Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006.
ISBN 85-7515-371-4

MODELOS MATEMÁTICOS EXPRESSAM ASPECTOS DINÂMICOS DE MODELOS DE USO DO SOLO E DE TRANSPORTES

Dr. Dimas Felipe de Miranda – dimasfm48@yahoo.com.br
PUC-Minas e FEA-FUMEC
Departamento de Matemática e Estatística
Av. Dom José Gaspar, 500 – Prédio 34
30535-610 – Belo Horizonte - MG

Resumo: *Este trabalho explora, com intenções metodológicas na área de educação e ensino da matemática, um modelo quantitativo urbano que faz a integração das dimensões de espaço e tempo, e que pode ser usado como instrumento coadjuvante na análise do processo de organização e reorganização das atividades humanas no espaço territorial. As mudanças espaciais decorrentes da ação humana nas áreas de agricultura, indústria, comércio, transporte e serviços, entre outras, e as conseqüentes alterações nas formas e na distribuição do movimento de pessoas no espaço, em determinado tempo, são sintetizadas por diagramas, gráficos e equações para o modelo explorado.*

Palavras-chave: ensino de matemática, educação matemática, modelos matemáticos, matemática em modelos urbanos, convergência.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo específico que se coloca, neste trabalho, é o de explorar os fundamentos quantitativos presentes em um modelo urbano de uso do solo e de transporte, com a intenção de sistematizar e expressar através de modelos matemáticos a sua dinâmica. O que se pretende com este estudo é produzir um material que permita às pessoas que lidam com a educação, o ensino e a aprendizagem da disciplina matemática ter acesso a um texto em que experimentos do cotidiano urbano e teoria matemática se aproximam.

2. A METODOLOGIA DO MODELO URBANO

O Modelo urbano a ser explorado aqui vem sendo retomado por estudiosos do ambiente urbano, pois enquadra-se na categoria dos importantes modelos atuais de "Convergência", embora tenha sido proposto em 1966 por Donald George JANELLE, em sua tese de doutorado, na *Michigan State University*, EUA. Ele sustenta que o processo de ocupação e reorganização das áreas habitadas pelo homem é função do "tempo de viagem" entre os lugares, o que permite à pessoa demarcar áreas de acessibilidade a bens, serviços e a outros recursos. Deriva de tudo isso um elemento chave desenvolvido na tese do autor: a convergência do sistema espaço-tempo, que tem "função significativa: é a medida do impacto da inovação de transporte na conectividade do espaço-tempo dos lugares; e é uma expressão do incremento da acessibilidade...". Para ele, a convergência "é expressa como a taxa na qual o tempo de viagem entre os lugares declina, em resposta ao crescimento eficiente do transporte" .

Este fato foi registrado por JANELLE (1966), ao observar vários pares de cidades nos EUA. Por exemplo, entre Nova York e Boston, do ano de 1800 a 1950, a Tabela 1 registra:

Tabela 1 - Tempos de viagem entre Nova York e Boston

t (ano calendário)	**1800**	**1830**	**1860**	**1950**
T (minutos)	5.000	2.000	600	300

Fonte:Elaboração própria, a partir de JANELLE (1966).

Ele observou-se que a relação entre as variáveis envolvidas, ao se estudar um grande número de pares de cidades, apresentava um comportamento padrão; a saber: as variáveis "tempo calendário" (t_i) e "distância tempo de viagem" (T_i), se relacionavam, quantitativamente, de forma inversa, produzindo o que ele denominou de fenômeno da convergência espaço-tempo. Metodologicamente o autor se propõe a estudar, por essa via, as alterações espaciais urbanas.

3. O MODELO MATEMÁTICO DE CONVERGÊNCIA

As variáveis "tempo calendário" (t_i) e "distância tempo de viagem" (T_i) se apresentam, no presente modelo urbano, em formato de listas numéricas.

Tal fato permite que, de acordo com a proposta metodológica deste trabalho, se busque, na definição de uma seqüência, um modelo matemático teórico para a sustentação e interlocução com o conceito de convergência espaço-tempo proposto por JANELLE (1966).

