna (última linha) deverão ser anulados. Orientados, os alunos descobrem quais serão as combinações lineares necessárias, entre linhas convenientes, de modo a transformar as primeira e quarta linhas do segundo quadro. As descobertas são logo confirmadas na continuação da apresentação (vide figura n.º 13).

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Repetindo o primeiro quadro, passemos à resolução completa.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5	-2	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

SOLUÇÃO INICIAL (PRIMEIRO QUADRO):

- $Z = 0$, não é ótima: $-5 < 0$ e $-2 < 0$
 X_1 entrará na base porque $-5 < -2$
- $X_3 = 3 \rightarrow 3 / 1 = 3 \rightarrow 3 < 9 \rightarrow X_3$ sai da base
- $X_4 = 4 \rightarrow 4 / 0 = \infty \rightarrow X_4$ não sairá da base
- $X_5 = 9 \rightarrow 9 / 1 = 9$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	0	-2	5	0	0	15
X_1	0	1			0	0	
X_4	0	0			1	0	
X_5	0	0	2	-1	0	1	6

SEGUNDA SOLUÇÃO (SEGUNDO QUADRO):

A primeira linha do segundo quadro [1]' é obtida pela soma da primeira linha do primeiro quadro [1] com a segunda linha [2] multiplicada por 5: [1]' = [1] + [2] . 5

A quarta linha do segundo quadro [4]' é obtida pela soma da quarta linha do primeiro quadro [4] com a segunda linha [2] multiplicada por (-1): [4]' = [4] + [2] . (-1)

www.mamn.com.br 3

Figura n.º 13 – Continuação do terceiro “slide”: combinações lineares entre linhas

Continuando a comparar os dois quadros do terceiro “slide”, os alunos podem perceber que as segunda e terceira linhas não precisam ser alteradas e são simplesmente repetidas.

Deste ponto em diante, os alunos geralmente percebem o mecanismo do algoritmo, já que as operações se repetem: identificam os novos valores das variáveis básicas ($X_1=3$, $X_4=4$ e $X_5=6$) e da função-objetivo ($Z=15$), verificam que a solução obtida ainda não é ótima, identificam a variável que entrará na base no próximo passo (X_2 , ressaltada pela seta verde) e identificam a variável que sairá da base (X_5 , ressaltada pela seta vermelha). Enquanto os alunos vão atingindo estas etapas, a apresentação prossegue paulatinamente, confirmando os resultados por eles obtidos (vide figura n.º 14).

PESQUISA OPERACIONAL 1 – prof. Moacyr Molinari

Repetindo o primeiro quadro, passemos à resolução completa.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	-5	-2	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	1	2	0	0	1	9

SOLUÇÃO INICIAL (PRIMEIRO QUADRO):

- $Z = 0$, não é ótima: $-5 < 0$ e $-2 < 0$
 X_1 entrará na base porque $-5 < -2$
- $X_3 = 3 \rightarrow 3 / 1 = 3 \rightarrow 3 < 9 \rightarrow X_3$ sai da base
- $X_4 = 4 \rightarrow 4 / 0 = \infty \rightarrow X_4$ não sairá da base
- $X_5 = 9 \rightarrow 9 / 1 = 9$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
base	1	0	-2	5	0	0	15
X_1	0	1	0	1	0	0	3
X_4	0	0	1	0	1	0	4
X_5	0	0	2	-1	0	1	6

SEGUNDA SOLUÇÃO (SEGUNDO QUADRO):

- $Z = 15$, não é ótima: $-2 < 0$
 X_2 entrará na base porque $-2 < 5$
- $X_1 = 3 \rightarrow 3 / 0 = \infty \rightarrow X_1$ não sairá da base
- $X_4 = 4 \rightarrow 4 / 1 = 4$
- $X_5 = 6 \rightarrow 6 / 2 = 3 \rightarrow 3 < 4 \rightarrow X_5$ sai da base

A primeira linha do segundo quadro [1]' é obtida pela soma da primeira linha do primeiro quadro [1] com a segunda linha [2] multiplicada por 5: [1]' = [1] + [2] · 5

A quarta linha do segundo quadro [4]' é obtida pela soma da quarta linha do primeiro quadro [4] com a segunda linha [2] multiplicada por (-1): [4]' = [4] + [2] · (-1)

www.mamn.com.br 3

Figura n.º 14 – Término do terceiro “slide”: obtenção da segunda solução

No quarto e último “slide”, o algoritmo continua sendo aplicado até a obtenção da solução ótima do problema de programação linear.

A formação do terceiro quadro é uma oportunidade de os alunos aplicarem novamente o algoritmo e sedimentarem os conceitos construídos durante a discussão da resolução do problema. Os alunos percebem as combinações lineares necessárias entre linhas para a obtenção do terceiro quadro, identificam os novos valores das variáveis básicas ($X_1=3$, $X_4=1$ e $X_2=3$) e da função-objetivo ($Z=21$) e verificam que a solução é ótima. Enquanto os alunos vão atingindo estas etapas, a apresentação prossegue, confirmando paulatinamente os resultados por eles obtidos (vide figura n.º 15).

