COBENGE 2003

DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARES* EM AULAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Viviana Cocco Mariani - mariani@rla01.pucpr.br
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Tuiuti do Paraná
Av. Comendador Franco, 1860, Guabirotuba
80215-909, Curitiba, PR

Emílio Eiji Kavamura – eek@brturbo.com
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Tuiuti do Paraná
Av. Comendador Franco, 1860, Guabirotuba
80215-909, Curitiba, PR

Resumo: *O curso de Métodos Numéricos, ministrado na Universidade Tuiuti do Paraná, aborda o conteúdo zeros de funções algébricas e transcendentes e faz parte do núcleo de disciplinas fundamentais do curso de Ciência da Computação. A busca de motivação para o processo de ensino-aprendizagem, nos faz refletir e questionar sobre as ferramentas didáticas que temos utilizado nos últimos anos. Neste contexto, com o objetivo de dinamizar as aulas e motivar foram desenvolvidos softwares por grupos de alunos para obter zeros de funções algébricas e transcendentes, com interface visual limpa e amigável. Os softwares foram utilizados para a solução dos exercícios relacionados à disciplina, principalmente problemas aplicados para serem resolvidos.*

Palavras-chave: *Solução de equações, Matlab, Softwares, Educação Matemática*

1. INTRODUÇÃO

Algumas propostas têm sido apresentadas na área de educação: escolha de novos livros textos, elaboração de roteiros e listas de exercícios, monitoria, estudo dirigido, acesso à Internet, etc., mas ainda predominam, em muitos casos, as tradicionais aulas expositivas, centradas no professor, em que se usa praticamente o quadro-negro, giz e apagador.

Atualmente a participação efetiva dos alunos nas aulas tem sido cobrada pelos professores como um método eficaz de aprendizagem. Surge a questão: O que fazer para que o aluno participe intensamente dos cursos tornando-se um crítico consciente, criador e não um mero repetidor de definições, teoremas, demonstrações e técnicas de resolução de problemas previamente decorados e aceitos sem questionamentos?

Com o aumento das facilidades computacionais, não podemos ignorar as transformações que estão ocorrendo na sociedade como um todo e principalmente a influência e o impacto das ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem. As aulas de laboratório computacional já têm como característica principal esse aspecto de atuação efetiva do aluno na parte prática. Entretanto, deve-se ter cuidado para que nas aulas de laboratório computacional o aluno não tenha a simples incumbência de averiguar a parte teórica apresentada em sala de aula, mas sim que participe ativamente construindo novas conjecturas, e explorando sua criatividade (SALVADOR *et al*., 1996; MARIANI e PETERS, 1999).

O educador pode fazer uso dos recursos das novas tecnologias como ferramentas educacionais. Uma destas ferramentas é o *software,* tanto aqueles que estão no mercado como ferramentas para otimização do trabalho em empresas, como os denominados educacionais, dos quais a proposta é dar suporte ao processo de aprendizagem. Assim, como todo recurso utilizado em sala de aula, o *software* também deve passar por análise prévia do professor. Há que se avaliar as características visuais e também sua aplicabilidade dentro do projeto político-pedagógico da escola e do planejamento do professor.

Os *softwares* computacionais são ferramentas importantes de apoio à pesquisa, ao ensino e a atividades de profissionais das áreas de Ciências Exatas e Engenharias. As experiências de sua utilização em sala de aula já são desenvolvidas há alguns anos em várias instituições de ensino superior em diversos países. A utilização de *softwares* educacionais adequados como uma ferramenta de auxílio nos cursos de graduação pode trazer diversos benefícios. Em particular os *softwares* devem:

(i) Permitir que o usuário complemente e interfira nas respostas, permitindo múltiplos caminhos de pesquisa e de soluções dos problemas. Assim poderá despertar o aluno à: criatividade, facilidade de uso, interação, autoria, prazer e atualização de dados.

(ii) Possibilitar o raciocínio e a reflexão sobre a ação, para a produção de novas e melhores ações. Deste modo ele poderá ser: inovador, desafiador, crítico e provocativo.

(iii) Permitir que o professor e aluno possam registrar e refletir sobre o processo pelo qual construíram o seu conhecimento.

(iv) Ser instigantes, provocando no aluno a busca de novas informações, que lhe permitam levantar novas hipóteses.

(v) Permitir o desafio e a reflexão possibilitando ao educando buscar, construir e valorizar sua produção.