STEWART (2001), informalmente, define uma seqüência infinita u_n como uma lista de objetos, de eventos ou de números reais, o que se escreve:

$$u_n = \{u_1, u_2, u_3 \ldots \mathrm{u_n} \ldots\} \tag{1}$$

Inicialmente, considera-se *n* como número inteiro e não negativo. Pode-se expressar uma seqüência como função, por exemplo:

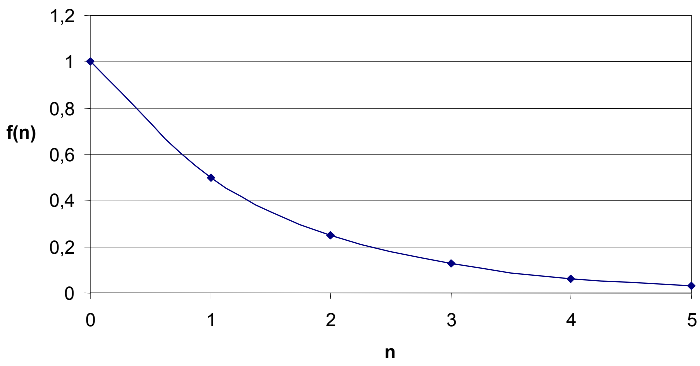
$$f(n) = \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

A Tabela 2 registra alguns elementos da seqüência da equação (2) e os pontos da Tabela 2 sugerem a Figura 1, considerando-se agora *n* real, não negativo.

Tabela 2 - Elementos da seqüência da equação (2).

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**...**
f (*n*)	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	**...**	**...**

Figura 1 - Representação da seqüência da equação (2)



Observando-se a Tabela 2 e a Figura 1, intuitivamente percebe-se que, quando *n* cresce além de qualquer número real, os valores de f(*n*) se aproximam de zero. Este fato é representado por:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \qquad (3)$$

Seqüências como estas, cujos termos se aproximam de um valor real fixo, na situação limite (isto é, quando n cresce infinitamente), são chamadas de convergentes.

Se $\lim_{n\to+\infty}(f(n))$ existir, isto é, for igual a um único número real L, a seqüência converge, ou é convergente, para L. Isto constitui um modelo matemático de convergência.

Observa-se que, se $u_n = f(n)$, em um intervalo real não negativo, então:

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L \qquad (4)$$

Significa dizer, pela equação (4), que o limite da seqüência é o limite da função real, associada a esta seqüência.

Uma seqüência (u_n) é dita estritamente crescente, se $u_n<u_{n+1}$; será chamada de não-decrescente*,* se $u_n \le u_{n+1}$. É estritamente decrescente, se $u_n>u_{n+1}$ e não-crescente se $u_n \ge u_{n+1}$, para todo n inteiro e não negativo. Uma seqüência que se enquadra em apenas um desses quatro tipos é classificada de monótona, conforme LIMA (1977).

Uma seqüência (u_n) é limitada superiormente, se existir um número real M, tal que:

$u_n \le M$ (para todo *n* inteiro não negativo)

É limitada inferiormente, se existir um número real m, tal que:

$u_n \ge m$ (para todo *n* inteiro não negativo)

A seqüência é simplesmente limitada, se for ambas ao mesmo tempo.

A partir dessas definições estabelece-se, conforme LIMA (1977), o teorema:

"Toda seqüência monótona limitada de números reais é convergente".

Esse teorema permite, de forma rápida, testar um modelo matemático de convergência.

4. MODELOS MATEMÁTICOS E MODELOS URBANOS

Retoma-se aqui, de forma genérica, a tabela da seqüência numérica de registros dos dados que expressam a aproximação entre dois lugares A e B no meio urbano (Tabela 3) .

Tabela 3 - Tempo de viagem como função do tempo calendário

ano calendário	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	...
T(minutos)	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	...

Com $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \ldots$ e $T_0 > T_1 > T_2 > T_3 > T_4 \ldots$

A função T=f(t), conforme teoria exposta, classifica-se como uma seqüência, teoricamente infinita, monótona e limitada, pois há valores limites previsíveis para a variável T. Logo f(t) é uma seqüência convergente, por satisfazer as exigências de um modelo matemático de convergência.

JANELLE (1966), em seu modelo urbano, define o importante índice de convergência **I**. Ele permitirá calcular a velocidade de aproximação entre dois lugares A e B. Consideradas, na Tabela 3, as coordenadas dos lugares como: $A(t_i,T_i)$ e $B(t_{i+1},T_{i+1})$, uma adequada formulação matemática do índice de convergência **I** seria:

$$I_{(A,B)} = -\frac{(T_{i+1} - T_i)}{(t_{i+1} - t_i)} \qquad (5)$$

O sinal negativo garante um valor positivo para esse índice de convergência espaço-tempo. Observa-se que esse índice de JANELLE (1966) coincide, geometricamente, com o Modelo do coeficiente angular da reta que une dois pontos, extremos de um segmento considerado, diferindo apenas quanto à convenção do sinal. Logo, também se define :

$$I_{(A,B)} = -tg(x) \qquad (6)$$

Onde *x* é o ângulo, no sentido anti-horário, entre a reta determinada pelos dois pontos e o eixo das abscissas.