Repetindo o segundo quadro para melhor visualização:

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	b
base	1	0	-2	5	0	0	15
X ₁	0	1	0	1	0	0	3
X ₄	0	0	1	0	1	0	4
X ₅	0	0	2	-1	0	1	6

Continuando a resolução, agora no terceiro quadro:

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	b
base	1	0	0	4	0	1	21
X ₁	0	1	0	1	0	0	3
X ₄	0	0	0	1/2	1	-1/2	1
X ₂	0	0	1	-1/2	0	1/2	3

TERCEIRA SOLUÇÃO (TERCEIRO QUADRO):

$Z^* = 21$ É ÓTIMA, pois não há coeficientes negativos na primeira linha.

$X_1^* = 3$

$X_4^* = 1$

$X_2^* = 3$

X_3 e X_5 são não-básicas, então:
 $X_3^* = 0$; $X_5^* = 0$

A primeira linha do terceiro quadro [1]'' é obtida pela soma da primeira linha do segundo quadro [1]' com a quarta linha [4]', isto é, [1]'' = [1]' + [4]'

A terceira linha do terceiro quadro [3]'' é obtida pela soma da terceira linha do segundo quadro [3]' com a quarta linha [4]' multiplicada por (-1/2), ou, [3]'' = [3]' + [4]' · (-1/2)

A quarta linha é multiplicada por 1/2.

www.mamn.com.br

4

Figura n.º 15 – Quarto e último “slide” da apresentação: obtenção da solução ótima

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se uma amostra de material didático e a estratégia presencial e não-presencial de ensino na disciplina Pesquisa Operacional 1 (Programação Linear) do curso de Engenharia de Produção Civil da UTFPR em que cada conteúdo é abordado com as seguintes etapas:

- leitura prévia do assunto no livro-texto;
- aulas presenciais;
- exercícios domiciliares no livro-texto;
- revisão ou sedimentação do conteúdo através de apresentações para PowerPoint disponibilizadas no sítio eletrônico da disciplina;
- exercícios e atividades complementares disponibilizadas no sítio eletrônico;
- comunicação entre docente e discentes através da Internet (MSN, Skype, “e-mail” e “newsletter”).

Desde o início da adoção dos procedimentos não-presenciais, observou-se uma melhora expressiva na utilização do tempo destinado à disciplina, de modo que os dois últimos assuntos do programa passaram a ser trabalhados de modo mais adequado. Além disso, os alunos passaram a ter acesso, em qualquer tempo, a uma quantidade de informações muito maior do que aquelas discutidas presencialmente.

Por estar disponibilizado em sítio eletrônico da Internet, o material didático da disciplina pode também ser utilizado pelos alunos nos semestres seguintes, como subsídio para revisar conceitos necessários às disciplinas mais avançadas da área de produção do curso. Além

disso, o material está disponível para estudantes de outros cursos e de outras universidades e para profissionais interessados na área.

A adoção da estratégia em que se complementa as aulas com atividades não-presenciais tem facilitado a construção dos conceitos e facilitado o estudo da disciplina, de acordo com os depoimentos espontâneos de vários alunos.

Os materiais didáticos empregados, por si sós, possuem aspecto instrucionista, já que os conteúdos aparentemente são apresentados prontos, mas observa-se que as estratégias adotadas nas aulas presenciais privilegiam uma abordagem construtivista, na qual se propicia a construção dos conceitos pelos próprios estudantes: o professor utiliza as apresentações computacionais como apoio para a condução dialogada da discussão dos conteúdos, incentivando os alunos a trilharem o caminho da descoberta individual.

Em futuro breve, o autor planeja implantar um ambiente de aprendizagem virtual construído coletivamente com os alunos, contendo fóruns virtuais e “chats” em um sítio eletrônico especial. Outro projeto é o de disponibilizar no sítio eletrônico atual, além do já existente material didático de cada assunto trabalhado nas aulas presenciais, também uma versão com abordagem construtivista que propicie a auto-aprendizagem.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOLINARI, M. **MÉTODO SIMPLEX** - solução por quadros . Disponível em <<http://www.mamn.com.br/pesquisaoperacional1.htm>> Acesso em 21 mai. 2007.

PUCCINI, A. L.; PIZZOLATTO, N. D. **PROGRAMAÇÃO LINEAR** . Série Aplicações de Computadores. Rio de Janeiro: Ed. Livros Técnicos e Científicos (LTC), 1990.

TEACHING LINEAR PROGRAMMING AT THE UTFPR'S CIVIL PRODUCTION ENGINEERING COURSE

Abstract: *This document presents a sample of didactic material and the teaching strategies used in the issue Operations Research 1 (Linear Programming) at the UTFPR's Civil Production Engineering course, which includes presence classes, two times a week, and virtual activities based in a web site. The same presentations used in the presence classes are available in the web site, beyond of other didactic materials and softwares. Those presentations are available in printable version and dynamic version, which students can review in their computers at any moment and how many times they need. The out-class communication between teacher and students occurs through e-mail, MSN, Skype and a newsletter.*

Key-words: *Linear programming, Operations research, Simplex method, Internet, Technological resources*