(vi) Possibilitar a descrição dos procedimentos, de forma clara e objetiva para que o usuário possa construir seu conhecimento revendo sua ação.

(vii) Ter o erro trabalhado e que a partir de uma realimentação o aluno possa aprender por meio dele, trabalhando-o na direção da construção do conhecimento.

(viii) Desafiar o aprendiz na busca da exploração do conhecimento de forma prazerosa.

(ix) Dar condições para que o estudante prossiga, na construção do seu conhecimento de forma cooperativa.

(x) Dar mais flexibilidade tanto para o professor como para o aluno de acessar o *software* não os vinculando a uma atividade presencial e simultânea no desenvolvimento de pequenas atividades, como no caso de CBT (*Computer Based Trainning*).

Deste modo, nas aulas de Cálculo Numérico, os alunos dos cursos de Ciência da Computação e Engenharia da Computação foram instigados a elaborarem seus próprios *softwares*, envolvendo todos os métodos numéricos para obter zeros de funções, aprendidos em sala de aula. O objetivo geral deste trabalho foi buscar uma maior motivação por parte dos alunos para com a disciplina de Cálculo Numérico, bem como elevar o grau de riqueza dos problemas abordados, através da escolha de problemas mais aplicados.

O restante do presente artigo é organizado da seguinte forma. Na próxima seção caracteriza-se matematicamente o problema, e em seguida descreve-se os principais métodos numéricos para obtenção dos zeros de funções. Na terceira seção são apresentadas algumas janelas gráficas de um dos *softwares* desenvolvido por um grupo de alunos, utilizando a linguagem de programação do Matlab. A validação do código computacional foi realizada, em sala de aula, através da solução dos problemas reais nas aulas de Cálculo Numérico, os quais não serão descritos neste trabalho.

2. CARACTERIZAÇÃO MATEMÁTICA

Conhecida uma função f(x) pretende-se determinar o valor $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, onde $\bar{x}$ denomina-se de zero da função f(x) ou raiz da equação f(x) = 0. A solução analítica das equações é possível para equações algébricas (polinomiais) de 1° e 2° graus, determinadas equações algébricas de 3° e 4° graus, e algumas equações transcendentais (não polinomiais). Para as equações que não podem ser resolvidas analiticamente existem os métodos numéricos.

2.1 Métodos Numéricos

Os métodos para resolução de equações algébricas e transcendentes são descritos brevemente a seguir (ROQUE, 2000; RUGGIERO e LOPES, 1996; BARROSO *et al.*, 1987).

a) Método da bisseção: Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a,b], com a < b, e tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Supõe-se que no intervalo [a,b] existe uma única raiz da equação f(x) = 0. O método da bisseção consiste em reduzir a amplitude do intervalo [a,b] que contém a raiz λ usando sucessivas divisões de [a,b] ao meio, isto é,

$$x_n = \frac{a+b}{2}, \quad n = 1,2,3\ldots \tag{1}$$

Em seguida verifica-se onde a raiz se encontra, ou seja, faz-se o teste $f(a).f(x_n) < 0$? Se o critério é satisfeito então o novo intervalo é $[a, x_n]$ ou $b = x_n$, caso contrário o novo intervalo é $[x_n, b]$ ou $a = x_n$ e aplica-se novamente a "equação (1)". O processo é repetido até que seja obtida uma aproximação para a raiz exata, λ, que é medida através de uma tolerância, ε_1 verificada no tamanho do intervalo de pesquisa $|b - a| < \varepsilon_1$, ou através de uma tolerância ε_2 que avalia a proximidade da função f(x) do zero, isto é, $|f(x_o)| < \varepsilon_2$. Nos casos em que estas tolerâncias não são atingidas o processo se repete até que um número máximo de iterações seja cumprido.

b) Método da iteração linear (ou método do ponto fixo): O método da iteração linear obtém a solução aproximada de uma equação f(x) = 0, onde f(x) é uma função contínua num intervalo [a,b]. Utilizando o artifício algébrico de expressar a função f(x) na forma: x = F(x), onde a função F(x) é denominada função de iteração. Escolhe-se o valor de x_0 como uma primeira aproximação da raiz de f(x) = 0, calcula-se $F(x_0)$ e atribui-se este valor à nova raiz x_1. Em seguida considera-se o valor da raiz x_1 para gerar a nova aproximação da raiz $x_2 = F(x_1)$, e assim sucessivamente, ou seja,

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 1,2,3... \tag{2}$$

até alcançar uma tolerância, ε, desejada.