Para exemplificar o cálculo do índice de convergência de JANELLE (1966), será tomada, neste trabalho, a Tabela 4, de dados reais de cidades no Brasil.

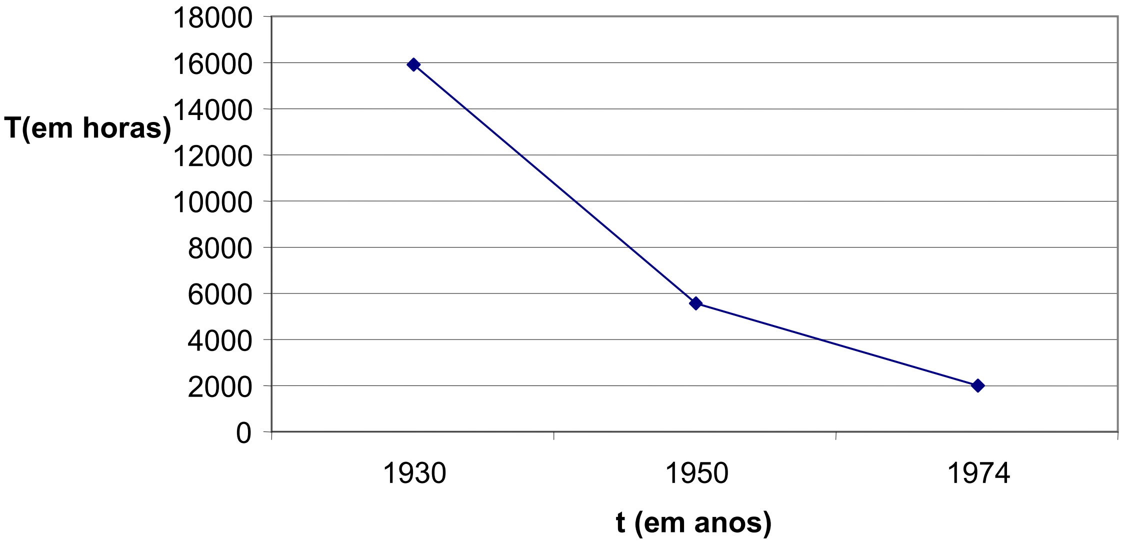
Tabela 4 – Tempo médio necessário para se ir de uma cidade do

Nordeste a todas as outras cidades da região constantes de um mapa do IBGE.

t (ano)	**1930**	**1950**	**1974**
T(horas)	15.954,39	5.545,70	2.009,49

Fonte: Elaboração própria a partir de MARCHAND (1976).

Figura 2 - Evolução espaço-tempo da Tabela 4



Assim, podem ser feitos cálculos dos índices de convergência espaço-tempo, em vários intervalos, para os dados da Tabela 4. Por exemplo, de 1930 a 1950 tem-se:

$$I_{(A,B)} = -\frac{(T_2 - T_1)}{(t_2 - t_1)} = -\frac{(5545{,}70 - 15954{,}39)}{(1950 - 1930)} = 520{,}43 h/ano \qquad (7)$$

Este resultado indica que a distância tempo de viagem no Nordeste reduziu-se, neste período de 20 anos, a uma taxa de 520,43 h/ano. Ou seja, existiu, conforme a teoria de JANELLE (1966), um processo de convergência (aproximação, compressão, encolhimento) do sistema espaço-tempo. Isto é, os lugares ficaram mais "próximos", ou as distâncias passaram a ser vencidas com mais facilidade na região do Nordeste, devido a vários fatores que geraram desenvolvimento e inovações tecnológicas. Mas, este único índice, expresso por um modelo matemático simples, sintetiza os efeitos dinâmicos de todas as variáveis responsáveis pelo fenômeno.

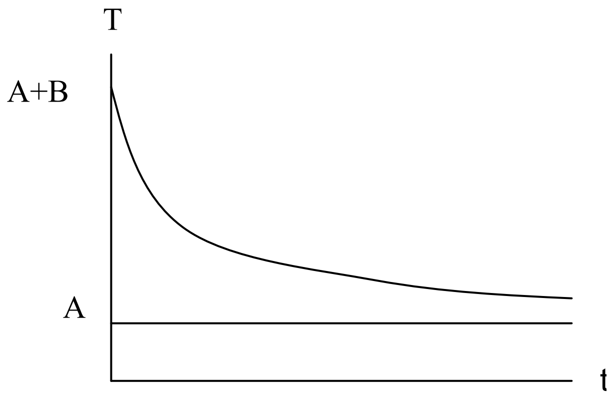
5. MODELAGEM MATEMÁTICA DA CURVA DE CONVERGÊNCIA

Na linha de apresentar produtos metodológicos, este trabalho se propôs a modelar, usando leis do Cálculo Diferencial e Integral, a seqüência convergente de JANELLE (1966), associando-a a uma função contínua, que, pelas suas propriedades de convergência, pode ser aproximada pelo modelo geral do decaimento exponencial, enunciado em autores como ZILL (2001). Assim, para o caso em questão, a lei desse modelo pode ser adaptada e assumir a seguinte redação:

O tempo de viagem T, gasto em uma trajetória, decresce, ao longo do tempo calendário t, a uma taxa proporcional à diferença entre um tempo fixo (mínimo estimado) de viagem T=A (que existe, devido aos resíduos) e o tempo de viagem T, considerado em cada instante t. Figura 3 e equação (8).

Obs: É impossível eliminar, na prática, os resíduos (tempo ou distância) de viagem entre dois lugares. Há resíduos de tempo de viagem até no meio virtual.

Figura 3 - Lei do decaimento exponencial (modelagem)



Essa lei do decaimento exponencial se escreve, então, como uma equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T) \tag{8}$$

Onde k= coeficiente de proporcionalidade, positivo.

Resolvendo a equação (8):

$$\int \frac{dT}{A - T} = \int kdt \tag{9}$$

$$-Ln\left|A - T\right| = kt + c \quad \textbf{(c=constante)} \tag{10}$$

$$\left|A - T\right| = e^{-kt}e^{-c} \tag{11}$$

Fazendo $e^{-c} = B$ **(B = parâmetro positivo):**

$$\left|A - T\right| = Be^{-kt} \tag{12}$$

Interessa, neste trabalho, a situação da Figura 3, caso da convergência (compressão) espaço-tempo, e, neste caso, assume-se que T>A. Então, da equação (12) retira-se o módulo e tem-se:

$$-A + T = Be^{-kt} \tag{13}$$

A função de ajustamento para a Figura 3 é:

$$T = A + Be^{-kt} \tag{14}$$

Na equação (14):

a) se t= 0 , tem-se T=A+B (Figura 3, tempo gasto, inicial, de viagem)

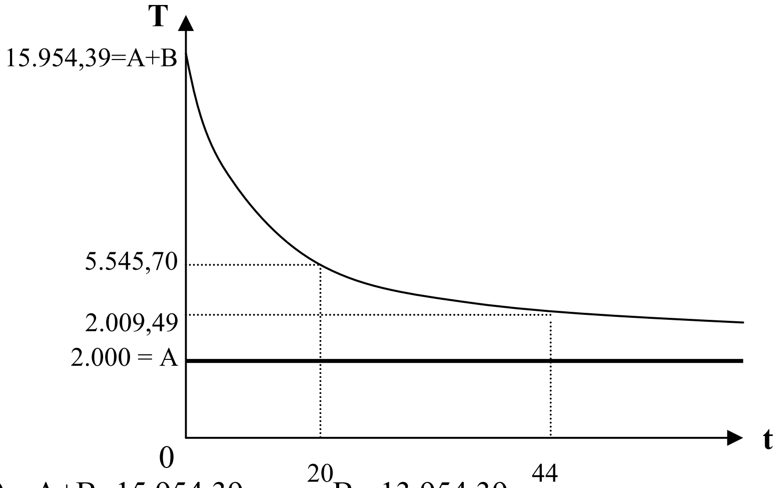
b) se t tende a infinito, tem-se T=A (Figura 3, tempo residual, mínimo, de viagem.)

A equação (14) é apresentada neste trabalho como uma contribuição de um modelo matemático para o ajuste gráfico do modelo experimental de JANELLE (1966). Ela preserva as condições iniciais do problema em estudo, como se verificou.

O modelo matemático da equação (14) será usado, agora, para ajustar os dados reais de tempo médio de viagem para as cidades do Nordeste (Tabela 4), arbitrando-se um recorde de tempo de viagem (assíntota) T=A=2.000 horas.

Alguns preparos operacionais são necessários. O primeiro valor do tempo calendário t deve ser tomado na origem (fazer $t_0 = 0$), por coerência com a formulação do modelo matemático de ajuste (equação (14)). Os demais valores de t devem ser calculados, proporcionalmente, conforme se lê na modelagem da Figura 4: 1930=0; 1950=20; 1974=44.

Figura 4 - Modelagem exponencial para dados Tabela 4



Se A= 2000 e A+B=15.954,39; vem: B= 13.954,39.