c) Método das cordas (ou método régula-falsi): O método das cordas consiste em dada uma função f(x) definida e contínua num intervalo [a,b], considera-se a corda que passa pelos pontos [a,f(a)] e [b,f(b)]. Onde a corda intercepta o eixo x tem-se uma raiz aproximada da equação. A regra geral de iteração para este método é dada pela expressão:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}, \quad n = 0,1,2,3... \tag{3}$$

onde o ponto c é um dos extremos do intervalo [a,b] escolhido de tal forma que a condição f(c).f''(c) > 0 seja satisfeita.

d) Método de Newton-Raphson: No método de Newton-Raphson dada uma função f(x) contínua num intervalo [a,b], com derivadas f'(x) e f''(x) contínuas, a fórmula de iteração das raízes será dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)}, \quad n = 0,1,2,3... \tag{4}$$

onde x_{n+1} é uma aproximação da raiz exata. A escolha do valor inicial x_0 da raiz deve ser tal que a função f(x) obedeça ao critério de convergência do método, isto é, no intervalo [a,b] as derivadas da função devem ser não nulas e preservarem o sinal em (a,b) e o valor de x_0 deve ser tal que $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

e) *Método da secante*: Geralmente o método da secante é empregado quando é complicado ou inviável obter a derivada da função, então opta-se por um modelo linear baseado nos dois valores mais recentes da função. Este método parte de dois valores iniciais x_0 e x_1 e determina-se a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. A intersecção da reta com o eixo x, determina o valor da próxima iteração, isto é, x_2. O próximo passo é utilizar x_1 e x_2 para obter o valor x_3 e assim sucessivamente, caracterizando o processo iterativo. A equação utilizada pelo método da secante é,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1,2,3... \tag{5}$$

Nesta etapa do trabalho os alunos exploraram apenas os métodos numéricos tradicionais vistos em qualquer curso de Cálculo Numérico. Alguns alunos foram instigados a *posteriori* a investigarem outros métodos da família de Newton, os quais foram incorporados ao *software* elaborado pelos mesmos, contudo não estão apresentados aqui.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os *softwares* serviram como apoio pedagógico e contribuindo para o reforço dos conteúdos apresentados. O *software* deve ser visto como um instrumento que facilite o fazer no ambiente escolar. Assim, o *software* deve apresentar algumas características fundamentais para sua aplicabilidade e usabilidade, que redundem em melhor desempenho no processo de aprendizagem. O conteúdo deve ser apresentado de forma objetiva, priorizando a interatividade e criatividade. Por outro lado o *software* deve ser estimulante, provocativo e desafiador para prender a atenção dos alunos. O *software* deve ter uma interface cujas telas tenham um visual limpo, poucos botões e fácil impressão tela a tela dos resultados.

Foram vários os *softwares* desenvolvidos em sala de aula com o mesmo propósito, isto é, obtenção de zeros de funções. Contudo, neste trabalho apresenta-se apenas as janelas gráficas de um deles, o que foi escolhido pelos alunos da classe como o *software* com visual mais adequado. Após a confecção dos *softwares* abordou-se em sala de aula problemas de Física, Mecânica, Termodinâmica e Otimização de Processos. onde as raízes de equações ou zeros de funções estão presentes. Utilizando o *software* o aluno tem a oportunidade de averiguar a solução matemática obtida previamente, ou até mesmo usá-lo para obter a solução imediata disponibilizando um tempo maior na modelagem dos problemas, além do que na confecção dos *softwares* ele familiarizou-se com os métodos numéricos citados na seção anterior. O conteúdo abordado pelo *software* pode ser enriquecido com leituras e pesquisas (MARIANI e PETERS, 1998). Uma reflexão sobre os métodos poderá ser realizada após estas atividades.

O processo iterativo dos métodos numéricos é apresentado aos alunos através de gráficos, executados em aula de laboratório com o *software* Matlab, conforme apresentado nas “Figuras 1 e 2” para os métodos da bisseção, método da falsa posição e método do ponto fixo para a função $f(x) = x^2 – x\cos(x) – 10$; para $[a, b] = [-3, 4]$ e método de Newton para $f(x) = x\ e^{(x^2/5)} + 2$ com $x_0 = 0,5$.

Figura 1 - Ilustração gráfica do método da bisseção e método da falsa posição.