Então, da equação (14):

$$T = A + Be^{-kt} \qquad \textbf{(15)}$$

$$T = 2000 + 13954{,}39e^{-kt} \qquad \textbf{(16)}$$

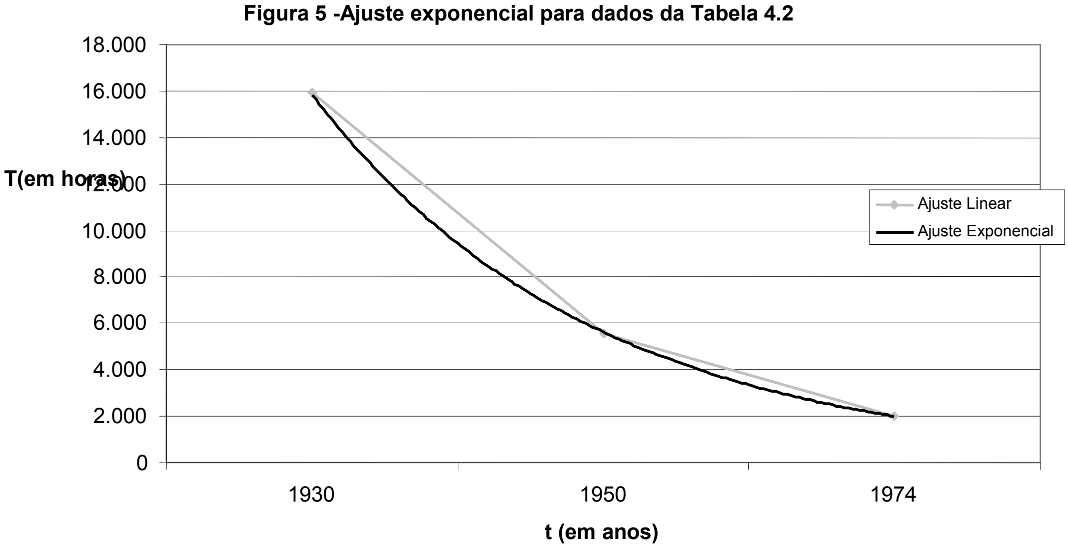
O parâmetro *k* será calculado e deve garantir o melhor ajuste possível, chamado de ajuste otimizado do modelo. A otimização é feita usando-se os dados da Tabela 4.

Devido ao volume de cálculos necessários, a otimização do modelo foi implementada computacionalmente, tomando-se como referência o diagrama de dispersão dos dados da Tabela 4, e utilizando-se o método dos mínimos quadrados, e o método de busca da secção áurea pra problemas não lineares (BAJPAI, 1980). Com este arcabouço teórico, uma rotina para o cálculo do parâmetro k foi desenvolvida, especialmente para este trabalho, no software MATLAB. O valor desse parâmetro para os dados da Tabela 4, em estudo, foi *k*=0,0718, após a execução do programa computacional. O algoritmo para essa rotina computacional gera uma interessante pesquisa de modelos matemáticos, que pode ser abordada em atividades do ensino de matemática e informática.

Finalmente, de posse do valor de *k,* a função modelada e ajustada para a Tabela 4 adquire a expressão que se segue:

$$T = 2000 + 13954{,}39e^{-(0{,}0718)t} \qquad \text{(F5.10)}$$

Na Figura 5 está o esboço da curva de ajuste exponencial e dos dados da Tabela 4 para as devidas comparações.



6. INFORMATIZAÇÃO DAS CONVERGÊNCIAS URBANA E MATEMÁTICA

Um pacote computacional foi desenvolvido em Delphi para ter o cálculo do índice $I_{(A,B)}$ de JANELLE (1966) de forma automatizada. O aplicativo computacional armazena, em um cadastro, o nome de uma localidade "Pólo" (uma capital, por exemplo) e os nomes de "localidades" periféricas, e todos os dados necessários informados pelo usuário, com o objetivo de se estudar a variação do tempo de viagem de cada localidade periférica em relação ao Pólo.

Os dados fictícios da Tabela 5 foram usados para testar o programa.