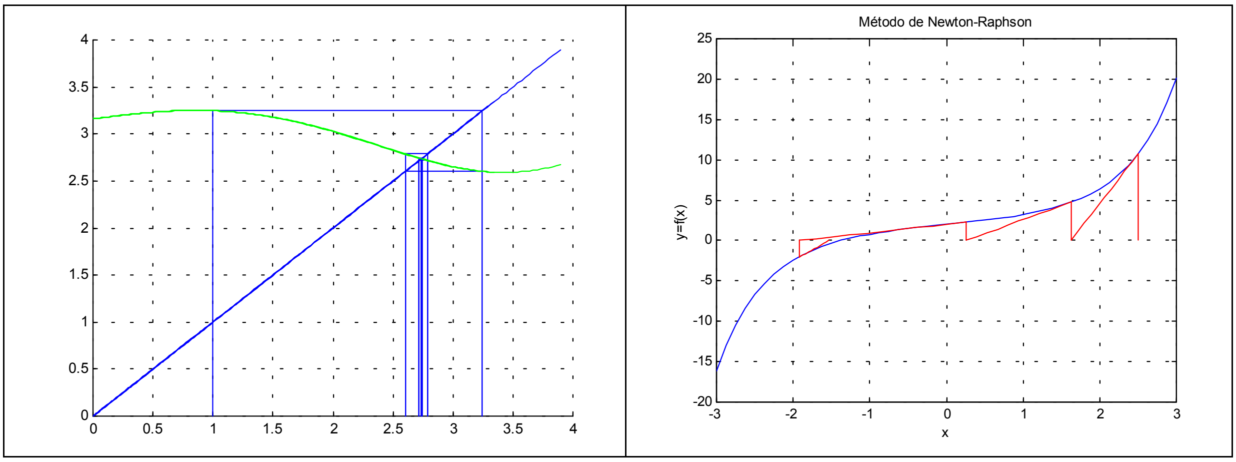

Figura 2 - Ilustração do método do ponto fixo e método de Newton-Raphson.

Na próxima etapa os alunos familiarizados com a linguagem de programação do Matlab são instigados a desenvolverem um *software* envolvendo os métodos numéricos abordados em sala de aula. A seguir algumas das telas de um *software* desenvolvido por um grupo de alunos, são apresentadas. A “Figura 3” refere-se à janela principal do *software*, onde todos os métodos estão disponíveis e podem ser escolhidos pelo aluno. Nas “Figuras 4 e 5” apresentam-se os resultados obtidos. Nestes quadros são ilustrados os resultados obtidos utilizando funções diferentes e métodos numéricos distintos.

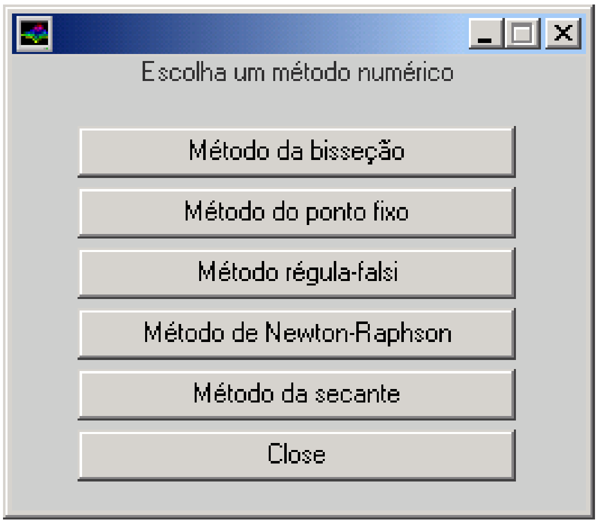

Figura 3 – Janela principal do *software*.