TABELA 5 – Tempos de viagem (em horas) para o modelo de JANELLE

Pólo: Belo Horizonte				
Localidades	Épocas			Distância ao Polo (km)
	1930	1950	1990	
Cidade 1	**3,8 h**	**2,6 h**	**0,52 h**	**40**
Cidade 2	**2,1 h**	**1,2 h**	**0,48 h**	**70**
Cidade 3	**5,2 h**	**3,0 h**	**1,30 h**	**110**

O programa processa os dados recebidos, e, como se vê nas telas que se seguem, os devolve através de **relatórios**. Os diagramas objetivam simular o efeito da convergência ou aproximação entre 2 lugares. Na Figura 7 isto é feito através de vetores, cujos módulos representam os índices de convergência**.**

Figura 6 – Cadastro de dados da Tabela 5

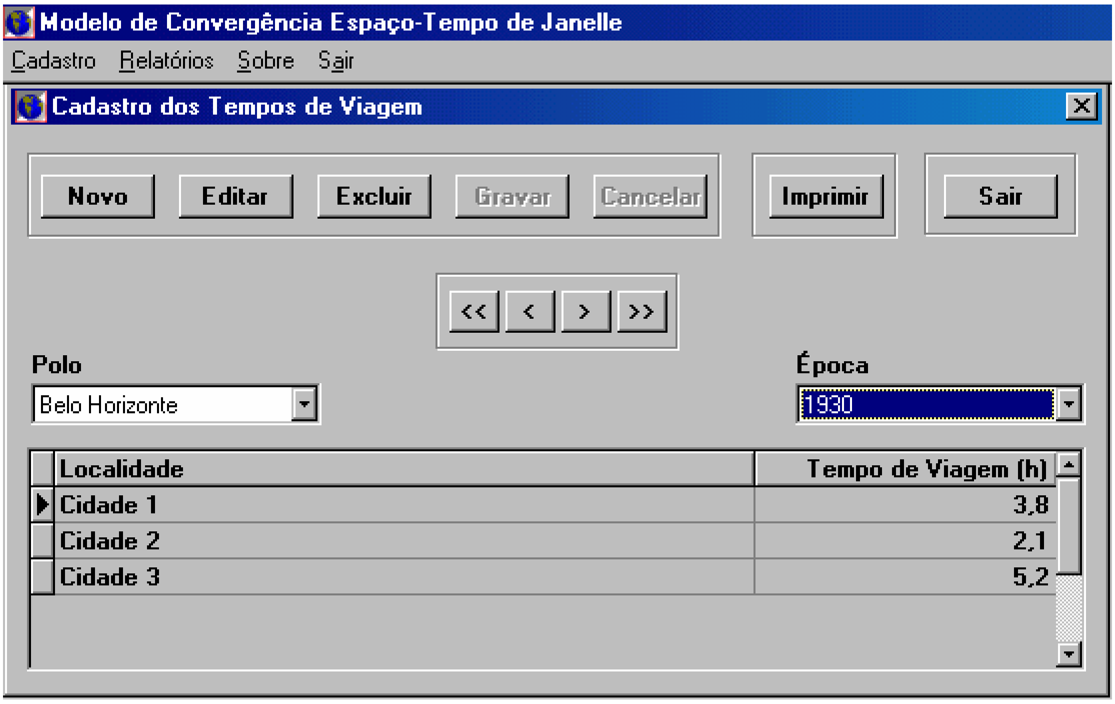
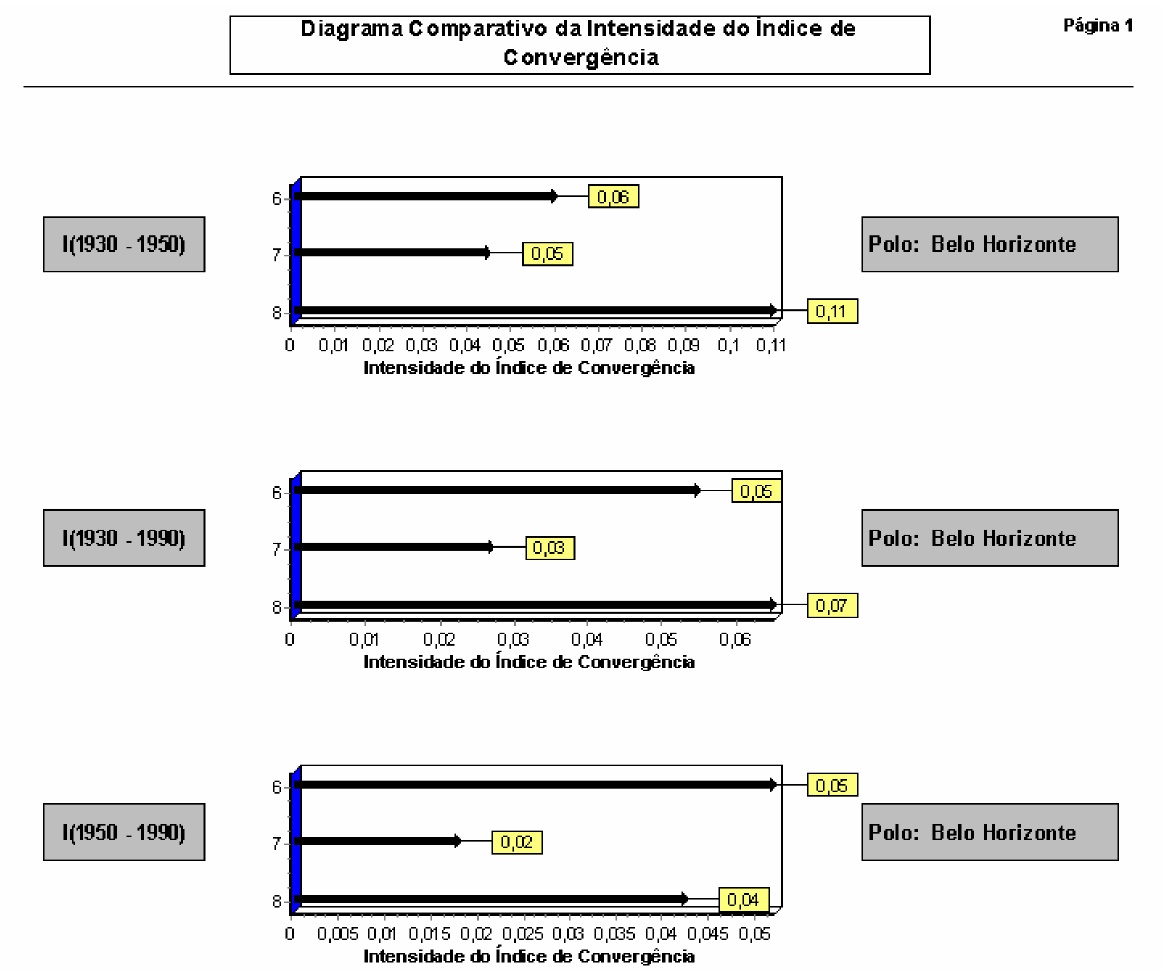
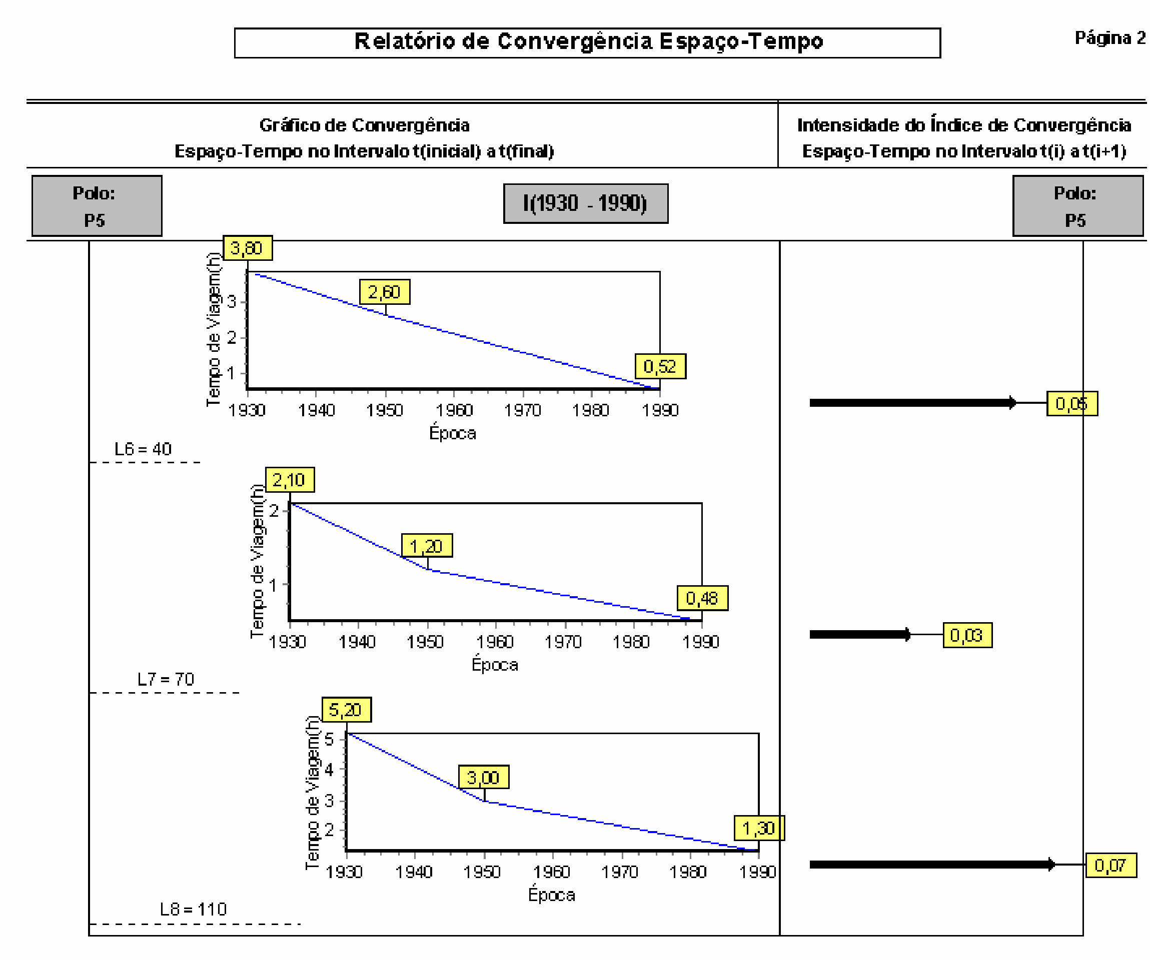