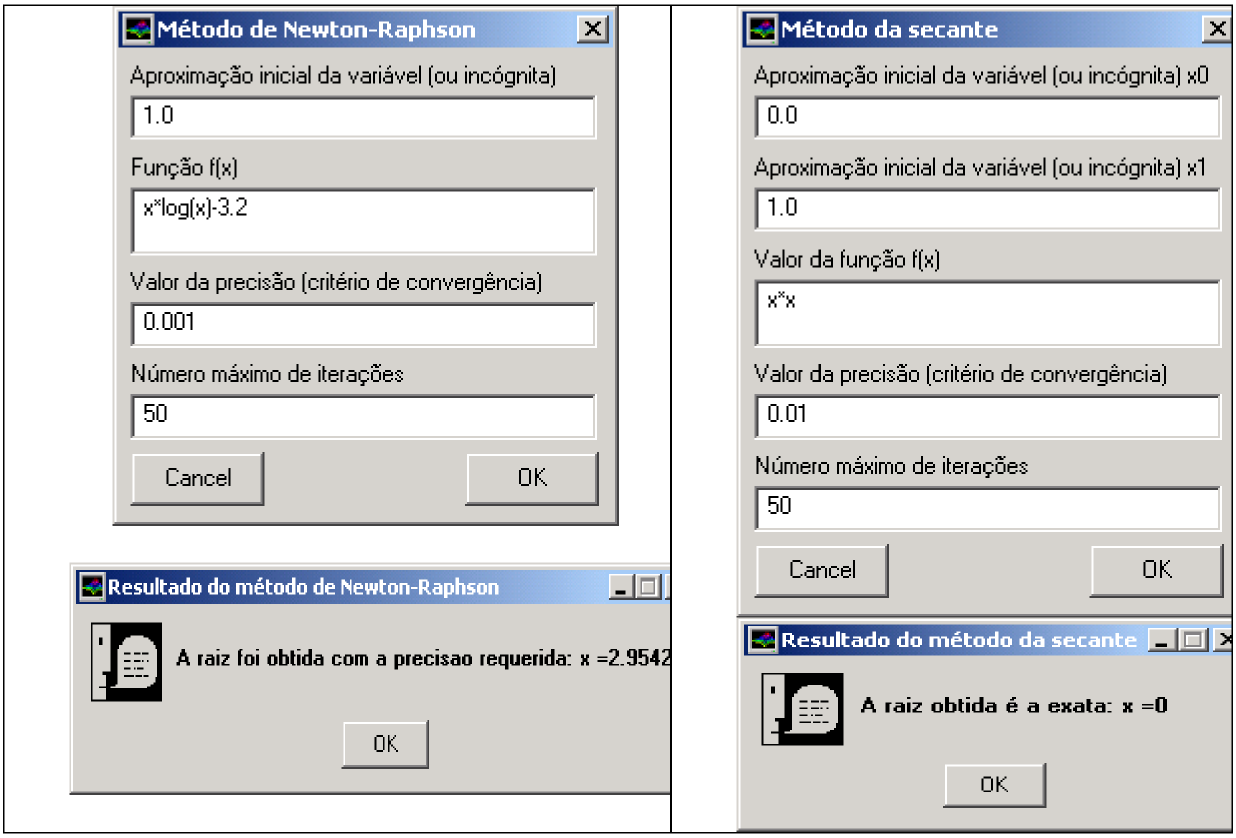

Figura 4 – Resultados obtidos com o método de Newton-Raphson e o método da secante.

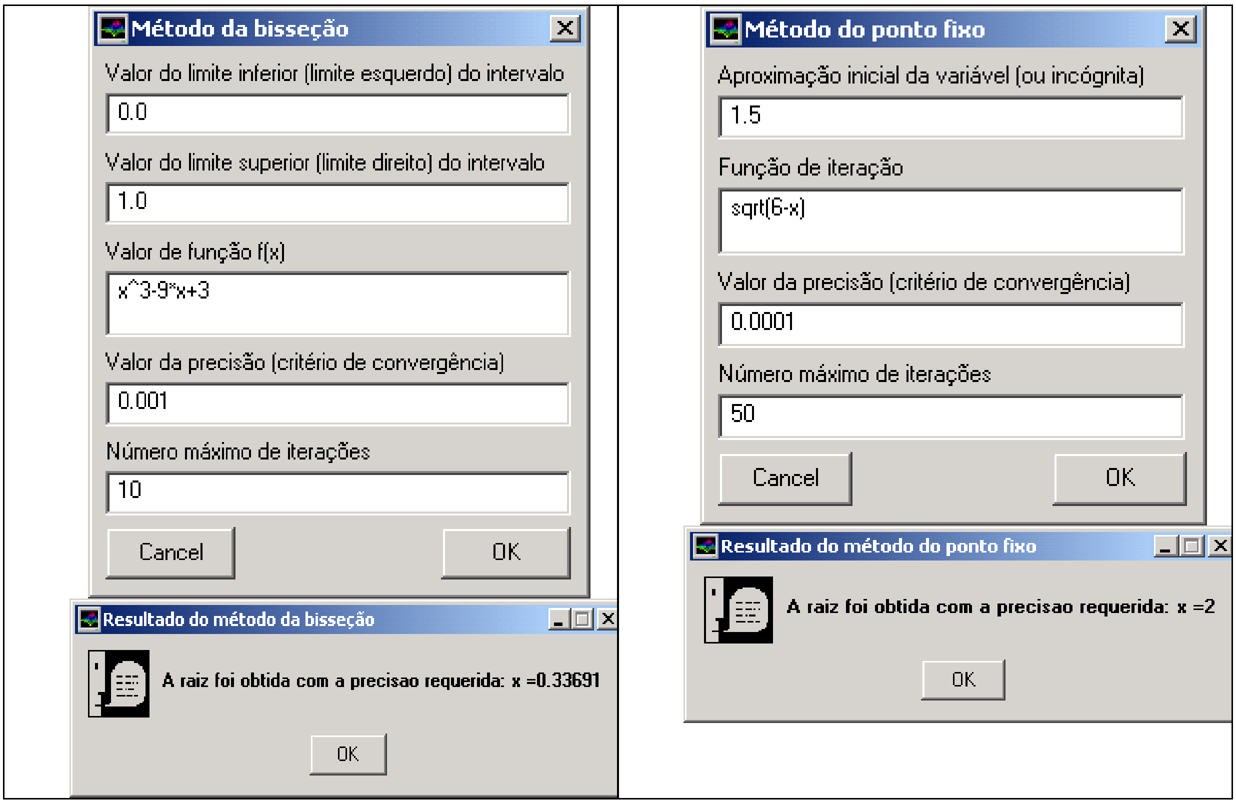

Figura 5 – Resultados obtidos com o método da bisseção e o método do ponto fixo.

4. CONCLUSÕES

As experiências vivenciadas pelos autores deste artigo mostram que os *softwares* desenvolvidos pelos alunos podem ser ambientes extremamente ricos e poderosos onde os professores e alunos possam desenvolver assuntos e temas relacionados às diferentes áreas do conhecimento. Assim sendo, como já mencionado anteriormente, a escolha e o desenvolvimento de um ambiente computacional relaciona-se com diversos aspectos tanto teóricos, como metodológicos, porém um dos aspectos fundamentais, consiste na mediação do professor no processo ensino-aprendizagem.

O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover os contextos propícios para a construção do conhecimento. Nesse sentido, o professor mediador desempenha um papel determinante, a medida em que o professor cria as situações desafiantes; recorta esta situação em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhe a busca de novos caminhos, a avaliação de suas estratégias e objetivos, enfim, fazendo com que os alunos se envolvam, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento.

A respeito da aprendizagem observou-se que ocorreu de forma significativa, isto é, os alunos consolidaram conceitos, se envolveram no processo e atingiram os objetivos propostos, o que pode ser verificado na avaliação escrita (prova) onde alguns itens relativos ao trabalho foram inseridos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, C. L., BARROSO, M. M., FILHO, C. F. F., CARVALHO, M. L. B., Cálculo **Numérico - com Aplicações**, São Paulo, Harbra, 2ª. edição, 1987.

MARIANI, V. C., PETERS, S., Utilização do *Software* Derive no Ensino de Cálculo Numérico, **Revista Exatas**, Chapecó, no. 2, ano 2, 1998.

MARIANI, V. C., PETERS, S., Derive - Auxiliar no Ensino de Cálculo Numérico, In: XXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, **Anais**, Natal, 1999.

ROQUE, W. L., **Introdução ao Cálculo Numérico - Um Texto Integrado com Derive**, São Paulo, Atlas, 2000.

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R., **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, Rio de Janeiro, Makron, 2ª. edição, 1996.

SALVADOR, J. A., SALVADOR, J., SANTOS, V. M. P., O Processo de Ensino-Aprendizagem na era da Informação. In: XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, **Anais**, Goiânia, 1996.

Análise de *Softwares* Educacionais, Educ. Rev., Belo Horizonte, no. 6, pp. 41-44, 1987.

DEVELOPMENT OF SOFTWARES IN LECTURES OF NUMERICAL CALCULUS

Abstract: *The Numerical Methods course in the Tuiuti University of the Paraná deals the study of linear equations solution (algebraic and transcendental approaches) as part of major* *basic courses of Computer Science Department. The search of a stimulating learning procedure make the teacher reflects and inquires about the didactic tools and the education methodology used in the last decades. In this context, in order to increase the learning process and giving some motivation had been developed softwares for groups of students to get solutions of algebraic and transcendentes functions, with a simple and friendly visual interface. This software is used to develop some exercises of course, and can be applied in analysis and exercises of other mathematical disciplines.*

Key-words: *Solution of equations, Matlab, softwares, Mathematical education*