Figura 7 – Diagrama dos índices de convergência da Tabela 5



Nota: No eixo das ordenadas, 6=cidade 1; 7=cidade 2 e 8=cidade 3.

Figura 8 – Gráfico de convergência da Tabela 5



Notas: Pólo 5 = Belo Horizonte; L6 = cidade 01; L7= cidade 02; L8= cidade 03.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que se pretendia com este estudo era produzir um material que permitisse às pessoas que lidam com a educação, o ensino e a aprendizagem em matemática ter acesso a um texto em que experimentos do cotidiano urbano e teoria matemática se aproximassem. É apenas um texto produzido como uma experiência metodológica, e, antes de tudo, deve ser visto como uma tentativa de contribuição para que o ensino de matemática crie canais de diálogo mais fáceis e agradáveis com os estudantes.

O autor desse trabalho tem experimentado indicar leituras (prévias ou posteriores), não necessariamente de textos matemáticos, mas que tenham apelo motivador e que façam conexão com conteúdos matemáticos ministrados em sala. Percebe-se que esse tipo de leitura provoca a fala e a participação do aluno, que, quase sempre, se manifesta: comentando, concordando, discordando, descobrindo relações; em suma, assumindo um papel ativo no processo de aprendizagem.

Ao se disponibilizar esse texto, espera-se que ele sirva a este propósito, e que seja mais uma opção na lista de textos motivadores. Discordâncias, comentários, observações provocados por trabalhos nessa linha devem servir de ponto de partida para que se produzam outros textos, pesquisas, ou investigações futuras. Investigar, segundo PONTE (2003), no setor de ensino-aprendizagem, não significa, necessariamente, abordar problemas de conteúdo matemático sofisticado. Investiga-se, neste setor, ao se buscar responder, de forma fundamentada, questões de interesse da área e que com freqüência interpelam os indivíduos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.BAJPAI, A. C. *Matemática avançada para engenharia*. São Paulo, Hemus, 1980.
2. BARROSO, L. C. *Cálculo Numérico*. São Paulo, Harbra, 1987.
3. BURDEN, R. L. *Análise numérica*. São Paulo, Thomsom, 2003.
4. JANELLE, D. *Spatial reorganization and time-space convergence.* Ann Arbor, Michigan State University, 1966.
5. LIMA, Elon Lages. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 1977.
6. LIPSCHUTZ, Seymour. *Topologia geral*. Rio de Janeiro, Mcgraw-Hill, 1971.
7. MARCHAND & OUTROS. *Subsídios para o estudo dos sistemas urbanos do Nordeste: evolução da acessibilidade dos centros urbanos entre 1930 e 1974.* in: Revista Brasileira de Geografia, dezembro, 1976.
8. MIRANDA, Dimas F. *Modelos de análise têmporo-espacial: explorações metodológicas em Janelle, Hagerstrand e Wilson*. Belo Horizonte, PUC-Minas, 2004..
9. PONTE, J. P. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, Autêntica, 2003.
10. STEWART, James. *Cálculo***.** São Paulo, Pioneira, 2001.
11. ZILL, D. G. *Equações diferenciais*. São Paulo, Makron Books, 2001.

MATHEMATICAL MODELS EXPRESSING DYNAMIC ASPECTS OF SOIL USE MODELS AND TRANSPORT MODELS

ABSTRACT

This paper focuses on a mathematical model that provides the interplay between space and time and that may be used as complementary tool in the analysis of how human activities are spatially arranged.

Spatial changes derived from the effects of human actions in several areas such as agriculture, industry, trade, transportation and services as well as the consequential changes in the spatial movements of people within a certain period of time, are depicted in charts, diagrams and equations for the model explored.

Key-words: mathematics teaching, mathematics education, mathematical models, mathematics in urban models, convergence.